

论文

可压缩流体体积黏性的连续介质理论

李馨东, 胡宗民, 姜宗林*

中国科学院力学研究所, 北京 100190

*联系人, E-mail: zljiang@imech.ac.cn

收稿日期: 2015-08-11; 接受日期: 2015-10-08; 网络出版日期: 2016-01-18

国家自然科学基金资助项目(批准号: 11532014)

摘要 本文从连续介质假设的角度出发, 推导出了不同于分子运动论的体积黏性系数公式. 新理论首次从宏观上揭示了可压缩流体体积黏性的具体物理涵义, 即体积黏性系数是体积模量与弛豫时间的乘积. 以氮气为例, 分别对转动模态和振动模态下的体积黏性进行了计算和分析, 结果表明: 连续介质理论的结果略高于分子运动论的结果, 但二者的预测趋势相同; 在振动激发态下, 弛豫时间、分子碰撞数和体积黏性要比转动激发态下的高出几个数量级.

关键词 可压缩流体, Stokes 假设, 体积黏性, 弛豫时间, 转动模态, 振动模态

PACS: 47.10.ad, 51.10.+y, 51.20.+d, 51.35.+a

1 引言

流体力学的基本理论是人们广为熟知的 Navier-Stokes 方程组, 它是由 Stokes^[1]于 1845 年建立起来的, 该理论首次引入了描述一般牛顿流体的两个重要参数, 即剪切或动力黏性系数 μ 和体积黏性系数 ζ . 对于实际的流体运动, 剪切黏性是导致附面层摩阻、流动失稳并趋于湍流等的主要原因, 并以 1904 年 Prandtl 建立的边界层理论为标志^[2], 黏性流体力学在航海、水利工程、航空航天等领域得到广泛的研究和应用. 而关于流体体积黏性的研究是在 20 世纪 50 年代才逐渐被重视起来, 体积黏性的物理特征要比剪切黏性复杂得多, 理论研究也相对较难. 从流体力学

的基本方程组建立 170 年以来, 关于体积黏性系数等于零的争议就一直存在, 即

$$\zeta = \lambda + \frac{2}{3}\mu, \quad (1)$$

等于零, 这就是所谓的 Stokes 假设.

然而, 近几十年来分子运动论和实验表明: 除了理想的单原子气体外, 在高频和较高温条件下体积黏性是不能被忽略的, 即 Stokes 假设一般是不成立的^[3-5]. 在理论方面, 由热力学第二定律可以证明 μ 和 ζ 均为非负数^[6,7]. 体积黏性效应是一种弛豫现象^[8], 当物质状态迅速变化或内部有缓慢的自由度(转动能、振动能和化学能等)激发时, 需要用体积黏性去描述系统热力学平衡的偏离^[9]. Tisza^[10]首次将体

引用格式: 李馨东, 胡宗民, 姜宗林. 可压缩流体体积黏性的连续介质理论. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2016, 46: 034701
Li X D, Hu Z M, Jiang Z L. The continuum theory of bulk viscosity in compressible fluids (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2016, 46: 034701, doi: 10.1360/SSPMA2015-00411

积黏性引入 Navier-Stokes 方程中去解释声波实验中的多余吸收部分, 并由经典声波理论得到了多原子气体的体积黏性系数公式. Wang 和 Uhlenbenck^[11]利用 Chapman-Enskog 方法从 Boltzmann 方程严格推导出了单组分多原子气体体积黏性的理论公式, 这从分子运动论得到的结果与 Tisza 的结果是等价的. Monchick 等人^[12]将 Wang 的理论推广到多组分多原子气体的体积黏性; 而 Meador 等人^[13]认为体积黏性可以描述声波吸收但不能描述声波色散, 又将 Monchick 和 Wang 的结果推广至适用高频的情形. 由于粗糙球的分子模型不能确切地表达实际的气体行为, Curtiss 等人^[14-16]采用球-柱的分子模型推导了包括体积黏性在内的各个输运系数的一般表达式. Truesdell^[17]指出二氧化碳在 293 K 下的黏性比 $\zeta/\mu \approx 1000$, 并对体积黏性的争议进行了分析和阐述^[18]. Emanuel^[19]认为体积黏性效应会对行星大气再入时的摩擦和热流产生很大影响, 也强调体积黏性作为热力学的状态函数需要满足局部热力学平衡条件^[5,20]. 最近 Rajagopal^[21]从理性力学的角度对 Stokes 假设不成立的原因做了解释, 并发展了流体力学的隐式本构方程. Graves 等人^[22]从理论和实验方面对完全气体和稠密流体的体积黏性进行了较为全面的总结, 指出体积黏性的实验数据还很缺乏, 声波吸收实验误差和不确定性较大, 它对高速空气流动的实验测量还存在困难.

在实验方面, Vincenti 等人^[3]指出中等温度下氮气的黏性比 $\zeta/\mu \approx 0.8$. Prangma 等人^[23]利用声波吸收实验测得氖气(Ne)在 77 K 下 $\zeta = 0$, 从而证明了单原子气体体积黏性等于零的理论预测, 并实验测得 N_2 , CO , CH_4 , CD_4 在 293 K 下 ζ/μ 分别为 0.73, 0.55, 1.33, 1.17. Zuckerwar 等人^[24,25]利用声波吸收实验测量了空气(温度和湿度范围分别为 284–323 K 和 6%–91%)的 ζ/μ 变化为 2000–20000, 并得出体积黏性效应是由分子弛豫过程导致的结论. 另一种实验手段是通过测量激波厚度导出体积黏性系数^[26], Sherman^[27]利用这种方法在低密度风洞中测得氩气和纯净空气的激波厚度, 并由此近似得出它们的体积黏性系数分别为 0 和 2/3. Dukhin 等人^[28]最近也给出了一种利用声谱测量体积黏性的新方法. 近年来, 关于体积黏性效应的应用研究也逐渐得到关注, 如可压缩边界层^[29,30]和可压缩 Couette 流动^[31], 非平衡

湍流^[32], 激波/氢气泡相互作用^[33], 氢气/甲烷预混火焰^[34,35], 激波/边界层相互作用^[36]和高超声速钝体绕流^[37]等.

虽然分子运动论从微观角度导出了体积黏性的理论结果^[11,12], 并给出气体内能中各种激发模态的贡献大小, 但是关于体积黏性的宏观物理涵义, 仍缺乏足够的理解和认识. 本文主要通过连续介质假设的观点从理论上导出了体积黏性的一个新结论. 与分子运动论的结果相比, 新理论从宏观上简明地揭示了体积黏性系数仅与体积弹性模量和弛豫时间两个参数相关, 这有助于人们对可压缩流体体积黏性的深入理解. 同时, 新旧理论的结果本质上是一致的, 仅相差一个系数, 二者是宏观和微观不同角度下的相同表述. 最后以氮气为例, 对两种理论在转动温度和振动温度下的预测进行了详细比较和分析.

2 体积黏性的新理论

2.1 流体力学的基本方程组

根据质量守恒、动量守恒和能量守恒定律, 守恒型 Navier-Stokes 方程组的张量形式如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0, \\ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho E u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial(\sigma_{ij} u_j)}{\partial x_i} + \rho u_i f_i - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}, \end{cases} \quad (2)$$

其中的 $\rho, u_i, E, f_i, q_i, \sigma_{ij}$ 分别为密度、速度、单位质量的总能、外部质量力、热流和应力张量, 加上气体状态方程和本构方程后共有 6 个未知数和 6 个方程, 原方程组封闭可解. 流体的本构方程(即广义牛顿黏性定律)为

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij}) + \zeta e_{kk}\delta_{ij}, \quad (3)$$

e_{ij} 为应变率张量. 沿法向取平均, 缩并得

$$p - \bar{p} = \zeta \nabla \cdot \mathbf{V}, \quad (4)$$

其中的矢量 \mathbf{V} 为速度, 标量 p 称为静压, 对可压缩流体即为平衡压力^[3]或热力学压强^[38], 指流体微团内部系统处于平衡时所具有的压力. \bar{p} 称为平均法向应力或动力学压强^[38], 是由分子运动论定义的压力^[3], 指流体微团表面受到外部邻近微团挤压而产生的表

面力. 由等式(4), 通常情况下热力学压强和动力学压强是不相等的, 除了两种特殊的流体: 不可压缩流体($\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$)和 Stokes 流体($\zeta = 0$).

2.2 体积黏性的理论推导

对可压缩流体来说, 等式(2)–(4)的基本方程组是基于连续介质假设下的 Euler 描述法推导而来, 为了从等式(4)中导出体积黏性系数的表达式, 这里采用 Lagrange 描述法进行阐述. 在 Lagrange 坐标系中, 流体微团的空间位置是随时间变化的, 流动物理量表示为流体微团和时间的函数. 设初始时刻为 t_0 , 某流体微团位于 $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$, 并约定其作为该流体微团的标志, 则流体微团在任何时刻 t 的位置矢量和物理量分别为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t), \quad p = p(\mathbf{r}_0, t), \quad \rho = \rho(\mathbf{r}_0, t), \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r}_0, t).$$

不失一般性, 以压缩情形为例, 如图 1 所示, \bar{p}_0 , p_0 和 \bar{p}_e , p_e 分别是初始时刻 t_0 和平衡时刻 t_e 的动力学压强和热力学压强. 某一流体微团在 t_0 时刻 \mathbf{r}_0 位置因受到外界挤压而失去热力学平衡, 此时 \bar{p}_0 大于 p_0 , 仍满足等式(4)的关系. 一段时间后, 该流体微团在 t_e 时刻 \mathbf{r}_e 位置重新调整到新的热力学平衡态, 此时有 $p_e = \bar{p}_e$. 从热力学非平衡态到平衡态的耗散过程中, 热力学压强 p 是微团内部的分子热运动经过弛豫时间建立的平衡压力, 而动力学压强 \bar{p} 是相邻微团通过表面力作用于该微团的结果, 其随着流动时间的推移而发生相应的变化. 当微团的流动特征时间远大于热力学非平衡过程的弛豫时间时, 偏离热平衡态的输运性质可视为局部热力学的状态函数,

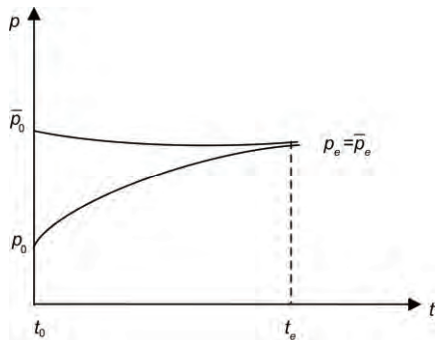


图 1 流体微团压力变化和弛豫时间的示意图(压缩情形)
Figure 1 Schematic diagram of pressure variation and relaxation time in fluid particle (compression case).

即满足局部热力学平衡的假设条件, 此时的体积黏性作为耗散输运系数是有效的^[5,20,22]. 因此, 基于局部热平衡的条件, 流体微团从 t_0 时刻的非平衡初态到 t_e 时刻的平衡终态的弛豫过程中, 动力学压强 \bar{p} 基本保持不变或其改变量 $\Delta\bar{p}$ 相对于热力学压强的改变量 Δp 非常小, 可忽略不计. 于是有

$$\begin{aligned} p_0 - \bar{p}_0 &= p_0 - p_e + p_e - \bar{p}_e + \bar{p}_e - \bar{p}_0 \\ &= p_0 - p_e + \bar{p}_e - \bar{p}_0 \\ &= -(p_e - p_0) \left(1 - \frac{\bar{p}_e - \bar{p}_0}{p_e - p_0} \right) \\ &\approx -(p_e - p_0). \end{aligned} \quad (5)$$

由于速度散度等于流体微团的相对体积膨胀率^[38], 对时间进行一阶近似展开

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{V})_0 &= \left(\frac{1}{\delta V} \frac{D(\delta V)}{Dt} \right)_0 = \left(\frac{1}{v} \frac{Dv}{Dt} \right)_0 \\ &= \frac{1}{v_0} \frac{v_e - v_0}{\tau} + O(\tau), \end{aligned} \quad (6)$$

其中的 δV 和 v 分别是该流体微团的体积和比容, $\tau = t_e - t_0$ 为弛豫时间, 指平衡态系统受外界扰动后重新恢复到新的平衡态所经历的时间. 联立等式(4)–(6), 可得

$$\zeta = \frac{p_0 - \bar{p}_0}{(\nabla \cdot \mathbf{V})_0} = -\frac{p_e - p_0}{(v_e - v_0)/v_0} \tau, \quad (7a)$$

并注意 t_0 的任意性, 则

$$\zeta = -\frac{\Delta p}{\Delta v/v} \tau. \quad (7b)$$

体积(弹性)模量是指在绝热条件下使物体产生单位值的体积相对变化所需施加的额外压强^[5,38–40], 它的数学表达式为

$$K = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \left(-\frac{\Delta p}{\Delta v/v} \right). \quad (8)$$

于是, 由等式(7)–(8)可得一般表达式

$$\zeta = K\tau, \quad (9)$$

即体积黏性系数等于体积模量与弛豫时间的乘积. 气体的等熵体积模量为^[5,38–40]

$$K_s = -v \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s. \quad (10)$$

由于声波的低频传播是等熵过程, 则流体中声速的一般形式为^[5,40]

$$c = \sqrt{\frac{K_s}{\rho}} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} = \sqrt{\gamma \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T}, \quad (11a)$$

完全气体的声速为

$$c = \sqrt{\gamma RT} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}. \quad (11b)$$

因此, 若仅考虑低频情况, 联立等式(9)–(11), 可得完全气体的体积黏性系数表达式

$$\zeta = K\tau = \rho c^2 \tau = \gamma p \tau, \quad (12)$$

等式(9)和(12)是由连续介质的观点推导而来, 可以看出体积黏性系数 ζ 与 $p\tau$ 成正比.

2.3 体积黏性新旧理论比较

单位质量的气体内能是温度的函数, 包含了各种激发模态的能量, 一般表达式为

$$e = e(T) = e_{tr} + \sum_{n=1}^N e_n, \quad (13a)$$

$$c_{v,n} = c_{v,n}(T) = \frac{de_n}{dT}, \quad (13b)$$

其中 e_{tr} 为分子平动能, e_n 为与体积黏性有关的能量, 包括转动能、振动能、离解能和电子能等, $c_{v,n}$ 为第 n 种内能激发态下的定容比热容. 分子运动论导出了不同情形下的体积黏性系数公式, 如下:

单组分单一模态(转动能)的体积黏性为^[3,10,11]

$$\zeta = \frac{pR}{C_v^2} c_{rot} \tau_{rot} = (\gamma - 1) p \frac{C_{rot}}{C_v} \tau_{rot}, \quad (14a)$$

单组分多模态的体积黏性为^[10,11]

$$\zeta = \frac{pR}{C_v^2} \sum_{n=1}^N c_{v,n} \tau_{v,n} = (\gamma - 1) p \sum_{n=1}^N \frac{C_{v,n}}{C_v} \tau_{v,n}, \quad (14b)$$

多组分多模态的体积黏性为^[12]

$$\zeta = \frac{pR}{C_v^2} \sum_{m=1}^M X_m c_v^m \tau^m = (\gamma - 1) p \sum_{m=1}^M X_m \frac{C_v^m}{C_v} \tau^m, \quad (14c)$$

其中的平均弛豫时间有两种形式^[12,33,35]

$$\tau^m = \frac{\sum_{n=1}^N c_{v,n}^m \tau_{v,n}^m}{C_v^m}, \quad (14d)$$

或

$$\tau^m = \frac{C_v^m}{\sum_{n=1}^N \frac{C_{v,n}^m}{\tau_{v,n}^m}}, \quad (14e)$$

等式(14d)和(14e)分别为 τ^m 的算数平均(或加权平均)和几何平均形式, 本文认为选取算数平均更为合理, 其理由是它能够使等式(14c)退化为等式(14b), 也能使等式(14b)退化为等式(14a). 其中的 X_m 为组分 m 占总混合组分的百分比, c_v^m 为组分 m 的定容比热容, $c_{v,n}^m$ 为组分 m 在第 n 种激发态下的定容比热容, $\tau_{v,n}^m$ 为组分 m 在第 n 种激发态下对应的弛豫时间.

由等式(14)可知, 分子运动论的结果给出了不同能量模态对体积黏性的贡献大小及相应的弛豫时间. 对于单原子气体, 只有平动能 e_{tr} 而所有的 $c_{v,n}$ 为零, 因此 ζ 等于零, 这与分子运动论预测是吻合的^[3,5]. 另外, 体积黏性系数同热力学压强与弛豫时间的乘积成正比^[20], 即

$$\zeta \sim \sum_i (p\tau_i), \quad (15)$$

这与本文导出的理论结果等式(12)是一致的.

然而, 本文通过连续介质观点给出的等式(9)和(12), 在推导过程中并没有涉及流体微团内部的组分成分、激发模态, 以及化学反应, 因此更具一般的物理意义, 即体积黏性效应是由流体微团体积量和热力学非平衡态过程所需的弛豫时间共同决定的. 等式(12)中的弛豫时间 τ 实际是指整个热力学系统的平均弛豫时间, 由等式(14)可知, 多组分多模态的总平均弛豫时间为

$$\tau_{total} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N X_m \frac{C_{v,n}^m}{C_v} \tau_{v,n}^m. \quad (16)$$

因此, 分子运动论和目前理论的结果分别为

$$\zeta_{kin} = (\gamma - 1) p \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N X_m \frac{C_{v,n}^m}{C_v} \tau_{v,n}^m, \quad (17)$$

$$\zeta_{con} = K\tau_{total} = \gamma p \tau_{total} = \gamma p \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N X_m \frac{C_{v,n}^m}{C_v} \tau_{v,n}^m, \quad (18)$$

其中的 ζ_{kin} 和 ζ_{con} 表示分子运动论和连续介质理论的体积黏性系数, τ_{total} 为总平均弛豫时间. 比较易知, 从新旧理论的结果仅相差一个含 γ 的系数, 前者是后者的 $\gamma/(\gamma - 1)$ 倍.

2.4 剪切黏性和体积黏性的物理涵义

剪切黏性表征了流体微团的剪切效应. 当两平行平板存在同向的速度差时, 充满其间的流体便受到一个沿自身切向方向的内摩擦力 τ_{xy} , 其大小为

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (19)$$

它与流速 u (x 方向)在 y 方向的速度梯度成正比, 比例大小为剪切黏性系数 μ .

体积黏性表征了流体微团的膨胀或压缩效应. 当管道内气体受到压缩时, 后面的压缩波会追赶前面的压缩波, 若流体微团的绝对速度超过声波传播速度时便会出现激波间断面, 这时流体微团受到一个沿自身法向方向的表面应力 \bar{p} , 其大小满足

$$p - \bar{p} = \zeta \nabla \cdot \mathbf{V},$$

它同热力学压强的差值与体积相对变化率成正比, 比例大小为体积黏性系数 ζ .

由此可见, 剪切黏性和体积黏性分别是流体微团所受切向应力和法向应力的量度的度量, 二者是可压缩流体固有的物理属性.

3 体积黏性的理论计算

这里以双原子的氮气为例, 采用两种理论对不同温度下的体积黏性系数进行预测和评估. 考虑转动能和振动能, 理想气体的定容比热容为

$$\begin{aligned} c_v &= c_{tr} + c_{rot} + c_{vib} \\ &= \frac{3}{2}R + R + R \left(\frac{T_{vib}}{T} \right)^2 \frac{e^{T_{vib}/T}}{(e^{T_{vib}/T} - 1)^2}, \end{aligned} \quad (20)$$

其中的 c_{tr} , c_{rot} 和 c_{vib} 分别是平动、转动和振动模激发态下的定容比热容, 且比热比为

$$\gamma(T) = 1 + \frac{R}{c_v}. \quad (21)$$

3.1 量热完全气体

对于量热完全气体, 仅有平动能和转动能, 分子碰撞数 Z_{rot} 和转动弛豫时间 τ_{rot} 采用 Parker^[41]的结果, 剪切黏性系数采用 Sutherland 公式^[8], 即

$$Z_{rot} = \frac{\tau_{rot}}{\tau_c} = \frac{Z_{rot}^\infty}{1 + \frac{\pi^{1.5}}{2} \left(\frac{T^*}{T} \right)^{0.5} + \left(\frac{\pi^2}{4} + \pi \right) \frac{T^*}{T}}, \quad (22a)$$

$$\tau_c = \frac{\pi \mu}{4 p}, \quad (22b)$$

$$\tau_{rot} = Z_{rot} \tau_c = \frac{\pi \mu}{4 p} Z_{rot}, \quad (22c)$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1.5} \frac{T_0 + T_s}{T + T_s}, \quad (22d)$$

其中 τ_c 为分子连续碰撞两次的平均时间, $Z_{rot}^\infty = 15.7$, $T^* = 80 \text{ K}$, $T_0 = 273.16 \text{ K}$, $T_s = 104 \text{ K}$, 标准条件下的剪切黏性系数为 $\mu_0 = 16.6 \times 10^{-6} \text{ Pa s}$. 将等式(18)分别代入等式(17)和(18), 得

$$\zeta_{kin}^{rot} = (\gamma - 1) \frac{\pi c_{rot}}{4 c_v} Z_{rot} \mu, \quad (23a)$$

和

$$\zeta_{con}^{rot} = \gamma \frac{\pi c_{rot}}{4 c_v} Z_{rot} \mu, \quad (23b)$$

其中 ζ_{kin}^{rot} 和 ζ_{con}^{rot} 分别表示转动模式下分子运动论和连续介质理论的体积黏性系数.

在 600 K 温度以下, 氮气分子只具有平动能和转动能, 图 2 给出了 273–1000 K 范围内氮气的转动弛豫时间 τ_{rot} 和碰撞次数 Z_{rot} . 在 300 K (293–307 K)附近, 理论计算的弛豫时间和碰撞次数与实验数据^[23]吻合得很好, 该温度下 N_2 分子只需要几次碰撞就能达到平衡, 约 10^{-10} s , 不过即使在 600 K 以上, 氮气分子的碰撞次数和弛豫时间并没有明显增加, 说明转动弛豫过程对温度不敏感.

图 3 的(a)和(b)分别是氮气体积黏性系数和黏性

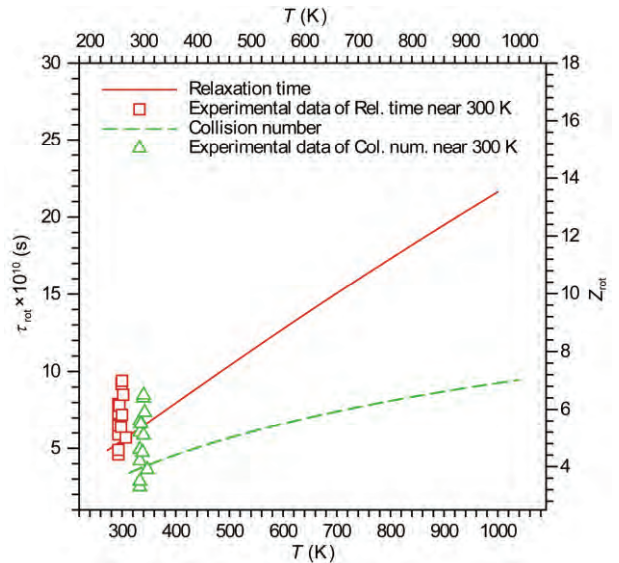


图 2 (网络版彩图)氮气分子的转动弛豫时间和碰撞数
Figure 2 (Color online) Rotation relaxation time and collision numbers of Nitrogen molecule.

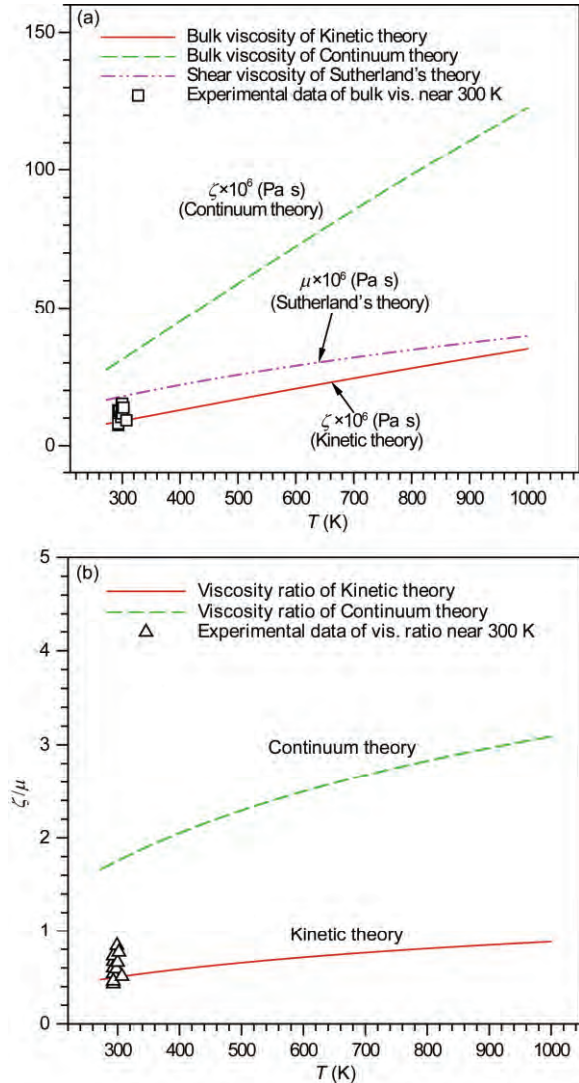


图3 (网络版彩图)转动激发态的氮气分子: (a) 分子运动论和连续介质理论的体积黏性系数; (b) 分子运动论和连续介质理论的黏性系数之比

Figure 3 (Color online) Nitrogen molecules in rotational mode: (a) The bulk viscosity coefficient ζ in the kinetic and continuum theories; (b) the viscosity ratio ζ/μ in the kinetic and continuum theories.

比在两种理论下的计算结果. 从图 3(a)中可以看出, 连续介质理论计算的体积黏性(长虚线所示)要高于分子运动论计算的结果(实线所示), 在 300 K 附近后者的理论预测更接近声波实验数据. 表 1 给出了两种理论与实验的结果比较: 对于体积黏性系数 ζ , 分子运动论的结果与低温段的实验数据吻合得很好, 而连续介质理论的结果略比高温段的实验数据, 是分子运动论结果的 3.5 倍; 而黏性比 ζ/μ 也有类似的结

表 1 体积黏性的理论和实验^[23]比较 (293–307 K)

Table 1 Comparison of the theoretical value and experimental data [23] for the bulk viscosity from 293 to 307 K

理论和实验	$\zeta \times 10^6$ (Pa s)	ζ/μ
分子运动论	8.76–9.26	0.50–0.51
连续介质理论	30.66–32.41	1.75–1.78
实验数据	7.50–15.20	0.43–0.85

论. 需指出的是, 实验测量的体积黏性存在 10% 的误差^[23]. 从实验和两种理论可以看出, 在 300 K 附近氮气的体积黏性和剪切黏性基本为同一数量, 这与其他文献^[3,5]指出的结果一致.

3.2 热完全气体

对于热完全气体, 除了平动能和转动动能外, 还有振动能. 转动弛豫时间、分子碰撞时间和碰撞数的表达式与 3.1 节相同, 振动弛豫时间^[3] τ_{vib} 和振动分子碰撞数的表达式分别为

$$\tau_{\text{vib}} = \frac{C_1 \exp\left[\left(C_2/T\right)^{1/3}\right]}{p}, \quad (24a)$$

$$Z_{\text{vib}} = \frac{\tau_{\text{vib}}}{\tau_c} = \frac{4}{\pi} \frac{C_1 \exp\left[\left(C_2/T\right)^{1/3}\right]}{\mu}, \quad (24b)$$

其中氮气的振动特征温度为 $T_{\text{vib}} = 3400 \text{ K}$, 常系数 $C_1 = 7.12 \times 10^{-9} \text{ atm s}$, $C_2 = 1.91 \times 10^6 \text{ K}$. 联立等式(20)和(24)分别代入等式(17)和(18), 分别得

$$\zeta_{\text{kin}}^{\text{vib}} = (\gamma - 1) \left\{ \frac{\pi}{4} \frac{C_{\text{rot}}}{c_v} Z_{\text{rot}} \mu + \frac{C_{\text{vib}}}{c_v} C_1 \exp\left[\left(C_2/T\right)^{1/3}\right] \right\}, \quad (25a)$$

$$\zeta_{\text{con}}^{\text{vib}} = \gamma \left\{ \frac{\pi}{4} \frac{C_{\text{rot}}}{c_v} Z_{\text{rot}} \mu + \frac{C_{\text{vib}}}{c_v} C_1 \exp\left[\left(C_2/T\right)^{1/3}\right] \right\}, \quad (25b)$$

其中的 $\zeta_{\text{kin}}^{\text{vib}}$ 和 $\zeta_{\text{con}}^{\text{vib}}$ 分别表示振动模态下分子运动论和连续介质理论的体积黏性系数.

当温度超过 600 K 后, 氮气分子具有平动能、转动能和振动能. 图 4 给出了 600–6000 K 范围内氮气的振动弛豫时间 τ_{vib} (红色实线)、碰撞次数 Z_{vib} (绿色虚线) 和相应的实验数据^[42]. 可以看出, 分子振动激发与转动激发的物理特征大不相同: 随着温度的增加, 振动弛豫时间和碰撞数呈指数下降趋势. 在 1000 K 附近 τ_{vib} 约为 10^{-3} s , 高出转动弛豫时间 τ_{rot} 约 6 个数

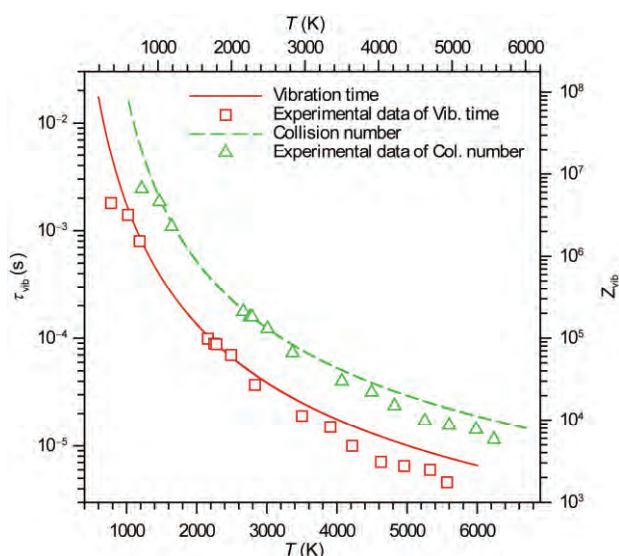


图4 (网络版彩图)氮气分子的振动弛豫时间和碰撞数

Figure 4 (Color online) Vibration relaxation time and collision numbers of Nitrogen molecule.

量级, Z_{vib} 约为 10^6 , 即振动弛豫过程需要几十万次的分子碰撞才能完成^[9].

图 5(a)和(b)分别是氮气在振动模式下的体积黏性系数和黏性比的预测结果. 从图 5(a)中可以看出, 连续介质理论计算的体积黏性系数 ζ (绿色长虚线所示)虽然略高于分子运动论计算的结果(红色实线所示), 但二者的变化趋势基本完全一样, 图 5(b)中的黏性比 ζ/μ 也有类似的变化趋势. 比较图 5 和图 3, 在 1000 K 附近, 振动激发态下的 ζ 和 ζ/μ 要比转动激发态下的结果高出 5–6 个数量级, 这表明振动弛豫过程对温度变化更为敏感, 并且随着温度的增加而逐渐减小. 在 1000 K 温度下, 连续介质理论的结果是分子运动论的 3.94 倍.

4 结论

从连续介质假设的观点出发, 导出了体积黏性系数的理论表达式. 该结果与分子运动论的结果相比: 它从宏观上明确阐释了流体体积黏性的物理涵义, 即可压缩流体的体积黏性效应是由体积模量与弛豫时间之乘积来度量的; 两种理论的结果是一致的, 仅相差一个含 γ 的系数.

以双原子的氮气为例, 考察了量热完全气体的

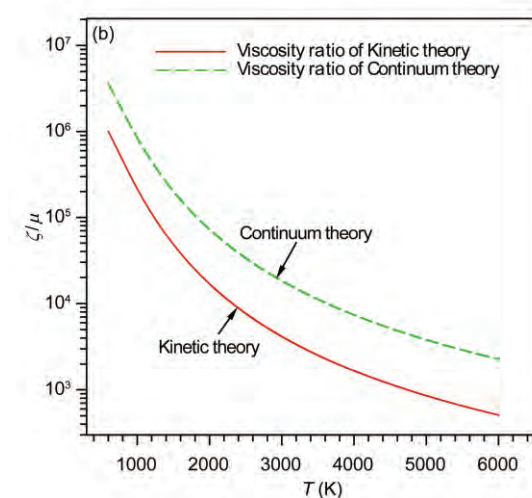
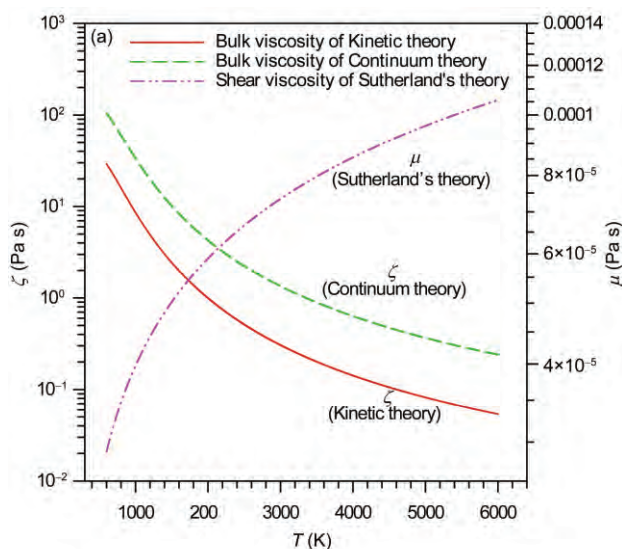


图5 (网络版彩图)振动激发态的氮气分子: (a) 分子运动论和连续介质理论的体积黏性系数; (b) 分子运动论和连续介质理论的黏性系数之比

Figure 5 (Color online) Nitrogen molecule in vibrational mode: (a) The bulk viscosity coefficient ζ in the kinetic and continuum theories; (b) the viscosity ratio ζ/μ in the kinetic and continuum theories.

转动弛豫过程, 目前的理论结果略高于分子运动论的预测结果, 更接近于高温段的实验数据. 对于热完全气体的振动弛豫过程, 两种理论对体积黏性系数和黏性比的预测趋势基本相同, 随着温度增加均呈指数下降变化. 在振动激发态下, 氮气分子的弛豫时间、分子碰撞数和体积黏性要比转动激发态下的高出几个数量级.

参考文献

- 1 Stokes G G. On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids. *Trans Camb Philos Soc*, 1845, 8: 287–342
- 2 Wu J K. *History of Mechanics* (in Chinese). Shanghai: Shanghai Lexicographical Publishing House, 2010 [武际可. 力学史. 上海: 上海辞书出版社, 2010]
- 3 Vincenti W G, Kruger G H. *Introduction to Physical Gas Dynamics*. Florida: Krieger, 1965
- 4 Wu W Y. *Fluid Mechanics* (in Chinese). I. Beijing: Peking University Press, 1982 [吴望一. 流体力学(上册). 北京: 北京大学出版社, 1982]
- 5 Thompson P A. *Compressible-Fluid Dynamics*. New York: McGraw-Hill, 1971
- 6 Landau L D, Lifshitz E M. *Fluid Mechanics*. Beijing: Pergamon, 1959
- 7 Eringen A C. *Mechanics of Continua*. 2nd ed. New York: Krieger, 1980 [爱林根 A C(著), 程昌钧, 等(译). 连续统力学. 北京: 科学出版社, 1991]
- 8 Chapman S, Cowling T G. *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases*. 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1970 [查普曼 S, 考林 T G(著), 刘大有, 王伯懿(译). 非均匀气体的数学理论. 北京: 科学出版社, 1985]
- 9 Zel'dovich Y B, Raizer Y P. *Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamics phenomena*. New York: Academic, 1967 [泽尔道维奇 Y B, 莱依捷尔 IO P(著), 张树材(译). 激波与高温流体动力学现象-物理学(上下册). 北京: 科学出版社, 1985]
- 10 Tisza L. Supersonic absorption and Stokes' viscosity relation. *Phys Rev*, 1942, 61: 531–536
- 11 Wang C, Uhlenbeck G E. *Transport Phenomena in Polyatomic Gases*. Report, No. CM-681, 1951
- 12 Monchick L, Yun K S, Mason E A. Formal kinetic theory of transport phenomena in polyatomic gas mixtures. *J Chem Phys*, 1963, 39: 654–669
- 13 Meador W E, Miner G A, Townsend L W. Bulk viscosity as a relaxation parameter: Fact or fiction? *Phys Fluids*, 1996, 8: 258–261
- 14 Curtiss C F. Kinetic theory of nonspherical molecules. *J Chem Phys*, 1956, 24: 225–241
- 15 Curtiss C F, Muckenfuss C. Kinetic theory of nonspherical molecules. II. *J Chem Phys*, 1957, 26: 1619–1636
- 16 Muckenfuss C, Curtiss C F. Kinetic theory of nonspherical molecules. III. *J Chem Phys*, 1958, 29: 1257–1272
- 17 Truesdell C. Precise theory of the absorption and dispersion of forced plane infinitesimal waves according to the Navier-Stokes equations. *J Rati Mech Anal*, 1953, 2: 644–742
- 18 Truesdell C. The present status of the controversy regarding bulk viscosity of fluids. *Proc Roy Soc London Ser A*, 1954, 226: 59–64
- 19 Emanuel G. Bulk viscosity of a dilute polyatomic gas. *Phys Fluids*, 1990, 2: 2252–2254
- 20 Emanuel G. Bulk viscosity in the Navier-Stokes equations. *Int J Eng Sci*, 1998, 36: 1313–1323
- 21 Rajagopal K R. A new development and interpretation of the Navier-Stokes fluid which reveals why the “Stokes assumption” is inapt. *Int J Non-Linear Mech*, 2013, 50: 141–151
- 22 Graves R E, Argrow B M. Bulk viscosity: Past to present. *J Thermophys Teat Tr*, 1999, 13: 337–342
- 23 Prangma G J, Alberga A H, Beenakker J J M. Ultrasonic determination of the volume viscosity of N₂, CO, CH₄ and CD₄ between 77 and 300 K. *Physica*, 1973, 64: 278–288
- 24 Zuckerwar A J, Meredith R W. Low-frequency sound absorption measurements in air. National Aeronautics and Space Administration, RP-1128, 1984
- 25 Ash R L, Zuckerwar A J, Zheng Z Q. Second coefficient of viscosity in air. National Aeronautics and Space Administration, CR-187783, 1991
- 26 Emanuel G, Argrow B M. Linear dependence of the bulk viscosity on shock wave thickness. *Phys Fluids*, 1994, 6: 3202–3205
- 27 Sherman F S. A Low-density Wind-tunnel Study of Shock-wave Structure and Relaxation Phenomena in Gases. Technical Note, National Advisory Committee for Aeronautics, TN-3298, 1955
- 28 Dukhin A S, Goetz P J. Bulk viscosity and compressibility measurement using acoustic spectroscopy. *J Chem Phys*, 2009, 130: 124519
- 29 Emanuel G. Effect of bulk viscosity on a hypersonic boundary layer. *Phys Fluids*, 1992, 4: 491–495
- 30 Cramer M S, Bahmani F. Effect of large bulk viscosity on large-Reynolds-number flows. *J Fluid Mech*, 2014, 751: 142–163
- 31 Gonzalez H, Emanuel G. Effect of bulk viscosity on Couette flow. *Phys Fluids*, 1993, 5: 1267–1268
- 32 Orou J C, Johnson J A. Second viscosity enhancement in turbulent nonequilibrium flow. *Phys Fluids*, 1994, 6: 415–417
- 33 Billet G, Giovangigli V, Gassowski G D. Impact of volume viscosity on a shock/hydrogen bubble interaction. *Combust Theor Model*, 2008, 12: 221–248

- 34 Fru G, Janiga G, Thevenin D. Direct numerical simulations of the impact of high turbulence intensities and volume viscosity on premixed methane flames. *J Combust*, 2011, 2011: 1–12
- 35 Fru G, Janiga G, Thevenin D. Impact of volume viscosity on the structure of turbulent premixed flames in the thin reaction zone regime. *Flow Turbul Combust*, 2012, 88: 451–478
- 36 Bahmani F, Cramer M S. Suppression of shock-induced separation in fluids having large bulk viscosities. *J Fluid Mech*, 2014, 756(R2): 1–10
- 37 Chikitkin A V, Rogov B V, Tirskey G A, et al. Effect of bulk viscosity in supersonic flow past spacecraft. *Appl Numer Math*, 2015, 93: 47–60
- 38 Zhang L X, Yin X Y, Ma H Y. *Fluid Mechanics*. 2nd ed. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2009 [庄礼贤, 尹协远, 马晖扬. 流体力学. 第2版. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2009]
- 39 Landau L D, Lifshitz E M. *Theory of Elasticity (Volume 7 of Course of Theoretical Physics)*. Great Britain: Pergamon, 1959
- 40 Tong B G, Kong X Y, Deng G H. *Gas Dynamic*. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2012 [童秉纲, 孔祥言, 邓国华. 气体动力学. 第2版. 北京: 高等教育出版社, 2012]
- 41 Parker J G. Rotational and vibrational relaxation in diatomic gases. *Phys Fluids*, 1959, 2: 499–462
- 42 Parker J G. Comparison of experimental and theoretical vibrational relaxation times for diatomic gases. *J Chem Phys*, 1964, 41: 1600–1609

The continuum theory of bulk viscosity in compressible fluids

LI XinDong, HU ZongMin & JIANG ZongLin*

Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China

A new theoretical formula of bulk viscosity in compressible fluids is derived by the continuum medium assumption, which first indicates a macroscopic physical interpretation that the bulk viscosity coefficient is equal to the product of bulk modulus and relaxation time. For nitrogen in the rotational and vibrational energy modes, the bulk viscosity of the present continuum theory shows slightly higher results than that of the kinetic theory, but the theories provide a same predicted trend. In the vibrational relaxation process, the relaxation time, collision number and the bulk viscosity coefficient are several orders of magnitude larger than that in the rotational mode.

compressible fluids, Stokes assumption, bulk viscosity, relaxation time, rotational mode, vibrational mode

PACS: 47.10.ad, 51.10.+y, 51.20.+d, 51.35.+a

doi: 10.1360/SSPMA2015-00411