

文章编号: 1000-4750(2016)Suppl-0049-07

# 混凝土蠕变与应力松弛耦合破坏及临界幂律行为

王影冲<sup>1</sup>, 王 鼎<sup>1</sup>, 郝圣旺<sup>1,2</sup>

(1. 燕山大学建筑工程与力学学院, 河北, 秦皇岛 066004; 2. 中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室, 北京 100190)

**摘 要:** 该文设计和开展了单轴加载下混凝土的蠕变与应力松弛耦合试验, 分析了混凝土蠕变与应力松弛耦合诱发宏观破坏的演化过程。试验表明, 在给试验机作动器施加一个初始位移并保持其恒定的过程中, 混凝土试样发生变形单调增长时伴随着应力松弛过程, 表现出两者的耦合行为。在该过程中, 虽然混凝土试样的变形在增加, 但是系统的总能量在单调减小。这种能量损失表明了混凝土材料的内部损伤在不断发展。在蠕变与应力松弛耦合过程中, 能量演化经历了三个典型阶段, 即初始快速演化阶段(但速度在减小)、稳定演化阶段和最后的加速演化阶段, 直至试样发生宏观破坏。虽然试样的破坏时间呈现出较大分散性, 但是在宏观破坏前, 系统能量释放率呈现出相同的临界幂律行为, 且具有相同的临界幂指数 $-2/3$ 。该结果为基于响应量临界行为的监测, 探索破坏预测提供了线索和依据。

**关键词:** 混凝土; 蠕变; 应力松弛; 耦合; 临界幂律行为

中图分类号: TV331 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2015.05.S029

## CREEP-STRESS RELAXATION COUPLING FAILURE IN CONCRETE AND ITS CRITICAL POWER-LAW BEHAVIOR

WANG Ying-chong<sup>1</sup>, WANG Ding<sup>1</sup>, HAO Sheng-wang<sup>1,2</sup>

(1. School of Civil Engineering and Mechanics, Yanshan University, Qinhuangdao, Hebei 066004, China;

2. The State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

**Abstract:** Creep-stress relaxation coupling experiments were carried out and the induced catastrophic failure in concrete materials was investigated in the paper. An initial displacement was imposed to the cross-head of testing machine and then it was kept constant, a stress relaxation was observed associated with the increase of deformation. The growth of concrete's deformation leads to a continuous increase of the stored energy in the concrete samples. But, the total energy of the system decreases monotonically. This indicates that the tested concrete undergoes a damage propagation process even though the stress is relaxing. The energy-time curves can be typically divided into three temporal stages: the primary stage with rapid evolution, followed by a steady stage with a constant slope, and finally the accelerating tertiary stage which eventually leads to a macroscopic failure. Ahead of macroscopic failure, the energy release rates of all samples present a power law behavior with the same critical exponent  $-2/3$ , although these experiments exhibit a large variability in time-to-failure and failure strain or stress. This observation suggests a way to predict the timing of failure by monitoring the critical accelerating behaviors of the quantities such as energy, strain or stress.

**Key words:** concrete; creep; stress relaxation; coupling; critical power-law behavior

收稿日期: 2015-05-03; 修改日期: 2016-01-11

基金项目: 河北省自然科学基金项目(D2015203398); 国家重点基础研究发展计划项目(2013CB834100); 国家自然科学基金青年基金项目(51408526)

通讯作者: 郝圣旺(1975), 男, 安徽人, 教授, 博士, 从事混凝土结构性能与模拟研究(E-mail: hsw@ysu.edu.cn).

作者简介: 王影冲(1990), 男, 河北人, 硕士生, 主要从事混凝土结构性能研究(E-mail: wang982529865@163.com);

王 鼎(1985), 男, 河北人, 讲师, 博士, 主要从事结构可靠度分析研究(E-mail: wangding@ysu.edu.cn).

与时间有关<sup>[1-2]</sup>的力学性能是混凝土工程设计和安全评估的一个重要问题,尤其是对于大型的混凝土结构,如大坝、大型混凝土桥梁、地下混凝土工程等尤为重要。蠕变与应力松弛是混凝土两个最基本的与时间有关的力学特性。蠕变是指在恒定应力下,材料变形随时间增长的现象。与此相对应地,应力松弛指的是混凝土在恒定应变时,其应力随时间逐渐衰减的现象。

由于蠕变和应力松弛对混凝土工程安全与耐久性的重要影响,人们在这方面十分关注。蠕变是混凝土固有的时变特性<sup>[3-6]</sup>,混凝土在受拉、压、弯情况下均会发生蠕变现象,且蠕变现象多表现为非线性变形,对结构或构件的受力性能影响较大。在混凝土蠕变变形演化<sup>[7-8]</sup>、蠕变系数<sup>[9-10]</sup>等蠕变特性研究方面,取得了大量进展。这些结果表明加载水平和龄期<sup>[10]</sup>、混凝土内部的微裂隙及内粘聚力<sup>[11]</sup>、早期裂缝和腐蚀<sup>[12]</sup>、水化作用<sup>[13-14]</sup>等对混凝土蠕变有着重要影响。从实际工程设计和安全评估需求来说,混凝土蠕变计算<sup>[15]</sup>和预测<sup>[16-17]</sup>是一个关键点。损伤变量法<sup>[18]</sup>引入损伤对物性参数的影响,将材料自身缺陷作为蠕变演化的因素之一,优化了混凝土蠕变计算模型。B3模型<sup>[19-20]</sup>可以通过短期实验数据修正有关参数以获得更精确的徐变计算和预测模型,目前B3模型在混凝土结构分析中应用较为广泛。ACI<sup>[21]</sup>推荐使用的双曲线函数模型,可以预测非标准条件下混凝土的蠕变,但没有考虑混凝土强度的影响。混凝土的蠕变预测模型<sup>[22]</sup>多为连续型函数模型,难以描述混凝土在蠕变变形下发生突然破坏。蠕变破坏预测方法一直是该领域的一个核心问题,在部分损伤的混凝土拉、弯蠕变试验<sup>[23]</sup>中,破坏时间与加载应力水平之间呈现出线性关系,这为预测蠕变破坏提供了一种方法,但对于蠕变破坏的准确预测仍有待进一步研究。

与蠕变相对应,应力松弛是混凝土的另一种固有时效特性<sup>[24-25]</sup>,是影响混凝土长期行为的一个关键因素。应力松弛试验常用来测量和分析混凝土长期变形下的应力损失<sup>[26-28]</sup>、松弛系数<sup>[29-31]</sup>等。研究者们<sup>[24,32]</sup>尝试探索基于应力松弛试验确定混凝土的长期强度的方法,以确定混凝土结构的长期承载力。非均质材料的应力松弛破坏模型中,在临界刚度条件下,材料应力变化率与失效时间之间遵循幂律行为<sup>[33]</sup>。这一临界幂律行为,为预测破坏时间提供了可能。准确测定<sup>[34-36]</sup>混凝土的应力松弛对于

实际工程的设计和评估具有实际意义。

综上所述,蠕变和应力松弛是混凝土固有时效特性的两个方面<sup>[37-38]</sup>,是决定混凝土长期行为的关键因素。理解其演化特征是混凝土工程设计与安全维护的一个核心问题,也是长期以来研究的热点。实际工程中混凝土常处于蠕变与应力松弛的耦合过程。但是目前,对该耦合过程中混凝土响应特征及其机理还不完全清楚,对该耦合过程通向破坏的特征还缺乏认识。基于此,本文将设计和开展实现混凝土蠕变与应力松弛耦合试验,观测和分析混凝土蠕变和应力松弛耦合诱发宏观破坏过程中应力和变形的演化特征。在此基础上,定义能量释放率,分析能量释放率随时间的演化过程及其临界行为。加深对混凝土时效性能的理解与认识,为混凝土工程的设计和评估提供借鉴。

## 1 试验设计与加载方式

### 1.1 试验材料

本实验所用水泥是秦皇岛浅野水泥制品有限公司生产的P.O32.5R型水泥。细骨料为秦皇岛青龙县的河砂,最大粒径为4.5 mm,细度模数为2.5,密度为2.6 g/cm<sup>3</sup>。粗骨料为秦皇岛抚宁县的石灰岩质的碎石,最大粒径16 mm,最小粒径4.5 mm。外加剂为秦皇岛独楼外加剂厂生产的UNF型高效减水剂。试样为40 mm×40 mm×160 mm的混凝土长方体。

### 1.2 试验加载方法

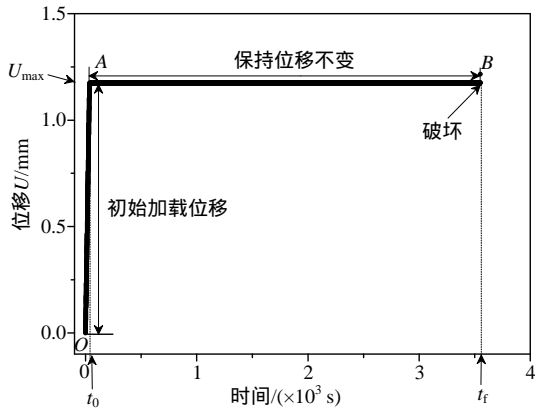
实验中,采用闭环位移加载方式,即控制试验机作动器的运动过程。在试验开始前,先对试样进行预压。本实验中,预压载荷为5 kN~10 kN,预压时间为5 min~10 min,每个试样预压3次。为实现混凝土蠕变与应力松弛耦合过程,实验中首先控制试验机作动器(加载速度为1.5 mm/min)运行到预先设定值,然后保持位移不变,观测试样平均应力-应变的时程演化特征。所以,整个实验加载可以分为两个阶段。第一阶段是施加初始位移,即控制试验机作动器运行到设定位置;随后,保持作动器位置恒定不变,也就是加载的第二个阶段。

由于实验机加载架不可能完全刚性,加载中其会有弹性变形。所以实验中的总位移 $U$ (也就是作动器位移)由混凝土试样变形 $U_c$ 和实验机加载变形 $U_e$ 两部分组成。在试验过程中利用夹式引伸计测量混凝土试样变形 $U_c$ 。

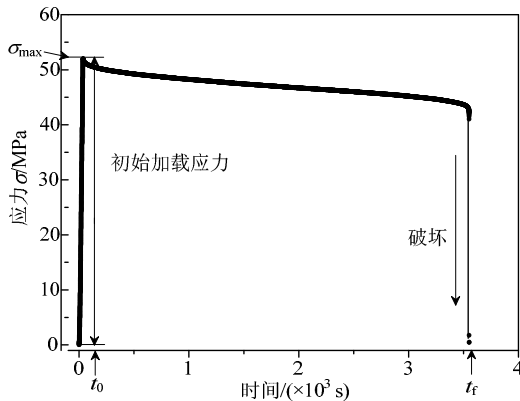
## 2 试验结果分析

### 2.1 试验曲线

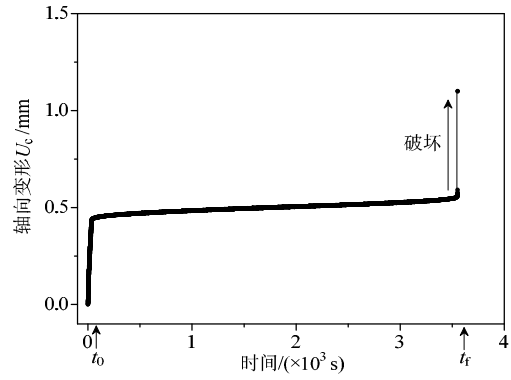
为清楚地说明整个加载过程。图 1 示出了一个典型试样的完整试验结果。其中，图 1(a)为试验机作动器位移随时间的演化曲线。图 1(b)和图 1(c)分别表示混凝土试样轴向应力和轴向变形的时程曲线。图 1(d)为作动器位移保持恒定后应力、轴向变形随时间演化放大图。保持作动器位置的起始时刻定义为  $t_0$ (图 1(a))，也就是蠕变和应力松弛过程的起始点。图 1(a)中  $OA$  段是施加初始位移阶段，该过程近似呈线性。相应地，伴随着作动器位移的增加，混凝土试样的轴向应力(图 1(b))和轴向变形(图 1(c))相应单调增加。随后的  $AB$  段(图 1(a))是保持作动器位移恒定阶段，可以看出试验中作动器位置控制很稳定。在该过程中，混凝土轴向应力随时间逐渐降低(图 1(b))，而其轴向变形  $U_c$  随时间单调增加(如图 1(c))。因此，在作动器位置保持恒定过程中，混凝土在变形增加的同时伴随着应力的衰减。也就是说混凝土一方面处于变应变作用下的应力松弛过程，另一方面在变应力作用下发生蠕变变形，即呈现出蠕变与应力松弛的耦合过程(图 1(d))。随着蠕变变



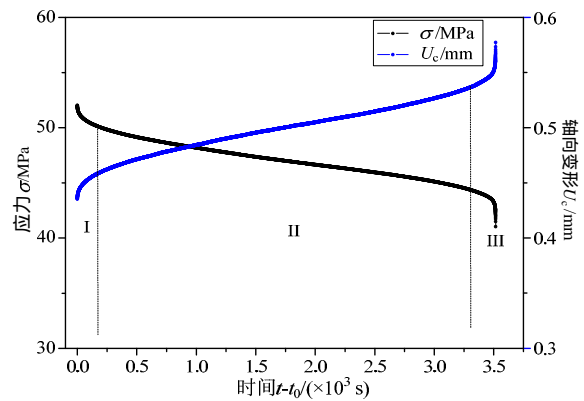
(a) 试验机作动器位移( $U$ )时间曲线



(b) 应力 $\sigma$ 随时间演化曲线



(c) 混凝土试样轴向变形( $U_c$ )随时间演化曲线



(d)  $U$  保持恒定后应力、变形随时间演化曲线

图 1 试验中一个典型试样的试验结果

Fig.1 An example result of tested specimen

形和应力松弛的发展，混凝土试样最后突然发生破坏，并伴随有巨大响声。 $t_0$  时刻对应也是整个加载过程的最大应力  $\sigma_{max}$  点。 $t_f$  为试样破坏时间。

### 2.2 应力时程演化曲线

为了考察作动器位移恒定过程中，混凝土应力松弛过程。图 2 给出了试验中所有 13 个混凝土试样的应力松弛演化时程曲线。相应的应力率时程曲线如图 3 所示。可以看出，在保持作动器位置恒定后，每个混凝土试样应力时程曲线均经历三个典型阶段。即开始的应力快速松弛阶段，该阶段应力时程曲线呈上凹下降，表现为减速衰减。随后，进入稳定应力松弛阶段，此时应力率呈近似恒定特征。最后，进入第三阶段。该阶段应力时程曲线呈上凸下降，表现为加速的快速松弛，并最终导致突然的宏观破坏。

值得注意的是，如图 2 所示，混凝土试样宏观破坏时间  $t_f$  及破坏应力均呈现较大分散性(又见图 4 和图 5)。图 4 和图 5 纵轴均为破坏时间，图 4 横轴是最大应力，图 5 横轴为加载的位移水平。可以看出，破坏时间与加载水平(最大应力和初始位移)之间并没有呈现出直接关联。这其中的主要原因在

于，该过程是蠕变与应力松弛耦合过程，混凝土破坏不会像蠕变破坏那样直接依赖于加载应力水平，也不会像应力松弛那样直接依赖于初始施加位移，而是两者的综合效应。

考虑到最大应力 $\sigma_{max}$ 和初始位移 $U$ 的乘积反映的是施加给整个系统的最大总能量 $W_{max}$ ，所以，在图6中给出了其与破坏时间的散点图。可以看出，两者之间依然没有呈现出显著关联，这其中的机理还需要更进一步的探索。

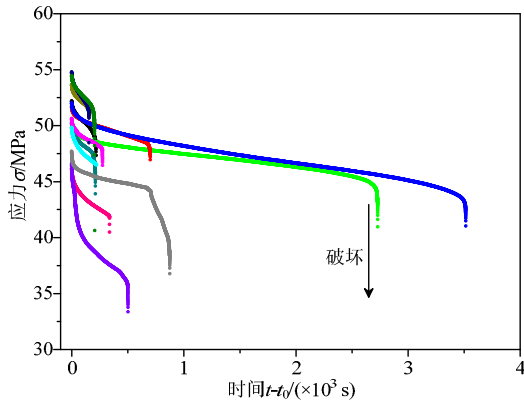


图2 应力随时间变化曲线

Fig.2 Curve of stress versus time

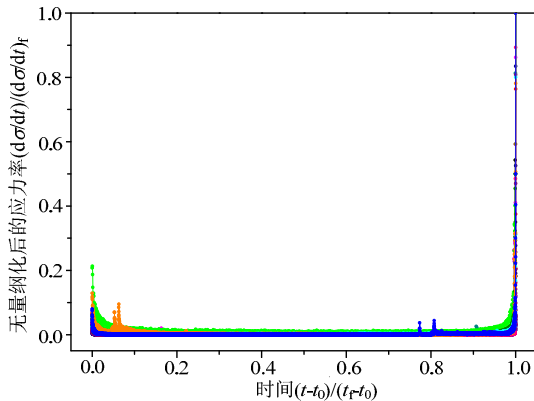


图3 应力率时程曲线

Fig.3 Curve of stress rate versus time

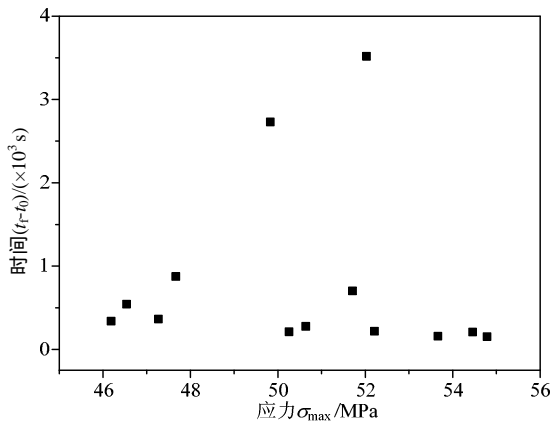


图4 加载应力水平与 $t_f-t_0$ 关系图

Fig.4  $t_f-t_0$  versus loading stress

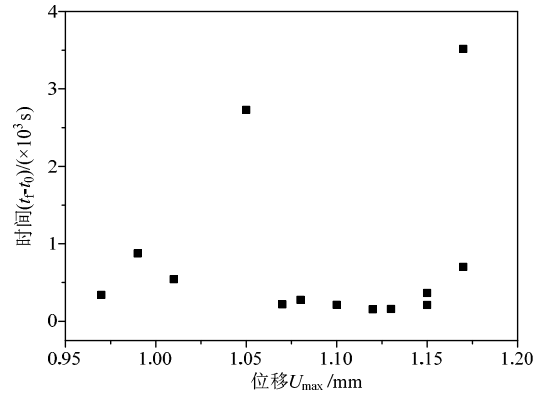


图5 加载位移水平与 $t_f-t_0$ 关系图

Fig.5  $t_f-t_0$  versus loading displacement

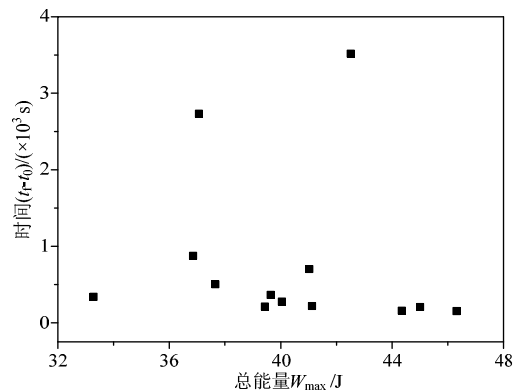


图6 最大总能量与 $t_f-t_0$ 关系图

Fig.6  $t_f-t_0$  versus different maximum total energy

### 2.3 能量分析

图7和图8分别表示在保持实验机作动器位移 $U$ 恒定后，系统储存总能量 $W$ 、混凝土试样储存能量 $E$ 的时程曲线。其中总能量 $W$ 包含了实验机加载架存储能量和混凝土存储能量总和。两个能量的计算方式为：

$$W = \frac{1}{2} F \cdot U \tag{1}$$

$$E = \frac{1}{2} F \cdot U_c \tag{2}$$

式中， $F$ 是轴向力。

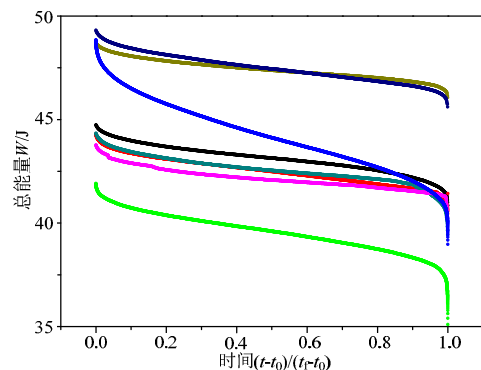


图7 系统储存总能量时程曲线

Fig.7 Curve of the total energy versus time

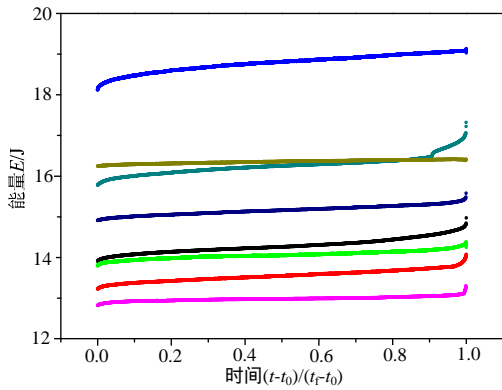


图 8 混凝土试样能量曲线

Fig.8 Curve of the concrete specimens energy versus time

从图 7 和图 8 可以看出，混凝土试样储存的能量  $E$  随时间单调增加，但是，整个系统储存的总能量  $W$  随时间在不断衰减。这说明，总能量  $W$  中还有一部分以别的形式释放了，其释放的主要途径即为混凝土的损伤发展，这也是混凝土试样在该耦合过程中发生宏观破坏的原因。

#### 2.4 能量释放率的临界幂律行为

为了考察能量释放率随时间的演化特征，图 9 给出了系统总能量释放率  $dW/dt$  的时程演化曲线。可以看出，能量释放率同样展现出了三个典型阶段，即初始呈减速的能量快速释放阶段、能量释放率近似为 0 的稳定阶段及后期能量的加速释放阶段。

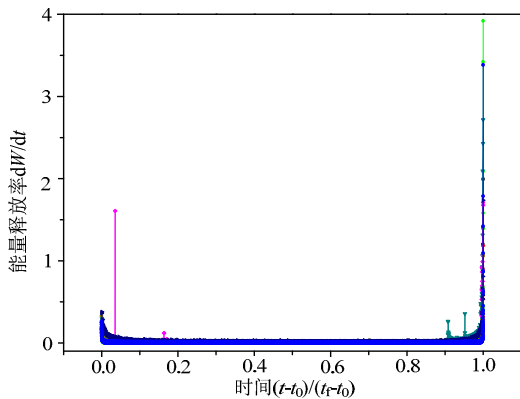


图 9 系统总能量释放率

Fig.9 Release rate of total system energy

所有试验试样表明，最后的能量加速释放呈现出幂律行为。图 10 给出了 8 个试样能量释放率与时间的双对数图。图中虚线斜率为  $-2/3$ ，以便进行比照和显示其临界幂指数。可以看出，虽然每个试样的破坏时间和演化曲线会呈现出样本个性，但是所有试样在破坏前，其能量释放率会呈现出幂指数近似为  $-2/3$  的临界幂律行为的共性特征，并可以统一表示为：

$$\frac{dW}{dt} \propto (t_f - t)^{-2/3} \quad (3)$$

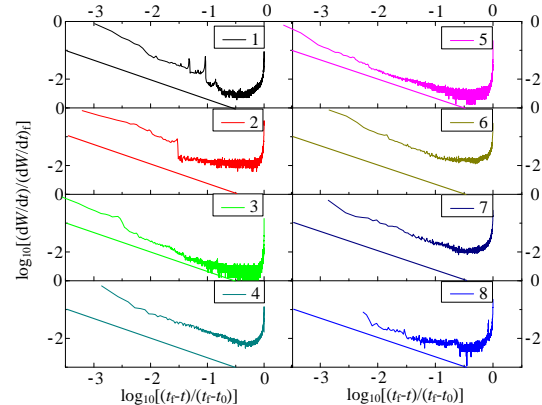


图 10 试验系统能量释放率双对数曲线

Fig.10 Log-log curves of energy release rate versus time

### 3 结论

(1) 在实验室，实现了混凝土的蠕变与应力松弛耦合破坏。该耦合破坏过程呈现出了与蠕变类似的一些特征。但是，也展现出了明显区别于蠕变或应力松弛单一过程的特性，尤其是破坏时间并没有表现出与加载水平的直接关联，其中的机理还有待进一步研究。

(2) 混凝土蠕变与应力松弛耦合破坏过程可以分为三个典型阶段，即初始快速发展阶段、稳定阶段和最后的加速发展阶段。初始的快速阶段应力和变形均快速演化，但速率不断减小，随后很快进入稳定阶段；在稳定阶段中，能量释放率近似为一个常数；最后快速发展阶段，为非稳定阶段，并诱发最终宏观破坏。

(3) 在蠕变与应力松弛耦合过程中，混凝土试样储存能量随时间单调增加，而整体总能量随时间单调减少，其中的一部分能量由于混凝土试样的损伤而释放。

(4) 虽然，试样破坏时间和演化曲线呈现出样本个性行为，但是所有试验总能量释放率在破坏前呈现出  $-2/3$  阶临界幂律行为的共性特征。

#### 参考文献：

[1] Suter M, Benipal G S. Time-dependent behaviour of reacting concrete I: Mechanism and theory [J]. Mechanics of Time-Dependent Materials, 2006, 10(1): 51-62.  
 [2] Suter M, Benipal G S. Time-dependent behaviour of reacting concrete II: Applications and discussion [J]. Mechanics of Time-Dependent Materials, 2006, 10(1):

- 63 81.
- [3] Ranaivomanana N, Multon S, Turatsinze A. Basic creep of concrete under compression, tension and bending [J]. *Construction & Building Materials*, 2013, 38(1): 173 180.
- [4] 赵祖武. 关于非线性蠕变问题[J]. *力学学报*, 1959, 3(4): 325 334.  
Zhao Zuwu. Questions about nonlinear creep [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 1959, 3(4): 325 334. (in Chinese)
- [5] Østergaard L, Lange D A, Altoubat S A, et al. Tensile basic creep of early-age concrete under constant load [J]. *Cement & Concrete Research*, 2001, 31(1): 1895 1899.
- [6] Barpi F, Valente S, Barpi F. Lifetime evaluation of concrete structures under sustained post-peak loading [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2005, 72(16): 2427 2443.
- [7] Altoubat S A, Lange D A. Creep, shrinkage and cracking of restrained concrete at early age [J]. *Aci Materials Journal*, 2001, 98(4): 323 331.
- [8] Ranaivomanana N, Multon S, Turatsinze A. Tensile, compressive and flexural basic creep of concrete at different stress levels [J]. *Cement & Concrete Research*, 2013, 52(10): 1 10.
- [9] Ichinose L H, Watanabe E, Nakai H. An experimental study on creep of concrete filled steel pipes [J]. *Journal of Constructional Steel Research*, 2001, 57(4): 453 466.
- [10] Maia L, Figueiras J. Early-age creep deformation of a high strength self-compacting concrete [J]. *Construction & Building Materials*, 2012, 34(5): 602 610.
- [11] Rossi P, Charron J P, Bastien-Masse M, et al. Tensile basic creep versus compressive basic creep at early ages; Comparison between normal strength concrete and a very high strength fibre reinforced concrete [J]. *Materials & Structures*, 2014, 47(10): 1773 1785.
- [12] Hilaire A, Benboudjema F, Darquennes A, et al. Modeling basic creep in concrete at early-age under compressive and tensile loading [J]. *Nuclear Engineering & Design*, 2014, 269(4): 222 230.
- [13] Neville A M. Recovery of creep and observations on the mechanism of creep of concrete [J]. *Applied Scientific Research*, 1960, 9(1): 71 84.
- [14] Coutinho A S. A contribution to the mechanism of concrete creep [J]. *Materials & Structures*, 1977, 10(10): 3 16.
- [15] 卓旬, 梅明荣. 混凝土徐变计算理论和方法综述[J]. *水利与建筑工程学报*, 2012, 10(2): 14 19.  
Zhuo Xun, Mei Mingrong. Review of theory and calculation method of concrete creep [J]. *Journal of Water Resources and Architectural Engineering*, 2012, 10(2): 14 19. (in Chinese)
- [16] Khristova Y, Aniskevich K. Prediction of creep of polymer concrete [J]. *Mechanics of Composite Materials*, 1995, 31(3): 216 219.
- [17] Forth J P. Predicting the tensile creep of concrete [J]. *Cement & Concrete Composites*, 2015, 55: 70 80.
- [18] 杨海天, 邬瑞锋, 佟晓利. 蠕变损伤问题的有效模量法及差分解[J]. *固体力学学报*, 1995, 16(3): 264 268.  
Yang Haitian, Wu Ruifeng, Tong Xiaoli. Effective modulus methods in creep damage problem and difference solution [J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1995, 16(3): 264 268. (in Chinese)
- [19] Bažant Z P, Baweja S, Bažant Z P, et al. Creep and shrinkage prediction model for analysis and design of concrete structures: model B3 [J]. *Materials & Structures*, 1995, 28(6): 357 365.
- [20] Bazant Z P. Prediction of concrete creep and shrinkage: past, present and future [J]. *Nuclear Engineering & Design*, 2001, 203(1): 27 38.
- [21] 209 ACI. Prediction of creep, shrinkage, and temperature effects in concrete structures [M]. *Aci Special Publication*, 1992: 209R-12.
- [22] 丁文胜, 吕志涛, 孟少平, 刘钊. 混凝土收缩徐变预测模型的分析比较[J]. *桥梁建设*, 2004, 34(6): 13 16.  
Ding Wensheng, Lü Zhitao, Meng Shaoping, Liu Zhao. Analysis and comparison of Analysis and comparison of forecasting model of concrete shrinkage and creep model of concrete shrinkage and creep [J]. *Bridge Construction*, 2004, 34(6): 13 16. (in Chinese)
- [23] Carpinteri A, Valente S, Zhou F P, et al. Tensile and flexural creep rupture tests on partially-damaged concrete specimens [J]. *Materials & Structures*, 1997, 30(5): 269 276.
- [24] 黄国兴, 惠荣炎, 易若冰. 大体积混凝土的应力松弛[J]. *水利学报*, 1989, 20(1): 61 65.  
Huang Guoxing, Hui Rongyan, Yi Ruobing. Stress relaxation of massive concrete [J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1989, 20(1): 61 65. (in Chinese)
- [25] 朱伯芳. 混凝土的弹性模量、徐变度与应力松弛系数[J]. *水利学报*, 1985, 16(9): 54 61.  
Zhu Bofang. Elastic modulus, creep degree and stress relaxation coefficient of concrete [J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1985, 16(9): 54 61. (in Chinese)
- [26] Pane I, Hansen W. Early age creep and stress relaxation of concrete containing blended cements [J]. *Materials & Structures*, 2002, 35(2): 92 96.
- [27] Kuo W Y, Huang J S, Yu B Y. Evaluation of strengthening through stress relaxation testing of organo-modified montmorillonite reinforced cement mortars [J]. *Construction & Building Materials*, 2011, 25(6): 2771 2776.
- [28] Bhattacharjee S, Swamy A K, Daniel J S. Continuous relaxation and retardation spectrum method for viscoelastic characterization of asphalt concrete [J].

- Mechanics of Time-Dependent Materials, 2011, 16(3): 287 305.
- [29] Sanchez-Galvez V, Elices M, Erdelyi A, et al. Stress relaxation due to steam curing [J]. *Matériaux Et Constructions*, 1977, 10(10): 351 356.
- [30] Krishnan J M, Rajagopal K R. Triaxial testing and stress relaxation of asphalt concrete [J]. *Mechanics of Materials*, 2004, 36(9): 849 864.
- [31] Gao Yuan, Zhang Jun, Han Po. Determination of stress relaxation parameters of concrete in tension at early-age by ring test [J]. *Construction and Building Materials*, 2013, 41: 152 164.
- [32] Beushausen H, Masuku C, Moyo P. Relaxation characteristics of cement mortar subjected to tensile strain [J]. *Materials & Structures*, 2012, 45(8): 1181 1188.
- [33] Hao Shengwang, Zhang Baoju, Tian Jifeng. Relaxation creep rupture of heterogeneous material under constant strain [J]. *Physical Review E*, 2012, 85(1): 1 5.
- [34] Trost H. Stress relaxation of concrete structures and relaxation tests of very old concrete [M]. *Fundamental Research on Creep and Shrinkage of Concrete*, 1982: 171 178.
- [35] Byard B E, Schindler A K. Modeling early-age stress development of restrained concrete [J]. *Materials & Structures*, 2013, 48(1/2): 435 450.
- [36] Kogan E A. Stress relaxation in concrete of massive hydraulic structures [J]. *Hydrotechnical Construction*, 1980, 14(9): 916 920.
- [37] Brooks J J, Nevilie A M, 周履. 混凝土中的应力松弛及其与徐变的关系[J]. *国外桥梁*, 1978, 2: 54 60. Brooks J J, Nevilie A M, Zhou Lü. Relationship between concrete creep and the stress relaxation [J]. *Journal of American Concrete Institute*, 1978, 2: 54 60. (in Chinese)
- [38] Klug P, Wittmann F. The correlation between creep deformation and stress relaxation in concrete [J]. *Matériaux Et Construction*, 1970, 3(2): 75 80.

(上接第 38 页)

- [5] Brown C L. The treatment of discontinuities in beam deflection problems [J]. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1944, 1(4): 349 351.
- [6] 林金木. 梁及刚架变形的一种新解法[J]. *土木工程学报*, 1982, 15(3): 72 78. Lin Jinmu. A new method for determining the deflection of beams and rigid frames [J]. *China Civil Engineering Journal*, 1982, 15(3): 72 78. (in Chinese)
- [7] Ren Yongjian, Elishakoff I. Flexibility-based finite element analysis for structures with random material properties [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1998, 65(4): 908 913.
- [8] 李学军, 朱萍玉, 刘义伦. 复杂荷载下变刚度静不定梁程序化求解[J]. *工程力学*, 2003, 20(4): 116 121. Li Xuejun, Zhu Pingyu, Liu Yilun. Computerised solution of statically indeterminate beam with varying flexural rigidity under complex load [J]. *Engineering Mechanics*, 2003, 20(4): 116 121. (in Chinese)
- [9] 吴艳艳, 李银山, 魏剑伟, 李彤. 求解超静定梁的分段独立一体化积分法 [J]. *工程力学*, 2013, 30(增刊): 11 14. Wu Yanyan, Li Yinshan, Wei Jianwei, Li Tong. A subsection independently systematic integral method for solving problems of statically indeterminate beam [J]. *Engineering Mechanics*, 2013, 30(Suppl): 11 14. (in Chinese)
- [10] 李银山, 李彤, 郭晓欢, 李欣业. 索-梁耦合超静定结构的一种快速解析法[J]. *工程力学*, 2014, 31(增刊): 11 16. Li Yinshan, Li Tong, Guo Xiaohuan, Li Xinye. A fast analytical method for statically indeterminate problems of cable-beam coupled structures [J]. *Engineering Mechanics*, 2014, 31(Suppl): 11 16. (in Chinese)
- [11] 李银山, 官云龙, 李彤, 李欣业. 求解变截面梁变形的快速解析法[J]. *工程力学*, 2015, 32(增刊): 116 121. Li Yinshan, Guan Yunlong, Li Tong, Li Xinye. A fast analytical method for the deformation of variable cross-section beams [J]. *Engineering Mechanics*, 2015, 32(Suppl): 116 121. (in Chinese)