

四边简支载流矩形薄板在磁场中的随机分岔*

STOCHASTIC BIFURCATION OF A CURRENT CARRYING THIN RECTANGULAR PLATE IN A MAGNETIC FIELD

王平**¹ 魏星² 王知人***^{1,3}

(1. 燕山大学 建筑工程与力学学院 秦皇岛 066004)

(2. 燕山大学 理学院, 秦皇岛 066004)

(3. 中国科学院力学研究所 国家非线性力学重点实验室 (LNM), 北京 100080)

WANG Ping¹ WEI Xing² WANG ZhiRen^{1,3}

(1. College of Civil Engineering and Mechanics, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

(2. College of Sciences, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

(3. State key laboratory of nonlinear mechanics, Institute of mechanics (LNM), Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

摘要 根据板壳力学与磁弹性力学理论,建立了在横向磁场与机械载荷共同作用下的四边简支载流矩形薄板的非线性随机振动模型.利用 Galerkin 变分法将其化简为非线性微分动力学方程.其次使用拟不可积 Hamilton 系统的随机平均理论将方程等价为一个一维的 Itô 随机微分方程,并通过计算该系统的最大 Lyapunov 指数来判断该系统的局部稳定性.同时利用奇异边界理论判断其系统的全局稳定性.最后通过稳态概率密度函数的变化研究了系统参数对发生的随机 Hopf 分岔的影响.并采用数值模拟对理论分析进行了验证.

关键词 矩形薄板 磁弹性 随机稳定性 随机 Hopf 分岔

中图分类号 O332

Abstract A nonlinear random vibration model of a current carrying thin rectangular plate simply supported at each edge was established when the plate was applied mechanical load in a magnetic field. The model was proposed based on the theories of plates and shells and the magnetic elastic mechanics. It was simplified as a nonlinear dynamics differential equation by using Galerkin variation method. Then the equation was equivalent to be a one-dimensional Itô stochastic differential equation by applying the stochastic average theory of a quasi non-integrable Hamilton system. The local stochastic stability of the system was judged using the maximum Lyapunov index. Its global stability of the system was also judged using the singular boundary theory. Finally the influences of the system parameters on the stochastic Hopf bifurcation were researched through the steady probability density function. The numerical simulation results were shown in the paper.

Key words Thin rectangular plate; Magneto-elasticity; Stochastic stability; Stochastic Hopf bifurcation

Corresponding author: WANG ZhiRen, E-mail: wangzhiren528@sina.com, Tel: /Fax: +86-335-8057027

The project supported by the National Natural Science Foundation of China(51174175) and the Natural Science Foundation of Hebei Province (No. A2012203140).

Manuscript received 20150309 in revised form 20150831.

引言

随着非线性动力学的发展,板壳中蕴含的一些复杂的动力学行为逐渐为人们所认识和了解.近年来,薄板非线性系统的随机分岔问题受到了人们的极大关注,也取得了一些有意义的成果.例如, Krzysztof

Marynowski^[1]应用粘弹性理论研究了轴向运动两对边简支两对边自由板的动力响应问题. Liu Z H 和 Zhu W Q^[2]研究了多时间弛豫哈密顿系统在宽带噪声激励下的反馈控制中随机 Hopf 分岔问题.刘先斌等^[3]研究了机械场中的非线性系统的随机分岔,并讨论了非线性随机系统的稳定性问题.田海勇等^[4]对随机干

* 20150309 收到初稿, 20150831 收到修改稿. 国家自然科学基金 (51174175), 河北省自然科学基金 (A2012203140) 资助项目资助。

** 王平, 男, 1965年1月生, 吉林省四平人, 汉族, 燕山大学工学博士, 研究方向为磁弹性理论及其应用。

*** 王知人, 女, 1964年5月生, 湖北省黄石市人, 汉族. 燕山大学教授, 博士, 研究方向为磁弹性理论及应用。

扰下碰撞振动系统的动力学性能进行了分析;张伟等^[5-6]研究了四边简支矩形薄板在参数激励和外激励共同作用下薄板的全局动力学特性;葛根等^[7-8]研究了矩形薄板在面内随机参数激励下的随机稳定性与分岔;杨志安等^[9-10]分析了非线性弹性地基上矩形薄板的振动与奇异性;李世其等^[11]对两参数冲击载荷面内压缩作用下初曲矩形薄板的非线性动力屈曲问题进行了理论研究;郝颖等^[12]研究了三稳态 Van der Pol-Duffing 振子的随机 P 分岔,该方法也可用于其它系统的随机 P 分岔分析;朱位秋^[13-15]研究了强非线性振子在随机宽带激励下的响应和稳定性问题,提出了一种新的研究拟不可积 Hamilton 系统随机 Hopf 分岔的方法。近年来,朱位秋等^[16]又总结了近十几年来拟哈密顿系统非线性随机最优控制的理论方法及其应用的研究成果。对于薄板的磁弹性随机振动,王平等^[17]研究了四边固支矩形薄板通入非平稳随机电流的磁弹性随机振动,并讨论了磁场强度及洛伦兹力耦合项对非平稳随机电流下的随机位移响应的影响。

综上所述,目前对于载流薄板在机械场与电磁场耦合作用下的随机分岔问题的研究尚未见到相关文献。本文首先建立了四边简支矩形薄板在机械场和电磁场耦合作用下的磁弹性非线性随机振动方程,并利用拟不可积 Hamilton 系统随机平均法将振动系统表示为一维的 Itô 扩散过程。然后通过分析参数的变化对薄板振动时的稳定性进行了研究,得到了系统所含参数对系统的随机局部、全局稳定性及分岔的影响。

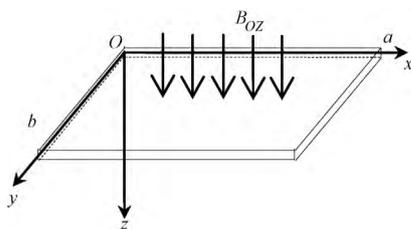


图 1 矩形薄板振动模型及坐标

Fig. 1 The model of a rectangular thin plate and the coordinate system

1 载流薄板的磁弹性随机振动方程的建立

如图所示,建立笛卡尔坐标系 xyz , 其中 x, y 位于中面内, z 为法向坐标。薄板的长为 a , 宽为 b , 厚度为 h , 设 u, v, w 分别为 x, y, z 方向的位移。薄板处于横向磁场 ($0, 0, B_{0z}$) 中, B_{0z} 为垂直于薄板中面的磁感应强度。通侧向电流 ($0, J_{cy}, 0$) J_{cy} 为从 y 方向通入的侧向电流。在 $x = 0$ 处受面内随机激励 $P_x = P_0 - P_1 \zeta(t)$, 其中, P_0 为均布载荷, $\zeta(t)$ 为 0 均值, 强度为 2D 的高斯白噪声, P_1 为噪声的幅值。不考虑感应电场, 在横

向磁场作用下, 考虑机械场与磁场的相互耦合作用, 将洛伦兹力作为载荷加到板的运动方程中, 并考虑洛伦兹力矩, 可得到载流薄板的非线性磁弹性动力方程^[18]

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + P_x + \rho f_x = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + P_y + \rho f_y = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P_z + \rho f_z = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} - Q_x + m_x = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x} \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} - Q_y + m_y = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial y} \end{cases} \quad (1)$$

式中, N_x, N_y, N_{xy} 为板单元单位长度上的内力, M_x, M_y, M_{xy} 为板单元单位长度上的内力矩, P_x, P_y, P_z 为外加机械载荷, Q_x, Q_y 为板单元单位长度上的剪力, $\rho f_x, \rho f_y, \rho f_z$ 为洛伦兹力, m_x, m_y 为电磁力矩, ρ 为材料密度, t 为时间变量。

$$\begin{cases} M_x = D_M(\chi_x + \nu\chi_y) \\ M_y = D_M(\chi_y + \nu\chi_x) \\ M_{xy} = D_M(1 - \nu)\chi_{xy} \\ \chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ D_M = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \end{cases} \quad (2)$$

其中, ν 为泊松比

将式(2)代入式(1)式整理可得

$$\begin{aligned} & -D_M \nabla^4 w + (\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - P_x - \rho f_x) \frac{\partial w}{\partial x} + \\ & (\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - P_y - \rho f_y) \frac{\partial w}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ & N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} - \\ & \frac{\rho h^3}{12} (\frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial y^2}) + \\ & P_z + \rho f_z - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

由电流条件 ($0, J_{cy}, 0$) 和磁场条件 ($0, 0, B_{0z}$) 可得洛伦兹力

$$\rho f_x = J_{cy} h B_{0z}; \rho f_y = \rho f_z = 0$$

洛伦兹力矩为

$$\begin{cases} m_x = \frac{\sigma h^3}{12} B_{0z}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \\ m_y = \frac{\sigma h^3}{12} B_{0z}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial y} \end{cases} \quad (4)$$

其中, σ 为电导率;

$$N_x = \int_a^x \rho f_x dx + P_x = -\rho f_x(a-x) + P_x = -J_{cly} h B_{0z}(a-x) + P_x; N_y = D_N(\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x);$$

$$N_{xy} = \frac{D_N}{2}(1-\nu)\Omega; \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2;$$

$$D_N = \frac{Eh}{1-\nu^2} \text{ 为抗拉刚度; } \Omega = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}.$$

由于 $u \ll w, v \ll w$, 忽略位移 u, v 引起的惯性力及惯性转动项, 方程 (3) 最终可化简为

$$D_M \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\sigma h^3}{12} B_{0z}^2 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial y^2} \right) + (P_x - J_{cly} h B_{0z}) \frac{\partial w}{\partial x} + J_{cly} h B_{0z}(a-x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - [P_0 - P_1 \zeta(t)] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2} D_N \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - D_N(1-\nu) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (5)$$

四边简支矩形薄板的边界条件为

$$x = 0, a: w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; y = 0, b: w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

$$w = f(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

代入式 (5) 中可得

设满足边界条件的板的一阶模态为

$$\begin{aligned} & [\rho h \ddot{f}(t) + \frac{\sigma h^3}{12} B_{0z}^2 \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right) \dot{f}(t) + D_M \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2 f(t)] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \frac{D_N}{2} \\ & \left[\frac{\pi^4}{b^4} \sin^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{b} + \nu \frac{\pi^4}{a^2 b^2} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} - 2(1-\nu) \frac{\pi^4}{a^2 b^2} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{b} \right] \\ & \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} f^3(t) - \left\{ \frac{\pi}{a} (J_{cly} h B_{0z} - P_x) \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \frac{\pi^2}{a^2} J_{cly} h B_{0z} (a-x) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - \right. \\ & \left. \frac{\pi^2}{a^2} [P_0 - P_1 \zeta(t)] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \right\} f(t) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

根据 Galerkin 变分法, 可求得薄板的常微分形式的模态方程为

$$\ddot{f}(t) + \mu \dot{f}(t) + K f(t) + \alpha f^3(t) - \beta f(t) \zeta(t) = 0 \quad (7)$$

其中, $\mu = \frac{\sigma h^3}{12} B_{0z}^2 \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right); K = \frac{D_M}{\rho h} \left(\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} \right)^2 -$

$$\frac{\pi^2}{2a\rho h} J_{cly} h B_{0z} + \frac{\pi^2}{a^2 \rho h} P_0$$

$$\alpha = \frac{D_N}{2\rho h} \left[\frac{3\pi^4}{16b^4} + \nu \frac{3\pi^4}{16a^2 b^2} - (1-\nu) \frac{\pi^4}{8a^2 b^2} \right]; \beta =$$

$$\frac{\pi^2}{a^2 \rho h} P_1$$

令 $q = f, p = \dot{f}$ 可把式 (7) 写成一维常微分方程组的形式

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\mu p - Kq - \alpha q^3 + \beta q \zeta(t) \end{cases} \quad (8)$$

为研究系统 (8) 的能量变化, 并忽略高阶小量的影响, 可设系统的 Hamilton 函数为

$$H(p, q) = \frac{1}{2}(p^2 + Kq^2) \quad (9)$$

由拟不可积 Hamilton 系统的定义及性质可知系统 (8) 依概率收敛到一维 Itô 扩散过程

$$dH = m(H) dt + \sigma(H) dB(t) \quad (10)$$

其中, $B(t)$ 是标准 Weiner 过程, $m(H)$ 和 $\sigma(H)$ 分别是 Itô 随机过程的漂移系数和扩散系数, 使用拟不可积 Hamilton 系统的随即平均法, 得到

$$m(H) = \frac{1}{T(H)} \int_{\Delta} [-\mu p - \alpha q^3 + \frac{1}{2}(2D\beta^2 q^2/p)] dq = \left(\frac{D\beta^2}{K} - \mu \right) H - \frac{2\alpha}{\pi K^{3/2}} H^2 \quad (11)$$

$$\sigma^2(H) = \frac{1}{T(H)} \int_{\Delta} (2D\beta^2 q^2 p) dq = \frac{D\beta^2}{K} H^2 \quad (12)$$

其中, Δ 为积分区域范围, 满足 $\Delta = \{q | H(q, 0) \leq H\}$

$$T(H) = \int_{\Delta} \frac{1}{P} dq = \frac{\pi}{2\sqrt{K}} \quad (13)$$

2 随机稳定性研究

2.1 局部稳定性

研究系统的稳定性最常用的方法就是计算系统的最大 Lyapunov 指数。最大的 Lyapunov 指数定义为

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|X(t, x_0)\|$$

由 Oseledec 乘性遍历定理知: 系统 (10) 的平凡解以概率 1 渐近稳定的充要条件是系统的最大 Lyapunov 指数 $\lambda < 0$, 显然方程 (10) 只有一个平凡解 (0, 0) 将式 (10) 在 $H = 0$ 处线性化, 得到线性化的 Itô 微分方程

$$dH = m'(0) H dt + \sigma'(0) H dB(t) \quad (14)$$

解得

$$H(t) = H(0) \exp \left\{ \int_0^t [m'(0) - \frac{1}{2} (\sigma'(0))^2] ds + \int_0^t \sigma'(0) dB(s) \right\} \quad (15)$$

于是可得系统的最大 Lyapunov 指数为

$$\lambda = \frac{m'(0) - [\sigma'(0)]^2/2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{D\beta^2}{2K} - \mu \right) \quad (16)$$

当 $\lambda < 0$ $K > \frac{D\beta^2}{2\mu}$ 时, 该线性 Itô 随机微分方程的平凡解以概率 1 渐近稳定, 此时系统的振动能量会稳定在一个固定值; 当 $\lambda > 0$ 时, 该线性 Itô 随机微分方程的平凡解以概率 1 不稳定, 也就是说薄板振动的能量在随机扰动下会出现失稳; 当 $\lambda = 0$ 时, 该系统将出现随机分岔现象。

2.2 全局稳定性

基于 Oseledec 乘性遍历定理的最大 Lyapunov 指数只能用于判定系统的局部稳定性, 它无法判定全局稳定性, 在这里我们采用奇异边界理论来判定系统的全局稳定性。

一维扩散过程的概率渐近稳定性由该过程在奇异边界上的性态确定, 因此, 下面主要分析扩散过程的两个奇异边界性态, 左边界 $H \rightarrow 0$ 和右边界 $H \rightarrow \infty$ 。

当 $H \rightarrow 0$ 时, 使 $\sigma^2(H) = 0$ $m(H) = 0$ 属于第一类奇异边界, $H \rightarrow 0$ 为套点, 有

$$m(H) = \left(\frac{D\beta^2}{K} - \mu \right) H + O(H)$$

$$\sigma^2(H) = \frac{D\beta^2}{K} H^2 + O(H^2)$$

得到左边界的漂移指数、扩散指数、特征标值分别为

$$\alpha_l = 2, \beta_l = 1, c_l = 2 \left(1 - \frac{\mu K}{D\beta^2} \right) \quad (17)$$

右边界 $H \rightarrow \infty$ 时, $m(H)$ 无界, 故为第二类无穷远处奇异边界, 有

$$m(H) = -\frac{2\alpha}{\pi K^{3/2}} H^2 + O(H^2)$$

$$\sigma^2(H) = \frac{D\beta^2}{K} H^2 + O(H^2)$$

可得到右边界的漂移指数、扩散指数、特征标值分别为

$$\alpha_r = 2, \beta_r = 2, c_r = -\frac{4\alpha}{D\beta^2 \pi K^{1/2}} \quad (18)$$

当 $c_l = 2 \left(1 - \frac{\mu K}{D\beta^2} \right) > 1$ 时, 左边界 $H \rightarrow 0$ 是排斥

自然边界, 当 $c_l = 2 \left(1 - \frac{\mu K}{D\beta^2} \right) < 1$ 时, 左边界是吸引自然边界; 右边界 $H \rightarrow \infty$ 是进入边界如图 2。

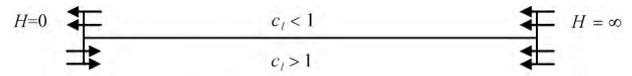


图 2 特征标值变化对系统全局稳定性的影响示意图
Fig. 2 The global stability conditions with the changing of the character value

当系统全局稳定时, $c_l = 2 \left(1 - \frac{\mu K}{D\beta^2} \right) < 1$ 即满足

$K > \frac{D\beta^2}{2\mu}$, 可知系统 (11) 全局稳定条件和局部稳定条件一致; 相反 $c_l > 1$ 时, 系统具体的稳态位置需要求解系统的 FPK 方程。

3 系统的随机分岔

当特征标值 $c_l > 1$ 时, 系统在某能量值处会出现最大的概率密度, 对应的物理意义为系统在受随机参数激励时最有可能的能量大小, 当参数变化时, 系统能量的最大概率密度可能出现 Hopf 分岔, 对应的是系统出现极限环, 振荡变激烈, 可能导致破坏。因此有必要通过研究系统的 FPK 方程来得到出现 Hopf 分岔的条件。

系统 (10) 对应的 FPK 方程为

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial H} [m(H)f] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [\sigma^2(H)f]}{\partial H^2} \quad (19)$$

其中, f 为稳态概率密度函数。

求解方程 (19) 得到稳态概率密度

$$f = A \exp \left(- \int_0^H \left\{ \left[\frac{d\sigma^2(t)}{dt} - 2m(t) \right] / \sigma^2(t) \right\} dt \right) \quad (20)$$

其中 A 为归一化常数。

把式 (11)、式 (12) 代入式 (20) 可得

$$f(H) = AH^\eta \exp(-\varepsilon H) \quad (21)$$

式中, $\eta = -\frac{2\mu K}{D\beta^2}$ $\varepsilon = \frac{4\alpha}{D\beta^2 K^{1/2} \pi}$

当 H 趋于零时, 有

$$m(H) = O(H^{\beta_l}), \beta_l = 1$$

$$\sigma^2(H) = O(H^{\alpha_l}), \alpha_l = 2$$

$$c_l = \lim_{H \rightarrow 0^+} \frac{2m(H) H^{\alpha_l - \beta_l}}{\sigma^2(H)}$$

当 H 趋于零时, 式(21) 可表示为

$$f(H) = O\left\{H^{-\alpha_l} \exp\left[c_l \int_0^H x^{(\beta_l - \alpha_l)} dx\right]\right\}$$

当 $\beta_l - \alpha_l = -1$ $H \rightarrow 0$ 时, $f(H) = O(H^0)$, 其中

$$\eta = c_l - \alpha_l = -\frac{2\mu K}{D\beta^2}$$

当 $\eta < -1$ 时, $f(H)$ 是一个 δ 函数; 当 $-1 < \eta < 0$ 时, $f(H)$ 是一个减函数且在原点处取得最大值; 当 $\eta > 0$ 时, $f(H)$ 在远离原点处有峰值。所以, 在 $\eta = -1$ 时发生随机 D-分岔, 在 $\eta = 0$ 时会发生随机 P-分岔, 这两次分岔构成了随机 Hopf 分岔。

下面讨论 P-分岔, 选择合适的参数得到稳态概率密度随参数的变化情况。本文选取对控制系统全局稳定性有重要意义的电流 J_{cly} 为分岔控制参数。假设薄板为铝质材料, 取

$E = 71 \times 10^9$ Pa, $\rho = 2.67 \times 10^3$ kg/m³, $h = 0.5$ mm, $\nu = 0.34$, $\sigma = 3.67 \times 10^7$ ($\Omega \times m$)⁻¹, $a = 1$ m, $b = 1.5$ m, $D = 0.4$ dB, $P_0 = 10$ N/m, $P_1 = 10$ N/m, $B = 100$ T

根据取值可知, 当 $J_{cly} < 943.928$ A 时, $\eta < -1$; 当 $943.928 A < J_{cly} < 1088.811$ A 时, $-1 < \eta < 0$; 当 $J_{cly} > 1088.811$ A 时 $\eta > 0$ 。

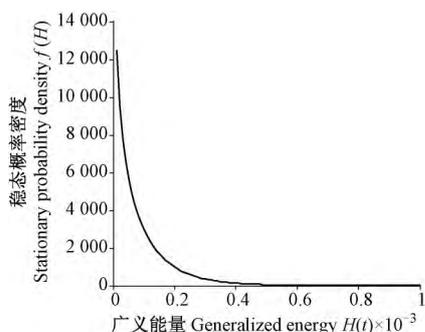


图 3 $J_{cly} = 1050$ A 时稳态概率密度图

Fig. 3 The stationary probability density with $J_{cly} = 1050$ A

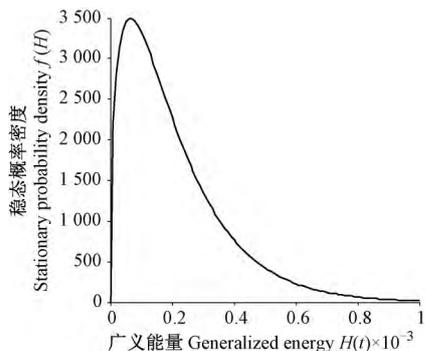


图 4 $J_{cly} = 1155$ A 时稳态概率密度图

Fig. 4 The stationary probability density with $J_{cly} = 1155$ A

从图中可知, 当电流增大时, 系统的稳态概率密度

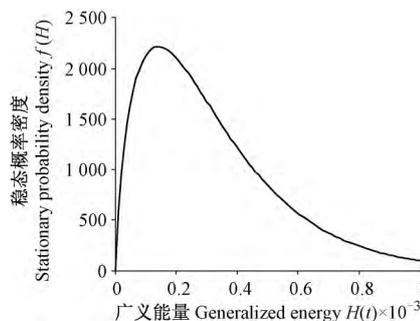


图 5 $J_{cly} = 1200$ A 时稳态概率密度图

Fig. 5 The stationary probability density with $J_{cly} = 1200$ A

函数的图形发生变化。稳态概率密度函数的峰值所对应的横坐标值对应系统发生分岔后系统的广义能量值, 而峰值的纵坐标对应系统处于该能量处的概率密度大小。尤其在电流取值在使 $\eta > 0$ 后, 根据图 4 和图 5 的比较可以看出系统发生分岔的能量不在 $H = 0$ 处, 而且随着电流的增大, η 变大, 系统发生分岔的概率最大所对应的能量值 H 也变大, 对应的峰值降低。

4 结 论

本文首先建立了四边简支载流矩形薄板在磁场中的随机振动模型, 然后利用拟不可积 Hamilton 系统随即平均法将表示系统能量的变化过程简化为一个一维扩散过程。最后利用奇异边界理论和随机分岔理论研究了系统的稳定性和分岔情况。得出如下结论:

- 1) 由系统的奇异边界理论得出, 当电流小于一个定值时, 左边界是吸引自然边界, 右边界是进入边界, 所以系统一定以概率 1 渐进稳定; 当通入的随机电流大于某一个定值时, 左边界排斥右边界进入, 系统将出现失稳情况。
- 2) 通过求解系统的稳态概率密度函数, 得出系统发生随机分岔的条件, 并通过数值模拟了系统发生随机 P-分岔的条件与现象, 利用所得结果可以调节分岔参数值使其远离分岔值进而降低发生分岔的概率, 降低板被破坏的可能性。

参考文献(References)

[1] Krzysztof Marynowski. Free vibration analysis of the axially moving Levy-type viscoelastic plate[J]. European Journal of Mechanics A/ Solids. 2010, 29: 879-886.

[2] Liu Z H, Zhu W Q. Stochastic Hopf bifurcation of quasi-integrable Hamiltonian systems with multi-time-delayed feedback control and wide-band noise excitations [J]. International Journal of Nonlinear Dynamics, 2012, 69: 935-947.

[3] 刘先斌, 陈 虬, 陈大鹏. 非线性随机动力系统的稳定性和分岔研究[J]. 力学进展, 1996, 26(4): 437-452.

LIU XianBin, CHEN Qiu, CHEN DaPeng. The researches on the stability and bifurcation of nonlinear stochastic dynamical systems

- [J]. *Advances in Mechanics*, 1996, 26 (4): 437-452 (In Chinese).
- [4] 田海勇,刘卫华,赵日旭. 随机干扰下碰撞振动系统的动力学分析[J]. *振动与冲击*, 2009, 28(9): 163-167.
TIAN HaiYong, LIU WeiHua, ZHAO RiXu. Dynamic analysis of a vibro-impact system with random disturbance [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2009, 28(9): 163-167(In Chinese).
- [5] Zhang W, Li Z M. Global dynamics of a parametrically and externally excited thin plate [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2001, 24: 245-268.
- [6] Zhang W. Global and Chaotic dynamics of a parametrically excited thin plate [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 239(5): 1013-1036.
- [7] 葛 根,王洪礼,徐 佳. 矩形薄板在面内随机参数激励下的随机稳定性与分岔研究[J]. *振动与冲击*, 2009, 28(9): 91-94.
GE Gen, WANG HongLi, XU Jia. Stochastic stability and bifurcation of thin rectangular plate subjected to in-plane stochastic parametrical excitation [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2009, 28(9): 91-94(In Chinese).
- [8] 葛 根,王洪礼,徐 佳. 矩形薄板在面内随机参数激励下的随机分岔研究[J]. *振动与冲击*, 2011, 30(9): 253-258.
GE Gen, WANG HongLi, XU Jia. Stochastic bifurcation of thin rectangular plate subjected to in-plane stochastic parametrical excitation [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2011, 30(9): 253-258(In Chinese).
- [9] 杨志安,赵雪娟,席晓燕. 非线性弹性地基上矩形薄板的非线性振动与奇异性[J]. *振动与冲击*, 2006, 25(5): 69-73.
YANG ZhiAn, ZHAO XueJuan, XI Yaoyan. Nonlinear vibration and singularities analysis of a thin rectangular plate on nonlinear elastic foundation [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2006, 25(5): 69-73(In Chinese).
- [10] 杨志安,赵雪娟. 非线性弹性地基上矩形薄板受双频参数激励作用的非线性振动[J]. *应用力学学报*, 2007, 24(3): 494-498.
YANG ZhiAn, ZHAO XueJuan. Nonlinear vibrations of double parametrically excited thin rectangular plate on the nonlinear elastic foundation [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2007, 24(3): 494-498(In Chinese).
- [11] 李世其. 初曲矩形薄板的非线性动力屈曲研究[J]. *应用力学学报*, 1997, 14(1): 47-53.
LI ShiQi. Nonlinear dynamic buckling of imperfect rectangular plates [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 1997, 14(1): 47-53 (In Chinese).
- [12] 郝 颖,吴志强. 三稳态 Vander Pol-Duffing 振子的随机 P 分岔[J]. *力学学报*, 2013, 45(2): 257-264.
HAO Ying, WU ZhiQiang. Stochastic P-Bifurcation of tri-stable vander Pol-Duffing oscillator [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2013, 45(2): 257-264(In Chinese).
- [13] Zhu W Q, Ying Z G. An optimal nonlinear stochastic control strategy for randomly excited structural systems [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2001 24: 31-51.
- [14] Zhu W Q, Huang Z L. Stochastic Hopf bifurcation of quasintegrable Hamilton systems [J]. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 1999, 34: 437-447.
- [15] 朱位秋. 非线性随机动力学与控制[M]. 北京: 科学出版社, 2003: 273-322.
Zhu WeiQiu. *Nonlinear stochastic dynamics and control* [M]. Beijing: Science Press, 2003: 273-322(In Chinese).
- [16] 朱位秋,应祖光. 拟哈密顿系统非线性随机最优控制[J]. *力学进展* 2013, 43(25): 39-50.
ZHU WeiQiu, YING ZuGuang. Advances in research on nonlinear stochastic optimal control of quasi-Hamiltonian systems [J]. *Advances in Mechanics*, 2013, 43(25): 39-50(In Chinese).
- [17] 王 平,徐 帅,王知人. 固支矩形薄板通入非平稳随机电流的磁弹性随机振动[J]. *机械强度* 2014, 36(5): 676-681.
WANG Ping, XU Shuai, WANG ZhiRen. Magneto-elastic random vibration of a fixed plate with non-stationary random current [J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2014, 36 (5): 676-681 (In Chinese).
- [18] 白象忠,田振国. 板壳磁弹性力学基础[M]. 北京: 科学出版社, 2006: 176.
BAI XiangZhong, TIAN ZhenGuo. *Fundamental magnetic-elasticity theory of plates and shells* [M]. Beijing: Science Press, 2006: 176 (In Chinese).