

716-721

# 孤立磁拱的约束平衡位形

张旭 胡文瑞

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

P182.7

## 摘要

本文讨论分层大气中孤立约束磁通量拱的二维静平衡位形。通量拱中的磁场初步假定为无力场, 通过利用有限元计算方法, 得到这个非线性自由边界问题的数值解。结果清楚地表明磁拱的内外场的耦合关系, 并讨论了大气压力分布, 尤其是大气标高对通量拱位形的影响。

关键词 太阳磁场, 磁(弧)拱, MHD, 有限元。

## 一、引言

近十几年来的观测发现, 太阳表面磁场位形基本表现为聚集强磁场的孤立磁通量结构。通过远紫外和 X 射线对上层大气的观测, 可以看到有许多纤维状和环状结构, 这些结构都与该处的强磁场有关, 磁弧、拱、磁环是色球和日冕活动区中磁场的基本结构形式<sup>[1,2]</sup>。太阳大气中发生的各种活动现象如太阳耀斑、爆发日珥、质量抛射等的能量释放, 磁场起着主导性的作用, 所以有必要对孤立磁结构的位形和演化进行研究。目前磁场的观测主要局限于光球, 色球和日冕的观测数据甚少, 色球和日冕磁场只能通过理论或数值的计算近似得到。

最简单的理论假设是势场近似, 即认为上层大气如日冕层中不存在电流。这时数学上作为确定有限边界条件的 Laplace 方程具有唯一解<sup>[3,4]</sup>。但观测表明, 日冕磁场位形相当复杂, 很难设想其中没有电流, 因此大多的理论还是采用无力场近似, 认为电流与磁场平行, 以满足洛仑磁力为零的要求。1978年 Seehafer<sup>[5]</sup> 采用 Green 函数方法来求无力因子  $\alpha$ , 1982年 Elwert<sup>[6]</sup> 从光球上的视场出发求日冕内磁场, Sakurai<sup>[7]</sup> 对非常数  $\alpha$  的无力场作了计算, 但这些模型都是用半无限空间连续磁场来作近似描述, 而实际的孤立磁结构要受到磁通量管外部压力分布的影响。Pizzo<sup>[8]</sup> 采用差分迭代的数值计算方法分析了一般磁通量管的性质和对位形的影响因素, 胡文瑞等<sup>[9,10]</sup> 用小参数展开对均匀圆弧拱和非均匀拱等模型作了近似分析。

本文讨论一般性的约束在太阳大气中的孤立磁通量拱。孤立磁拱内磁场相对较强, 可以采用无力场模型描述, 利用有限元数值计算方法, 研究了外部压力分布、无力因子  $\alpha$  以及拱的宽窄程度对磁结构的影响。

本文 1992 年 12 月 12 日收到, 1994 年 4 月 14 日收到修改稿。

## 二、问题的模型

我们研究如图 1 所示二维磁拱模型,  $z = 0$  对应于光球层, 磁通量在光球层由区域  $x_1 \leq x \leq x_2$  出, 由区域  $x_3 \leq x \leq x_4$  返回。

对于线性无力场模型的孤立磁拱, 其内部磁压起主导作用。磁场可表示为

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{B}) &= \alpha \mathbf{B}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

假设其中无力因子  $\alpha$  为常数。在二维模型引进磁面函数  $\psi$ , 取

$$B_z = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad B_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2)$$

代人(1), 对线性无力场可得

$$B_y = \alpha^* \psi \quad (3)$$

以及

$$L(\psi) \equiv \psi_{xx} + \psi_{zz} + \alpha^{*2} \psi = 0. \quad (4)$$

孤立磁通量模型认为磁拱外部大气中磁压相对较弱, 满足热力学压力梯度与重力相平衡:

$$\nabla P_e = \rho_e \mathbf{g},$$

其中  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ . 对一维问题则有

$$P_e = P_{e0} \exp \left[ - \int_{x_0}^x \frac{g dz}{RT_e} \right], \quad (5)$$

其中  $P_{e0} = P_e(x_0)$ ,  $R$  为气体常数,  $T_e$  为太阳大气温度。

在日冕中, 大气温度变化相对较小, 许多模型认为可采用等温假设<sup>[4]</sup>. 这时式(5)可简化为

$$P_e(x) = P_{e0} \exp \left( - \frac{z - z_0}{h} \right), \quad (6)$$

其中大气标高

$$h = RT_e / g. \quad (7)$$

在磁拱的边界面  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  上应满足总压守恒条件, 即

$$\left. \frac{B^2}{8\pi} \right|_{\Gamma_i} = P_e(x) \Big|_{\Gamma_i}, \quad (i = 1, 2) \quad (8)$$

这里总磁压  $B^2 = |\nabla \psi|^2 + \alpha^{*2} \psi^2$ . 这时物理问题可以用方程(4), (6), (8)来描述, 其中  $\Gamma_i$  为自由边界, 应由内外场的解匹配求出. 这种自由边值问题是求解这类孤立磁结构的关键所在。

引入无量纲量

$$X = \frac{x}{x_0}, \quad Z = \frac{z}{x_0}, \quad \Psi = \frac{\psi}{x_0 \sqrt{8\pi\rho_0}}, \quad (9)$$

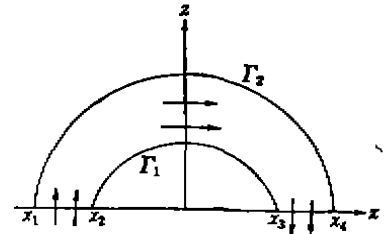


图 1 磁拱模型

$$\alpha = \alpha^* x_0, \quad H = \frac{h}{x_0}, \quad P = \frac{p}{p_0},$$

其中下标“0”代表问题的典型尺度。

将(9)代入(4)和(8),则问题的数学提法可以用下述方程表示:

$$\Psi_{xx} + \Psi_{zz} + \alpha^2 \Psi = 0, \quad (10)$$

$$[\Psi_x^2 + \Psi_z^2 + \alpha^2 \Psi^2] |_{\Gamma_i} = \exp(-Z/H) |_{\Gamma_i}, \quad (11)$$

$$\Psi(X, Z) |_{\Gamma_i} = \Psi_i \text{ (常数)}, \quad (i = 1, 2) \quad (12)$$

$$\Psi(X, 0) = \Psi_0(X), \quad X_1 \leq X \leq X_2 \quad (13)$$

边界条件(12)表明,磁拱边界  $\Gamma_i$  必须保持为磁面,式(13)为已知的光球边界条件,考察对称情形时,模型简化为  $X_1 = -X_1$  和  $X_2 = -X_2$ , 且

$$\frac{\partial \Psi}{\partial X} |_{x=0} = 0. \quad (14)$$

此外,磁通量守恒要求

$$\iint_{\Omega} \Psi(X, Z) ds = \int_{\Gamma} \Psi_0(X) dX.$$

这是一类非线性自由边界问题。

### 三、计算方法和边界条件

这里我们将取理论分析的近似位形<sup>④</sup>为初始位形,入口处边界条件考虑选择  $\alpha = 0$  的势场解,对于势场时的 Laplace 方程:

$$\Psi_{xx} + \Psi_{zz} = 0.$$

假定变量可分离,可以得到如下形式的解:

$$\Psi = [a \cos(cX) + b \sin(cX)](de^{eZ} + fe^{-eZ}),$$

其中  $a, b, c, d, f$  均为常数。

不失一般性,取  $b = 0, d = f = 1/2$ , 那么,在入口  $Z = 0$  处有

$$\Psi(0, X) = a \cos(cX), \quad B_x = 0, \quad B_z = -ca \sin(cX).$$

由于在入口两 endpoint  $X_1, X_2$  处须满足总压守恒(11)式

$$[\alpha^2 \Psi^2 + \Psi_x^2 + \Psi_z^2] |_{x_i} = e^{-Z/H} |_{z=0},$$

亦即

$$\alpha^2 a^2 \cos^2(cX_i) + c^2 a^2 \sin^2(cX_i) = 1.$$

这样,可以得到  $\alpha^2 = c^2 = a^{-2}$  的条件,在实际运算中,入口边界条件取为

$$\Psi(0, X) = c^{-1} \cos(cX), \quad B_x = 0, \quad B_z = -\sin(cX), \quad (15)$$

这时无力因子  $\alpha = c$ 。

此外,在出口处须满足对称边界条件(14),而两个磁拱边界保持为磁面如(12)式,因此,(15),(14),(12)式构成问题的边界条件。

通过上节所述,进行迭代运算求解方程(10),得到相应于初始位形的流场,从而可求出边界上的磁场强度,由(11)式可以得到磁拱内外两边界处的磁压  $P_s$ , 再与相应于这时

位形的拱外压力  $P_e$  相比较, 对边界形状进行调节, 并考虑到入口处与出口处的通量守恒, 可以确定满足上述流场和磁场的磁拱自由边界, 它将不同于初始位形。由这时算得的边界重复上述计算, 直到内部磁压与外部热力学压力基本达到平衡, 满足(11)式, 而相继两次边界的相对差值小于所要求的精度时, 最终得到自洽的自由边界位形和流场。

计算中将区域分为 80 个单元, 99 个网格点, 采用线性插值函数, 每次迭代都进行松弛调整。

#### 四、孤立磁拱的特征

对于太阳上层大气中的磁拱, 其位形受诸多因素的影响, 比如外场压力分布 (标高  $H$ ), 磁拱的宽窄程度, 光球场的边值分布, 无力因子等。我们下面讨论几个典型参数对磁拱位形的影响。

##### 1. 大气标高 $H$ 的影响

给定入口边界  $X_1 = -1.00$ ,  $X_2 = -0.85$ 。对于无力因子  $\alpha^2 = 1$ , 我们选取了  $H = 1.15, 1.25, 1.50$  三种情形。由图 2a—c 可以看到, 随着标高的减小, 拱将趋于上升、膨胀。事实上,  $H$  值的变化即为外部压力的变化, 当  $H$  减小时, 在同一高度处的外压也将减小, 从而减少约束, 使边界得以扩展。如果我们定义扩展比

$$D = \frac{(Z_{\max} - Z_{\min})|_{X=0}}{(X_1 - X_2)|_{Z=0}}$$

为出口拱宽与入口拱宽之比, 则与图 2a—c 相对应的扩展比分别为 2.03, 1.73, 1.46, 亦即标高越大, 磁拱扩展得越小, 或收缩得越大。这与观测事实相符<sup>[12]</sup>。

##### 2. 拱的宽窄程度 ( $|x_2 - x_1|$ ) 的影响

这里我们分别考虑了取入口端点  $X_1 = -1.00, -1.10, -1.20$  三种情况, 如图 2—4, 此时标高  $H = 1.25$ , 无力因子仍为  $\alpha^2 = 1$ 。这时对应的位形趋于下降且扁平, 扩展比分别为 1.73, 1.56 和 1.35。事实上, 由于  $\alpha$  不变, 当入口拱宽增大时, 流进来的磁通量得到增加, 从而使内部磁压加大, 相应的外压也要增加以平衡边界内压, 边界处的约束增

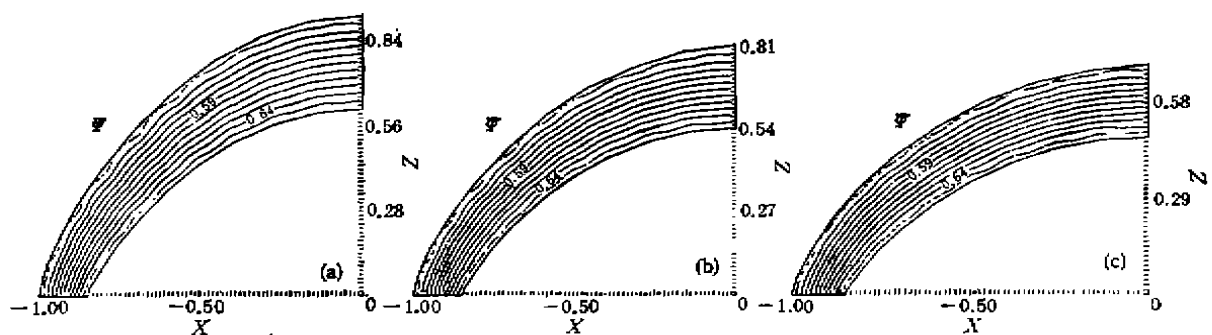


图 2 无力因子  $\alpha^2 = 1$  时的磁拱结构图  
(a)  $H = 1.15$ ; (b)  $H = 1.25$ ; (c)  $H = 1.50$ 。

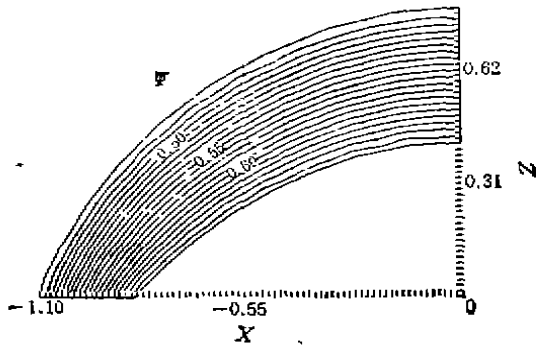


图3 在不同入口拱宽 ( $X_1 = -1.10$ ,  $X_2 = -0.85$ ) 下, 对应于无力因子  $\alpha^2 = 1$ , 标高  $H = 1.25$  的磁拱磁力线图

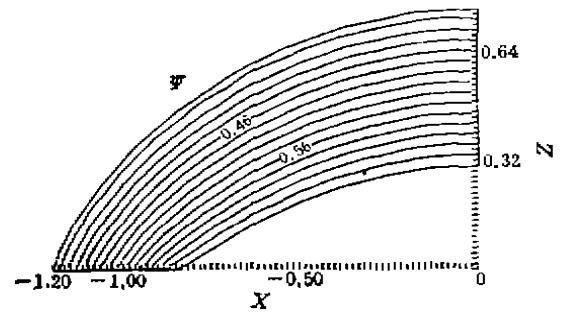


图4 在不同入口拱宽 ( $X_1 = -1.20$ ,  $X_2 = -0.85$ ) 下, 对应于无力因子  $\alpha^2 = 1$ , 标高  $H = 1.25$  的磁拱磁力线图

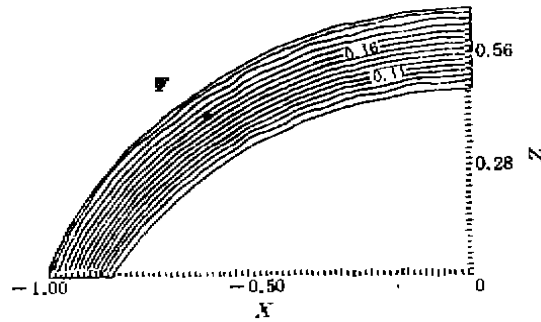


图5. 对应于无力因子  $\alpha^2 = 4$ , 标高  $H = 1.15$  的磁拱磁力线图

强,从而导致了位形的收缩。由上述结论还可知,如果  $H$  减小,即外压减小,那么对于窄环更易趋于不平衡,结论与文献[9]相同。

由于大气压力的约束使无力因子值与入口条件相关,因此对应于不同的边界条件产生的磁拱有不同的无力因子。 $\alpha$  不同,拱内部流动亦不同,显然对位形有较大的影响,图5给出  $\alpha^2 = 4$  的情形。

## 五、结 论

本文采用有限元数值计算方法对约束孤立磁拱进行了分析。由于两个自由边界面的存在,使问题的处理变得较为困难,解不易收敛。这里我们由内外压之差对边界形状进行调节,直到满足边界上的总压守恒条件,迭代达到收敛。结果表明,我们的处理是有效的。

从物理上而言,图像也是比较合理的。计算表明,对于大气标高较大的情形,孤立磁拱因受压力较大而呈较窄的位形;反之,拱形较为扩展。此外,如果入口拱宽大,则拱将趋于扁平;反之,上扬。在同样条件下,窄拱更易变得不稳定。对于不同的无力因子,由于对应于不同的边界条件,对位形的影响是显然的。对于外层大气非等温情形,可以用同样的方法进行分析(只须改变外压表达式),从而可以对太阳大气有更实际的模拟。还应该指出,无力场磁通量管模型是一种经常采用的模型(参见文献[10]),它要求磁力管内洛仑茨

力的量级远大于惯性力、热力学压力梯度及重力的量级。对于孤立磁通量模型,要求在边界处总压守恒,即内部磁压与外部热力学压力相等,而外部的热力学压力梯度与太阳大气重力平衡<sup>[1]</sup>。这种模型与许多观测现象符合。

真实的磁拱模型应该是非对称的、三维的,而这里只是对对称情形的二维位形进行了分析,但这并不影响我们的主要结论。事实上,我们的结果是比较符合观测事实的。对磁拱静平衡位形的研究,有助于我们对磁拱内部动力学过程和流动现象的了解,从而对太阳上层大气中的巨大能量有进一步了解。

### 参 考 文 献

- [1] Zirin, H., *Astrophysics of the Sun*, Ch.7—9, 155—302, Cambridge University Press, 1988.
- [2] 胡文瑞、赵学溥,太阳十讲,北京: 科学出版社,1987.
- [3] Ness, W. N., *Symposium on Physics of Solar Flare*, NASA SP-50, 107, 1964.
- [4] Sakurai, T., Green's function methods for potential magnetic fields, *Solar Physics*, **76**, 301—321, 1982.
- [5] Sechser, W., Determination of constant  $\alpha$  force-free solar magnetic fields from magnetograph data, *Solar Physics*, **58**, 215—223, 1978.
- [6] Elwert, G., Muller, K., Thur, L., Balz, P., Computation of inner coronal magnetic fields from longitudinal field component on a spheric photosphere, *Solar Physics*, **75**, 205—227, 1982.
- [7] Sakurai, T., Calculation of force-free magnetic field with non-constant  $\alpha$ , *Solar Physics*, **69**, 343—359, 1981.
- [8] Pizzo, V. J., Numerical solution of magnetostatic equations for thick flux tubes, with application to sunspots, pores, and related structures, *Astrophys. J.*, **302**, 785—808, 1986.
- [9] 胡文瑞、李建国,孤立拱形无力场的自治模型, *中国科学, A*, **12**, 1310—1319, 1986.
- [10] 胡文瑞,宇宙磁流体力学,北京: 科学出版社,1986.
- [11] Zhang, X., Hu, W. R., Magnetostatic configuration of a confined magnetic flux tube, *Astrophys. Space Sci.*, **192**, 247—256, 1992.

## CONFINED EQUILIBRIUM CONFIGURATION OF ISOLATED MAGNETIC ARCH

ZHANG XU HU WEN-RUI

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing 100080*)

### Abstract

Two-dimensional equilibrium configuration of isolated magnetic flux arch confined in the stratified atmosphere was discussed in the present paper. The magnetic fields in the flux arch were assumed to be force-free as the first step, and the non-linear problem with free boundary was solved numerically by the finite element method. The results showed clearly the coupling relation between inner field of magnetic arch and outer field of stratified atmosphere, and the influence of atmospheric pressure distribution, especially the scale height of atmosphere, on the configuration of magnetic arch was analyzed.

**Key words** Solar magnetic, Magnetic arch, MHD, Finite element method.

**作者简介** 张旭,女,1965年8月生。1986年复旦大学应用力学系毕业后就教于长沙交通学院。1989年至1992年在中国科学院力学所攻读硕士,1992年后在力学所从事磁流体力学研究。在国内外刊物上发表了数篇有关孤立磁通量管结构的论文。1994年1月赴美国纽约州立大学攻读博士学位。