

运动载荷下的三维裂纹应力强度因子^{*}94/15(2)
95-103

李湘平 柳春图

(北京, 中国科学院力学研究所, 100080)

0 343.2

摘要 本文分析了无界弹性体中含一半平面裂纹, 在裂纹面上受运动的复合型冲击集中载荷的三维应力强度因子历史. 求得了 I、II 型复合应力强度因子精确解. 求解方法基于积分变换法、Wiener-Hopf 技术以及 Cagniard-de Hoop 变换. 本文还给出了若干数值结果并对解的性质进行了一些讨论.

关键词 运动载荷, 半无限裂纹, 复合型, 应力强度因子

弹性力学, 三维问题

1 引言

含裂纹体的弹性动态响应提出了一个困难的分析问题. 由于数学上的困难, 三维问题在动态断裂力学中受到很少注意. 在解析方面工作尤其缺乏, 可用的结果很少. Freund (1971 年) 首先研究了瑞利表面波与半平面裂纹相互作用问题^[1]. Achenbach and Gantesen (1977 年) 研究了三维简谐力下的半无限裂纹应力强度因子历史^[2]. 随后 Freund (1987 年) 提出了一个一般的方法来解决一类三维弹性动态裂纹问题^[3]. Ramirez^[4] 和 Champion^[5] 进一步讨论了 I 型运动载荷和运动裂纹情形.

在数学提法上, I 型问题归结为通常类型的单个 Wiener-Hopf 方程, 而 I、II 型复合问题可减化为两个相互耦合的 Wiener-Hopf 方程组^[6].

采用类似于 Freund I 型问题所用的方法, 本文研究了在裂纹面上受两对大小相等方向相反, 沿裂纹面运动的集中剪切力作用的 I、II 型复合问题. 求得了复合型应力强度因子精确解. 讨论了解的某些性质并给出了数值结果.

2 边值问题

考虑图 1 所示包含一半平面裂纹的无界弹性体, 初始为无应力、静止状态. 引入一右手系, 使 z 轴与裂纹前缘线重合, 且半平面裂纹位于区域 $y=0, z<0$ 中. 假定 $t=0$ 时在裂纹面上受两对突加大小相等方向相反、沿裂纹面以常速 v ($v < C_R$, 其中 C_R 为瑞利波速) 运动的集中剪切力作用, 产生一反对称波场. 这样只须考虑上半平面 $y \geq 0$.

边界条件可写为

* 1993年2月1日收到本文第1稿, 1994年2月22日收到修改稿.
国家自然科学基金资助.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{yy}(x, 0, z, t) &= 0 \\ \sigma_{xy}(x, 0, z, t) &= \sigma_{xy}^-(x, z, t) + \sigma_{xy}^+(x, z, t) \\ \sigma_{yz}(x, 0, z, t) &= \sigma_{yz}^-(x, z, t) + \sigma_{yz}^+(x, z, t) \\ u_x(x, 0, z, t) &= u_x^-(x, z, t) \\ u_z(x, 0, z, t) &= u_z^-(x, z, t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

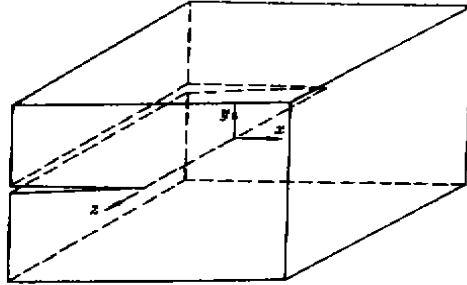


图1 含半平面裂纹无界弹性体

其中 $-\infty < x, z < \infty$, $t \geq 0$, 且

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xy}^-(x, z, t) &= -p_1 \delta(z) \delta(x+vt) H(-x) \\ \sigma_{yz}^-(x, z, t) &= -p_2 \delta(z) \delta(x+vt) H(-x) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

在式中, 上标负号指函数定义在 $z < 0$ 区域, 而在 $z > 0$ 区域恒为 0; 而上标正号指函数定义在 $z > 0$ 区域, 在 $z < 0$ 区域恒为 0.

引入位移矢量的 Helmholtz 分解

$$\vec{u} = \nabla \varphi + \nabla \times \vec{\psi} \quad \nabla \cdot \vec{\psi} = 0 \quad (3)$$

其中势函 φ 和 $\vec{\psi}$ 满足解耦的波动方程

$$\nabla^2 \varphi = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad \nabla^2 \vec{\psi} = b^2 \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} \quad (4)$$

这里 a, b 分别为膨胀波速 C_1 及剪切波速 C_2 的倒数. 在下文中定义 c 为瑞利波速倒数, 而 d 为运动速度 v 的倒数.

这样零初始条件及边界条件均可通过势函表述.

3 求解方法

本文用积分变换法来确定动态应力强度因子 K_1, K_2 . 以下方程通过膨胀波势 φ 写出——剪切波势可类似处理.

首先, 引入单边 Laplace 变换

$$\hat{\varphi}(x, y, z, s) = \int_0^{\infty} \varphi(x, y, z, t) \exp(-st) dt \quad (5)$$

其次, 取双边 Laplace 变换消去变量 z , 其变换参量为 $s\zeta$

$$\bar{\varphi}(x, y, \zeta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(x, y, z, s) \exp(-s\zeta z) dz \quad (6)$$

最后, 关于 x 取双边 Laplace 变换, 其变换参量取为 $s\eta$

$$\Phi(\eta, y, \zeta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(x, y, \zeta, s) \exp(-s\eta x) dx \quad (7)$$

关于势函数 φ 和 $\bar{\varphi}$ 控制方程经过三重变换后, 其变换域中的适当解为

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\eta, y, \zeta, s) &= \frac{A}{s^3} \exp(-asy) \\ \Psi(\eta, y, \zeta, s) &= \frac{B}{s^3} \exp(-\beta sy) \\ \mathbf{B} &= (B_x, B_y, B_z) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

且

$$\alpha^2 = a^2 - \eta^2 - \zeta^2 \quad \beta^2 = b^2 - \eta^2 - \zeta^2 \quad (9)$$

复平面 η 沿割线 $\sqrt{a^2 - \zeta^2} < |\operatorname{Re}(\eta)| < \infty, \operatorname{Im}(\eta) = 0$ 切开使 $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$, 类似地定义 $\operatorname{Re}(\beta) \geq 0$.

对条件 $\nabla \cdot \bar{\varphi} = 0$ 三重变换后得到

$$\eta B_x - \beta \cdot B_y + \zeta B_z = 0 \quad (10)$$

对边界条件 (1) 三重 Laplace 变换有

$$(b^2 - 2\eta^2 - 2\zeta^2)A - 2\beta \cdot \zeta B_x + 2\beta\eta B_z = 0 \quad (11a)$$

$$-\mu[2\alpha\zeta A + (\beta^2 - \zeta^2)B_x + \eta\beta \cdot B_y + \zeta \cdot \eta B_z] = \sigma_{xz}^+(\eta, \zeta, s) + \sigma_{xz}^-(\eta, \zeta, s) \quad (11b)$$

$$\mu[-2\alpha\eta A + \zeta \cdot \eta B_x + \zeta \cdot \beta B_y + (\beta^2 - \eta^2)B_z] = \sigma_{yz}^+(\eta, \zeta, s) + \sigma_{yz}^-(\eta, \zeta, s) \quad (11c)$$

$$\eta A - \beta \cdot B_x - \zeta \cdot B_y = u_x^- \quad (11d)$$

$$\zeta A + \eta \cdot B_x + \beta \cdot B_z = u_z^- \quad (11e)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} u_x^- &= s^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_x^-(x, z, s) \exp[-s(\zeta z + \eta x)] dx dz \\ u_z^- &= s^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_z^-(x, z, s) \exp[-s(\zeta z + \eta x)] dx dz \\ \sigma_{xz}^+ &= s \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\sigma}_{xz}^+(x, z, s) \exp[-s(\zeta z + \eta x)] dx dz \\ \sigma_{yz}^+ &= s \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\sigma}_{yz}^+(x, z, s) \exp[-s(\zeta z + \eta x)] dx dz \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

由 (10), (11a, d, e) 联立求得

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{b^2} (2\eta u_x^- + 2\zeta \cdot u_z^-) \\ B_x &= \frac{1}{\beta b^2} [-\eta\zeta u_x^- + u_x^- (\beta^2 - \zeta^2)] \\ B_y &= \frac{1}{b^2} (-\zeta u_x^- + \eta u_z^-) \\ B_z &= \frac{1}{\beta b^2} [-(\beta^2 - \eta^2) u_x^- + \eta\zeta u_z^-] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

将 (13) 代入 (11b, c) 整理得

$$\mu \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_r^- \\ \mathbf{u}_r^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr}^+ \\ \sigma_{rr}^+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{rr}^- \\ \sigma_{rr}^- \end{pmatrix} \quad (14)$$

其中 μ 为剪切模量, 且

$$\left. \begin{aligned} E &= -4\eta^2\alpha\beta - \eta^2\zeta^2 - \beta^2\zeta^2 - (\beta^2 - \eta^2)^2 \\ F &= -4\zeta\eta\alpha\beta + \eta\zeta(\beta^2 - \zeta^2) + \eta\zeta\beta^2 + \zeta\eta(\beta^2 - \eta^2) \\ G &= -4\zeta^2\alpha\beta - (\beta^2 - \zeta^2)^2 - \eta^2\beta^2 - \eta^2\zeta^2 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

为使上式表为 Wiener-Hopf 技术能够应用形式, 我们希望左端矩阵变为对角形式. 经过一些运算后有

$$\begin{pmatrix} \eta & \zeta \\ \zeta & -\eta \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \sigma_{rr}^+ \\ \sigma_{rr}^+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{rr}^- \\ \sigma_{rr}^- \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \eta & \zeta \\ \zeta & -\eta \end{pmatrix} = -\mu(\eta^2 + \zeta^2) \begin{pmatrix} \frac{R}{\beta b^2} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_r^- \\ \mathbf{u}_r^- \end{pmatrix} \quad (16)$$

令 $\zeta = i\nu$, 且 ν 为一实参量, 则矩阵记为

$$\Sigma^+ + \Sigma^- = -\frac{\mu}{\eta^2 - \nu^2} \mathcal{C}(\eta) \mathcal{D}(\eta) \mathcal{C}(\eta) \mathbf{u}^- \quad (17)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} R(\eta, \nu) &= (\beta^2 - \eta^2 + \nu^2)^2 + 4\alpha\beta(\eta^2 - \nu^2) \\ \mathcal{C}(\eta) &= \begin{pmatrix} \eta & i\nu \\ i\nu & -\eta \end{pmatrix} \quad \mathcal{D}(\eta) = \begin{pmatrix} \frac{R(\eta, \nu)}{\beta b^2} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \\ \alpha &= \sqrt{a^2 - \eta^2 + \nu^2} \quad \beta = \sqrt{b^2 - \eta^2 + \nu^2} \\ \Sigma^+ &= \begin{pmatrix} \sigma_{rr}^+ \\ \sigma_{rr}^+ \end{pmatrix} \quad \Sigma^- = \begin{pmatrix} \sigma_{rr}^- \\ \sigma_{rr}^- \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}^- = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_r^- \\ \mathbf{u}_r^- \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

方程 (17) 是标准 Wiener-Hopf 方程组.

4 Wiener-Hopf 技术

引入一新函数 $S(\eta, \nu)$ 为

$$S(\eta, \nu) = \frac{R(\eta, \nu)}{k(c^2 - \eta^2 + \nu^2)} \quad k = 2(b^2 - a^2) \quad (19)$$

那么函数 $S(\eta, \nu)$ 可因子化为^[3]

$$S_{\pm}(\eta, \nu) = \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_a^b \tan^{-1} \left(\frac{4\zeta^2 \sqrt{(b^2 - \zeta^2)(\zeta^2 - a^2)}}{(b^2 - 2\zeta^2)^2} \right) \frac{\zeta \cdot d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + \nu^2} (\sqrt{\zeta^2 + \nu^2} \pm \eta)} \right\} \quad (20)$$

同样函数 $\beta(\eta, \nu)$ 可直接分解为

$$\beta(\eta, \nu) = (\sqrt{b^2 + \nu^2} + \eta)^{1/2} (\sqrt{b^2 + \nu^2} - \eta)^{1/2} \quad (21)$$

借助于以上结果, 方程 (17) 可表为

$$\Sigma^+ + \Sigma^- = -\mu \mathcal{C}^+ \mathcal{C}^- \mathbf{u}^- \quad (22)$$

其中

$$\mathcal{A}^+ = \frac{1}{\eta + |v|} \mathcal{C}(\eta) \mathcal{D}_+(\eta), \quad \mathcal{A}^- = \frac{1}{\eta - |v|} \mathcal{D}_-(\eta) \mathcal{C}(\eta) \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D}_+(\eta) &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{k}}{b} \frac{(\sqrt{c^2 + v^2} + \eta) S_+}{(\sqrt{b^2 + v^2} + \eta)^{1/2}} & 0 \\ 0 & (\sqrt{b^2 + v^2} + \eta)^{1/2} \end{bmatrix} \\ \mathcal{D}_-(\eta) &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{k}}{b} \frac{(\sqrt{c^2 + v^2} - \eta) S_-}{(\sqrt{b^2 + v^2} - \eta)^{1/2}} & 0 \\ 0 & (\sqrt{b^2 + v^2} - \eta)^{1/2} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

为求解方程 (22), 首先观察到

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}^+)^{-1} &= (\eta - |v|)^{-1} \mathcal{B}^+ & \mathcal{B}^+ &= (\mathcal{D}_+(\eta))^{-1} \mathcal{C}(\eta) \\ (\mathcal{A}^-)^{-1} &= (\eta + |v|)^{-1} \mathcal{B}^- & \mathcal{B}^- &= \mathcal{C}(\eta) (\mathcal{D}_-(\eta))^{-1} \end{aligned} \quad (25)$$

方程 (22) 两边同乘以 $(\mathcal{A}^+)^{-1}$, 则有

$$\begin{aligned} (\eta - |v|)^{-1} \mathcal{B}^+ \Sigma^- + (\eta - |v|)^{-1} \cdot \{ \mathcal{B}^+ \Sigma^+ - (\mathcal{B}^+ \Sigma^+)_{\eta=|v|} \} \\ = -\mu \mathcal{A}^- \mathbf{u}^- - (\eta - |v|)^{-1} \cdot (\mathcal{B}^+ \Sigma^+)_{\eta=|v|} \end{aligned} \quad (26)$$

由方程 (2), 有

$$\Sigma^- = -\frac{d}{\eta - d} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (27)$$

由方程 (26) 知, 方程右边在 η 平面左半平面是解析的, 而左边明显地在 η 平面右半平面具有极点 $\eta = |v|$. 又 Σ^- 在 $\eta = d$ 有一极点. 为得到一个方程右、左边分别在左半 η 平面及右半 η 平面解析的函数, 我们从每边减去以下项 β^+

$$\beta^+ = \frac{1}{\eta - d} \left[\frac{\mathcal{B}^+}{\eta - |v|} \right]_{\eta=d} \begin{pmatrix} -p_1 d \\ -p_2 d \end{pmatrix} + \frac{1}{\eta - |v|} \left[\frac{\mathcal{B}^+}{\eta - d} \right]_{\eta=|v|} \begin{pmatrix} -p_1 d \\ -p_2 d \end{pmatrix} \quad (28)$$

从而方程 (26) 变为

$$\begin{aligned} (\eta - |v|)^{-1} \mathcal{B}^+ \Sigma^- - \beta^+ + (\eta - |v|)^{-1} \{ \mathcal{B}^+ \Sigma^+ - (\mathcal{B}^+ \Sigma^+)_{\eta=|v|} \} \\ = -\mu \cdot \mathcal{A}^- \mathbf{u}^- - (\eta - |v|)^{-1} (\mathcal{B}^+ \Sigma^+)_{\eta=|v|} - \beta^+ \end{aligned} \quad (29)$$

利用 Wiener-Hopf 技术通常推论得到

$$-\mu \cdot \mathcal{A}^- \mathbf{u}^- = (\eta - |v|)^{-1} \cdot (\mathcal{B}^+ \Sigma^+)_{\eta=|v|} + \beta^+$$

$$(\eta - |v|)^{-1} \cdot \mathcal{B}^+ \Sigma^+ = (\eta - |v|)^{-1} \cdot (\mathcal{B}^+ \Sigma^+)_{\eta=|v|} + \beta^+ - (\eta - |v|)^{-1} \cdot \mathcal{B}^+ \Sigma^- \quad (30)$$

在方程 (30) 中, 仍含待定未知量 $(\mathcal{B}^+ \Sigma^+)_{\eta=|v|}$. 注意到 (30) 的第一式可改写为

$$-\mu \mathbf{u}^- = \frac{\mathcal{B}^-}{\eta + |v|} \left[\frac{1}{\eta - |v|} (\mathcal{B}^+ \Sigma^+)_{\eta=|v|} + \beta^+ \right] \quad (31)$$

\mathbf{u}^- 函数在 η 平面左半平面应解析, 而相应方程右端包含极点 $\eta = -|v|$, 应当移去. 这样经过直接计算得到

$$(\mathcal{B}^+ \Sigma^+)_{\eta=|v|} = 2|v| \frac{\hat{e}_1}{\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2} \hat{e}_2 \cdot (\beta^+)_{\eta=|v|} \quad (32)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \hat{e}_1 &= (\hat{D}_1^- \text{isgn}(v) \hat{D}_1^-)^T \\ \hat{e}_2 &= (-\hat{D}_1^- \text{isgn}(v) \hat{D}_1^-)^T \\ \hat{D}_1^- &= \frac{\sqrt{k}(\sqrt{c^2+v^2}+|v|)S_+(|v|)}{b(\sqrt{b^2+v^2}+|v|)^{1/2}} \\ \hat{D}_1^- &= (\sqrt{b^2+v^2}+|v|)^{1/2} \\ S_+(|v|) &= S_+(|v|, v) \\ \text{sgn}(v) &= \begin{cases} 1 & v > 0 \\ 0 & v = 0 \\ -1 & v < 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

因此得到应力分量的变换式

$$\Sigma^+ = \mathcal{A}^+ \left\{ \frac{2|v|}{\eta - |v|} \frac{\hat{e}_1}{\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2} \hat{e}_1 \cdot (\beta^+)_{v=|v|} + \beta^+ - (\eta - |v|)^{-1} \mathcal{B}^+ \Sigma^- \right\} \quad (34)$$

5 动态应力强度因子

根据通常定义, 有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}(x, 0, z, t) &\sim \frac{K_1(z, t)}{\sqrt{2\pi x}} \\ \sigma_{zz}(x, 0, z, t) &\sim \frac{K_2(z, t)}{\sqrt{2\pi x}} \end{aligned} \right\} \quad x \rightarrow 0^+ \quad (35)$$

其中 K_1, K_2 是待定的沿裂纹前缘应力强度因子. 则变换后应力强度因子可表为

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_1(v, s) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [(2\pi x)^{1/2} \cdot \bar{\sigma}_{xx}^+(x, 0, v, s)] \\ \bar{K}_2(v, s) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [(2\pi x)^{1/2} \cdot \bar{\sigma}_{zz}^+(x, 0, v, s)] \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

利用关于变换渐近特性 Abel's 定理, 给出

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_1(v, s) &= \lim_{\eta \rightarrow +\infty} [(2s\eta)^{1/2} \sigma_{xx}^+(\eta, 0, v, s)] \\ \bar{K}_2(v, s) &= \lim_{\eta \rightarrow +\infty} [(2s\eta)^{1/2} \sigma_{zz}^+(\eta, 0, v, s)] \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

在放松 v 为实变量约束后, 关于 z 的 Laplace 逆变换给出

$$\begin{pmatrix} \hat{K}_1(z, s) \\ \hat{K}_2(z, s) \end{pmatrix} = \frac{s}{2\pi} \cdot \int_{-\infty+v_j}^{\infty+v_j} \begin{pmatrix} \bar{K}_1(v, s) \\ \bar{K}_2(v, s) \end{pmatrix} \exp(isvz) dz \quad (38)$$

其中 $v_j \in (-b, b)$.

考察 $z > 0$ 情形, 将原积分路径变形为如图 2 所示积分路径. 沿新积分路径, 有

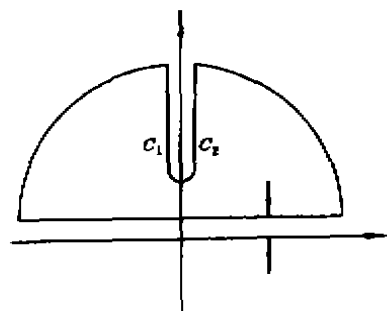


图 2 Cagniard-de Hoop 反演积分路径

$$\text{沿路径 } c_1 \quad \sqrt{b^2 - \xi^2} = -i \cdot \sqrt{\xi^2 - b^2}$$

$$\text{沿路径 } c_2 \quad \sqrt{b^2 - \xi^2} = i \cdot \sqrt{\xi^2 - b^2}$$

利用卷积公式, 并置 $T = \frac{t}{b|z|}$, $v = \frac{\tau}{b|z|}$ 最后得到

$$K_2(z, T) = \frac{\sqrt{2}}{(\pi|z|)^{3/2}} \frac{\Theta}{\Theta T} \int_1^x \left[\frac{d}{d^2 + v^2} (p_1 d - p_2 v) \operatorname{Re} \left\{ \frac{2(\sqrt{v^2 - 1} + v)^2 v}{(\sqrt{c^2 - v^2} + d) S_+(d)} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(d + i \sqrt{v^2 - 1})^{1/2}}{(\sqrt{v^2 - 1} + v)^2 + \frac{k}{b^2} (\sqrt{c^2 - v^2} + vi)^2 S_+^2(vi)} \right\} + \frac{d}{d^2 + v^2} (p_1 v^2 + p_2 d v) \frac{k}{b^2} \right. \\ \left. \operatorname{Re} \left\{ \frac{2(\sqrt{v^2 - 1} + v) (\sqrt{c^2 - v^2} + vi) s_+(vi)}{(\sqrt{v^2 - 1} + v)^2 + \frac{k}{b^2} (\sqrt{c^2 - v^2} + vi)^2 S_+^2(vi)} \frac{1}{(d + i \sqrt{v^2 - 1})^{1/2}} \right\} \right. \\ \left. - d(p_1 d - p_2 v) \operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{d - vi} \frac{(d + i \sqrt{v^2 - 1})^{1/2}}{(\sqrt{c^2 - v^2} + d) S_+(d)} \right\} \right] \frac{dv}{(T - v)^{1/2}} H(T - 1) \quad (39a)$$

$$K_3(z, T) = \frac{\sqrt{2}}{(\pi|z|)^{3/2}} \frac{\Theta}{\Theta T} \int_1^x \left[-\frac{d}{d^2 + v^2} (p_1 d - p_2 v) v \cdot \operatorname{Re} \left\{ \frac{(d + i \sqrt{v^2 - 1})^{1/2}}{(\sqrt{c^2 - v^2} + d) S_+(d)} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2(\sqrt{v^2 - 1} + v) (\sqrt{c^2 - v^2} + vi) S_+(vi)}{(\sqrt{v^2 - 1} + v)^2 + \frac{k}{b^2} (\sqrt{c^2 - v^2} + vi)^2 \cdot S_+^2(vi)} \right\} + d(p_1 v + p_2 d) \cdot \frac{k}{b^2} \cdot \frac{1}{d^2 + v^2} \right. \\ \left. \operatorname{Re} \left\{ \frac{-2v \cdot (\sqrt{c^2 - v^2} + vi)^2 S_+^2(vi)}{(d + i \sqrt{v^2 - 1})^{1/2}} \frac{1}{(\sqrt{v^2 - 1} + v)^2 + \frac{k}{b^2} (\sqrt{c^2 - v^2} + vi)^2 S_+^2(vi)} \right\} \right. \\ \left. - d(p_1 \cdot v + d p_2) \operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{d - vi} \frac{1}{(d + i \sqrt{v^2 - 1})^{1/2}} \right\} \right] \frac{dv}{(T - v)^{1/2}} H(T - 1) \quad (39b)$$

式中 $H(\cdot)$ 为 Heaviside 函数, 方程 (39) 为本文主要结果.

6 结果和讨论

为检验结果正确性, 将变量 z 沿 $-\infty < z < \infty$ 积分, 进行降维, 则本文三维动态解应退化为相应二维线布载动态问题. 该类似问题已由 Ang^[6] 及其他人^[5] 得到. 事实上, 如果在方程 (37) 中实施积分, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} K_2(z, t) \\ K_3(z, t) \end{pmatrix} dz = \begin{pmatrix} -dP_1 \frac{(b+d)^{1/2}}{(c+d)S_+(d)} \\ -dP_2 \frac{1}{(b+d)^{1/2}} \end{pmatrix} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi t}}$$

与 Ang^[6] 等人结果一致.

对公式 (39) 本文进行了数值计算. I、II 型应力强度因子随时间和载荷运动的速度变化关系在图 3~图 8 中给出. 其中数值参数 $b=1.87a$, $c=2.02a$, 时间 t 也已无量纲化. 这样 $T=1$ 相应于剪切波到达位于裂纹前缘观察点 z 的时刻. K_2, K_3 均乘因子 $(\pi|z|)^{3/2}/\sqrt{2}$.

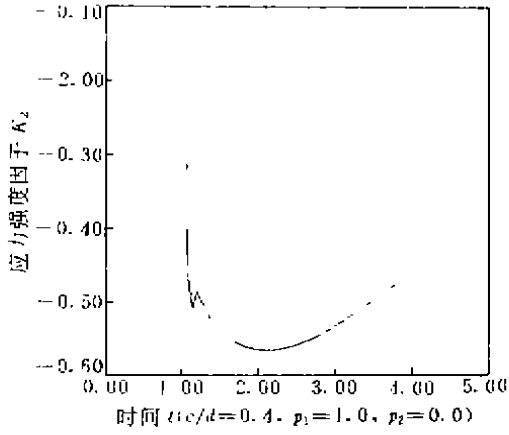


图 3

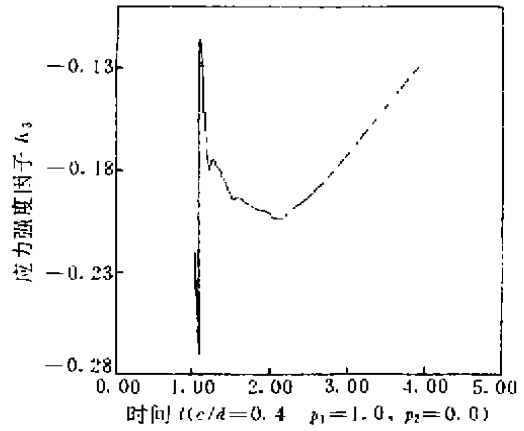


图 4

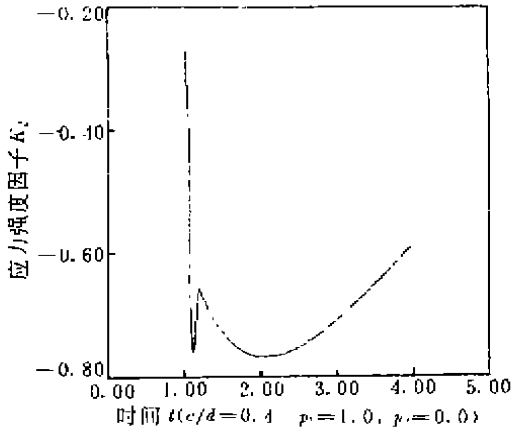


图 5

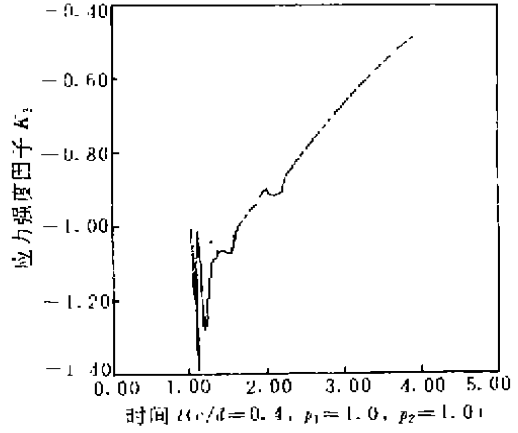


图 6

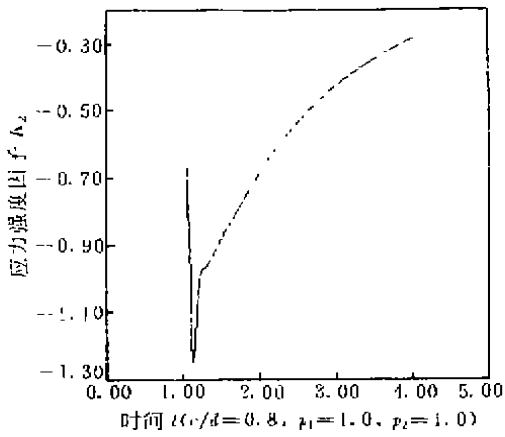


图 7

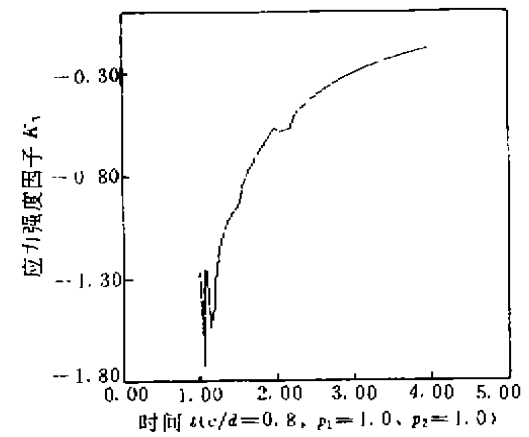


图 8

当剪切波尚未到达观察点 z 时, K_2, K_3 此时一直为 0. 当剪切波到达的时刻, 观察点 z 处的应力强度因子出现一个跃动. 随着时间的流逝, K_2, K_3 逐渐缓慢地趋于 0. Champion⁽⁴⁾ 对 I 型情形进行了详细的推导证明, 表明 I 型 K_I 随时间增长而趋于 0 性质. 我们的计算结果表明 I、II 型复合应力强度因子在运动载荷下情形是类似的.

这样完成了特定运动载荷作用下三维应力强度因子的分析. 本文的方法和结果可用来推导一般载荷作用下动态响应问题⁽⁶⁾.

参 考 文 献

- 1 Freund L B. The oblique reflection of a Rayleigh wave from a crack tip. *Int J Solids Strut*, 1971, 7, 1199—1210
- 2 Achenbach J D, Gautesen a. Elastodynamic stress intensity factors for a semi-infinite crack under 3-D loading. *J Appl Mech*, 1977, 44, 243—249
- 3 Freund L B. The stress intensity factor due to three dimensional transient loading of the faces of a crack. *J Mech Phys Solids*, 1987, 35, 61—72
- 4 Ramirez J C. The three dimensional stress intensity factor due to the motion of a load on the faces of a crack. *Q Appl Math XLV* 1987, 361—376
- 5 Champion C R. The stress intensity factor history for an advancing crack under three-dimensional loading. *Int J Solids Strut*, 1988, 24 (3), 285—300
- 6 Freund L B. *Dynamic fracture mechanics*. Cambridge Univ Press Cambridge, 1990
- 7 Nobel B. *Method based on the Wiener-Hopf technique*. Pergamon Press, New York, 1958
- 8 Ang D D. Elastic waves generated by a force moving along a crack. *J Math Phys*, 1960, 38, 246—256
- 9 Liu Chuntu, Li Xiangping. A half plane crack under three-dimensional combined mode impact loading. *Acta Mechanica Sinica*, 1994, 10 (1)

THE THREE-DIMENSIONAL DYNAMIC STRESS INTENSITY FACTOR UNDER THE MOVING LOADS ON THE FACES OF A CRACK

Li Xiangping

Liu Chuntu

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing, 100080*)

Abstract The three-dimensional dynamic stress intensity factor of a half plane crack in an otherwise unbounded elastic body, with the crack faces subjected to a traction distribution consisting of two pairs of suddenly-applied shear point loads and moving along the crack edges is considered. The analytic expression for the combined mode I, II stress intensity factors as a function of time is obtained. The method of solution is based on the direct application of integral transform together with the Wiener-Hopf technique. Some features of the solutions are discussed and the numerical results for various speeds of point load are presented.

Key words moving point load, semi-infinite crack, I, II combined mode, stress intensity factor