

54-64

## 水波在软淤泥底床上的衰减

周显初 王剑峰

TV148.6

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

p731.22

**摘要** 本文研究了二层流体系统中波浪的衰减。上层为理想流体, 下层为粘弹性 Voigt 体。导出了色散关系, 计算了波浪衰减系数。对于粘性或弹性很大或很小的情况, 导出了各种水深情况下近似的显式的衰减系数表示式。与精确的数值结果比较, 近似程度很好。可供工程设计者参考、使用。

**关键词** 波床相互作用, 衰减, 淤泥床 水波

## 1 引言

在流体无粘、底产固结、无孔隙的假设下, 经典的水波理论可以应于离岸深水工程设计中。在沿岸工程中, 由于渗透、粘性和底部摩擦引起能量耗散, 从而使波浪衰减, 其中尤以淤泥质底床对波浪的衰减最为显著。

淤泥质底床对波浪的衰减效果可以从下述报道中得到证实。Turbman 和 Suhayda<sup>[1]</sup>发现: 由淤泥运动引起的表面波浪的能量损失比渗透或摩擦引起的损失要大很多。Gade<sup>[2]</sup>报道, 在墨西哥湾有一个“泥洞”, 在风暴期间可以当作渔船的避风港, 因为那里的淤泥海床使波浪迅速衰减。在我国黄河入海口附近也有这种“泥洞”<sup>[3]</sup>。Macpherson<sup>[4]</sup>报道, 印度的 Kerale 在西南季风季节里, 入射到淤泥海滩上的台风浪只需 4~8 个波长的距离就可完全被衰减掉。这些都说明: 只考虑底部摩擦是不够的, 需要探索在淤泥底床上波浪衰减的机理。

早在 50 年代, Gade<sup>[5]</sup>就开始了这种机理的探索。他用煤油和糖水两层液体在水槽中做波浪衰减的实验, 并导出了长波近似下波浪的色散关系, 从而研究波浪衰减。Dalrymple 和 Liu<sup>[6]</sup>研究了二层粘性流体中波浪的衰减, 并在粘性较小时, 用三个边界层和两层理想流体的模型来替换较复杂的两层粘性模型, 导出了波浪衰减系数的显式。不久, Hsiao<sup>[7]</sup>和 Macpherson<sup>[4]</sup>分别研究了上层为理想流体、下层为粘弹性流体的两层流体系统中波浪的衰减。在 Hsiao 的论文中, 在两层流体界面上, 用压力连续代替了正确的边界条件应力连续, 从而会引起误差。Macpherson 引进了势函数和流函数, 把整个流场看作为理想流和粘性旋涡两部份的迭加, 着重研究了下层流体为无限深的情况, 导出了近似的波浪衰减系数, 并与数值结果进行了比较。

粘性模型描述浮泥的运动是比较合适的。但对于淤泥来说, 粘弹性模型似乎更接近于实

际淤泥的本构方程。Migniot<sup>[6]</sup>在实验室测量中证实:波浪诱导的轨道运动在淤泥中确实存在,软淤泥层显示出类似于流体的性质。所以软淤泥滩上波浪衰减问题可以简化为两层流体中的波浪问题。

本文基于小振幅波理论,研究两层流体中表面波的衰减。上层作为理想流体,下层则为粘弹性流体。在第二节中讨论 Voigt 流体的基本方程和边界条件,得出正确的色散关系。对于粘性和弹性很大或很小的情况,我们在第三节导出显式的波浪衰减系数,而且可以适用于各种不同的上下层深度的情况。最后在第四节我们用正确的数值结果来检验这些显式表示的波浪衰减系数的精确程度,把两者的结果加以比较。

## 2 色散关系的导出

坐标系及符号如图 1 所示。波沿  $x$  轴正向传播,上层是深度为  $h_1$  的理想流体,下层是深度为  $h_2$  的粘弹性流体。为满足稳定条件,密度  $\rho_2 > \rho_1$ 。自由面位移记作  $\eta(x_1, t) = ae^{i(kx - \omega t)}$ , 流体之间的界面记作  $\xi(x, t) = be^{i(kx - \omega t)}$ , 上下层流体都是均匀的。下层流体为 voigt 体,其应力应变关系为

$$\tau = G\epsilon + \mu\dot{\epsilon} \quad (1)$$

其中  $\tau$  为剪应力,  $G$  为剪切模量,  $\mu$  为动力粘

性,  $\epsilon$  为剪应变,  $\dot{\epsilon}$  为剪应变率。我们假定流体是不可压的,  $G$ 、 $\mu$  为常数,忽略二阶的对流项,则下层流体的运动方程可以表示为<sup>[9]</sup>

$$\rho_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G\nabla^2 u + \rho_2 \nu \nabla^2 \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2)$$

$$\rho_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = G\nabla^2 w + \rho_2 \nu \nabla^2 \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (3)$$

其中  $u$ 、 $w$  分别为水平和垂直速度分量,  $p$  为压力,  $\nu = \mu/\rho_2$  为运动粘性系数。

引进流函数  $\psi$

$$u = \psi_x \quad w = -\psi_z \quad (4)$$

因为我们考虑线波浪运动,所以可以假设

$$\psi = S(z)e^{i(kx - \omega t)} \quad (5)$$

代入(2)、(3)式,消去  $p$ ,可得  $S(z)$  应满足的四阶常微分方程

$$\frac{d^4 S}{dz^4} + \left(-2k^2 + \frac{\sigma i}{\nu_e}\right) \frac{d^2 S}{dz^2} + \left(k^4 - \frac{i\sigma k^2}{\nu_e}\right) S = 0 \quad (6)$$

其中

$$\nu_e = \nu + \frac{iG}{\rho\omega} \quad (7)$$

为等效粘性。它是一个复数,其实都为粘性,虚部则是弹性大小的量度。

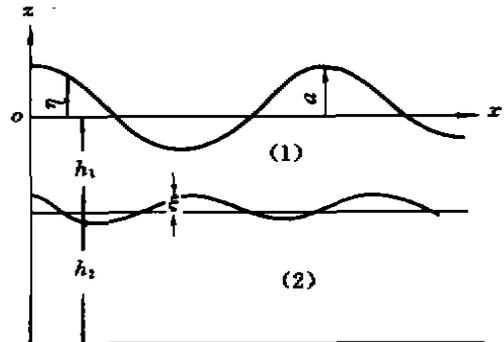


图 1 坐标系

方程(6)的解为

$$S(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx} + Ce^{mx} + De^{-mx} \quad (8)$$

其中,  $A, B, C, D$  为常数, 由边界条件确定

$$m^2 = k^2 - \frac{i\sigma}{\nu_e} \quad (9)$$

假定上层流体是不可压的, 运动是无旋的。引进势函数  $\varphi$ , 可得

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (10)$$

$$u = \varphi_x, \quad w = \varphi_z \quad (11)$$

现在考虑边界条件。自由面上有两个边界条件

$$p = 0 \quad \text{在 } z = \eta(x, t) \text{ 上} \quad (12)$$

$$w_1 = \partial \eta / \partial t \quad \text{在 } z = \eta(x, t) \text{ 上} \quad (13)$$

在底部固壁上有两个条件

$$u = w = 0 \quad \text{在 } z = -(h_1 + h_2) \text{ 上} \quad (14)$$

在界面上有四个边界条件

$$\text{法向应力连续: } \sigma_{1zz} = \sigma_{2zz} \quad \text{在 } z = -h_1 + \xi(x, t) \text{ 上} \quad (15)$$

$$\text{切向应力为零: } \tau_{2zx} = 0 \quad \text{在 } z = -h_1 + \xi(x, t) \text{ 上} \quad (16)$$

$$\text{法向速度连续且等于界面法向速度: } w_1 = w_2 = \xi_t \quad \text{在 } z = -h_1 + \xi(x, t) \text{ 上} \quad (17)$$

这里, 下标 1、2 分别表示上层和下层。边界条件(15)与 Hsiao 的压力连续条件不同。后者只是  $|\nu_e|$  很小时的一种近似。由此引起的误差多大, 文献[7]没有说明, 其它的文章也没有提及, 所以, 我们应该用正确的应力连续条件, 结果也就与文献[7]不同。

满足方程(10)、边界条件(12)、(13)的上层流体的解为

$$\varphi = -\frac{ia_g}{\sigma} [\text{ch}kz + \frac{\sigma^2}{gk} \text{sh}kz] e^{i(kx - \sigma t)} \quad (18)$$

边界条件(15)可写为

$$p_1(-h_1) + \frac{\partial p_1}{\partial z} \xi = p_2(-h_1) + \frac{\partial p_2}{\partial z} \xi - 2\rho_2 \nu_e \frac{\partial w}{\partial z} - 2G \int \frac{\partial w}{\partial z} dt \quad (19)$$

把边界条件(14)~(17)用  $\varphi, \eta$  及(8)式的  $A, B, C, D$  表示, 并在平衡位置上满足, 可得

$$kAe^{-k(h_1+h_2)} - kB e^{k(h_1+h_2)} + Cme^{-m(h_1+h_2)} - Dme^{m(h_1+h_2)} = 0 \quad \text{在 } z = -(h_1 + h_2) \text{ 上} \quad (20)$$

$$Ae^{-k(h_1+h_2)} + Be^{k(h_1+h_2)} + Ce^{-m(h_1+h_2)} + De^{m(h_1+h_2)} = 0 \quad \text{在 } z = -(h_1 + h_2) \text{ 上} \quad (21)$$

$$\frac{-ki}{\rho_2 \nu_e} [(\rho_2 - \rho_1)gb + \rho_1 ga(\text{ch}kh_1 - \frac{\sigma^2}{gk} \text{sh}kh_1)] = Ae^{-kh_1}(m^2 + k^2)k - Be^{kh_1}(m^2 + k^2)k + 2Ce^{-mh_1}mk^2 - 2De^{mh_1}mk^2 \quad \text{在 } z = -h_1 \text{ 上} \quad (22)$$

$$2k^2(Ae^{-kh_1} + Be^{kh_1}) + (m^2 + k^2)(Ce^{-mh_1} + De^{mh_1}) = 0 \quad \text{在 } z = -h_1 \text{ 上} \quad (23)$$

$$\frac{-ga}{\sigma} [\text{sh}kh_1 - \frac{\sigma^2}{gk} \text{ch}kh_1] = Ae^{-kh_1} + Be^{kh_1} + Ce^{-mh_1} + De^{mh_1} = \frac{\sigma}{k} b \quad \text{在 } z = -h_1 \text{ 上} \quad (24)$$

由(20)、(21)、(23)、(24)式可解出  $A, B, C, D$ , 代入(22)式可得色散关系

$$\Omega \left[ (1 - \gamma) \left( \frac{kg}{\sigma_2} \text{th}kh_1 - 1 \right) - \gamma \left( 1 - \frac{\sigma^2}{kg} \text{th}kh_1 \right) \right] = \text{th}kh_1 - \frac{\sigma^2}{gk} \quad (25)$$

其中

$$\Omega = \frac{1}{\Lambda} k (m^2 - k^2)^2 [4kchkh_2shmh_2 - 4mchmh_2shkh_2] \quad (26a)$$

$$\Lambda = 4k(m^2 + k^2)^2 (kshmh_2shkh_2 - mchkh_2chmh_2) + 16k^4m(mshkh_2shmh_2 - kchmh_2chkh_2) + 16k^3m(m^2 + k^2) \quad (26b)$$

$$r = \rho_1/\rho_2 \quad (26c)$$

下面, 我们对色散关系(25)式进行一些讨论。

当下层流体很薄即  $h_2 \rightarrow 0$  时, 由(26a)知  $\Omega \rightarrow 0$ , 因此, 色散关系(25)变为

$$\sigma^2 = gk\text{th}kh_1 \quad (27)$$

此式正是上层水波色散关系。

当下层流体密度很大时,  $\gamma \rightarrow 0$ , (25)式变为

$$\left( \text{th}kh_1 - \frac{\sigma^2}{gk} \right) \left( 1 - \frac{kg}{\sigma^2} \Omega \right) = 0$$

色散关系与上层水波的色散关系一致。这与物理直观符合, 因为此时下层流体可以看作为固壁。

若下层流体很硬、很粘, 与刚体相差无几时,  $|\nu_e| \rightarrow \infty$ , 于是  $m \rightarrow k$ ,  $\Omega \rightarrow 0$ , 色散关系(25)式又变成了上层流体色散关系。

若下层流体的粘性和弹性都很小, 则下层流体也可看作为理想流体, 于是  $m \rightarrow -\infty$ ,  $\Omega \rightarrow \text{th}kh_2$ , 色散关系(25)变为

$$\sigma^4 (\rho_2 \text{cth}kh_2 \text{cth}kh_1 + \rho_1) - \sigma^2 \rho_2 (\text{cth}kh_2 + \text{cth}kh_1) gk + (\rho_2 - \rho_1) g^2 k^2 = 0 \quad (28)$$

此式正是二层理想流体的色散关系<sup>[10]</sup>。

利用(9)式, 可证明色散关系(25)式与文献[4]的色散关系一致。

由(24)式可知界面波振幅与表面波振幅之比为

$$\frac{b}{a} = \text{ch}kh_1 - \frac{gk}{\sigma^2} \text{sh}kh_1 \quad (29)$$

还值得一提的是当  $\nu=0$  时即只有弹性的情况。由(9)式知,  $m$  或者是实数或者是纯虚数。由(26a)式知  $\Omega$  一定为实数, 所以(25)式决定的  $k$  为实数。这就是说, 在纯弹性的情况下波浪不衰减。这与 Mallard 和 Dalrymple<sup>[11]</sup>的结论是一致的。

### 3 波浪衰减系数的显式表示

色散关系(25)须用数值计算才能求出根  $k = k_r + ik_i$ 。为了给出各个因素对波浪衰减的影响, 为了给工程设计部门提供简单的工程计算公式, 也为了给数值解提供一个可靠性的检验方法, 我们有必要把(25)式简化, 以求得显式的比较简单的波浪衰减系数。

在下层流体无限深、波浪为长波且  $\nu_s$  很大或很小的假定下,文献[4]曾求得波浪衰减的显式。这里我们将把头二个假设去掉,把显式的应用范围拓宽。由于一般情况下,波浪衰减系数很小,所以我们令

$$k = k_0 + k_1 = k_0 + \bar{k}_r + ik_i \quad (30)$$

其中  $k_0$  为实数,  $k_1$  为  $k$  的复修正量,且  $|k_1/k_0| \ll 1$ , 那么  $e^{-kz}$  即为波浪衰减因子,  $k_i$  为波浪衰减系数。

$$3.1 \quad \nu_s = \nu + \frac{iG}{\rho\sigma} \rightarrow 0 \text{ 或 } k^2|\nu_s|/\sigma \ll 1$$

由(9)式知

$$|k_0^2/m^2| = k_0^2|\nu_s|/\sigma \ll 1 \quad (31)$$

$$m = \sqrt{\sigma/(2\nu_s)}(-1+i)(1 + \frac{1}{2}ik_0^2\nu_s/\sigma) \quad (32)$$

其中  $||$  表示复数的模。把(25)式按小量  $k/m$  展开,可得

$$\begin{aligned} \Omega = \text{th}kh_2 \left[ 1 - \frac{k}{m} \text{th}mh_2 (\text{cth}kh_2 - \text{th}kh_2) - \frac{k^2}{m^2} (\text{th}^2mh_2 \text{sech}^2kh_2 \right. \\ \left. + 4 - 4\text{sech}kh_2 \text{sech}mh_2) \right] + O(k^3/m^3) \end{aligned} \quad (33)$$

$$3.1.1 \quad h_2 \rightarrow 0, \quad k_0 h_2 \ll |m| h_2 \ll 1$$

$$\Omega = \frac{1}{3}kh_2(mh_2)^2 \quad (34)$$

代入(25)式,并把(25)式按小量  $k_1$  展开,有

$$\sigma^2 = gk \text{th}kh_1 \quad (35)$$

$$D = \frac{\sqrt{gh_1}k_i}{\sigma} = \frac{\gamma}{3} \frac{k_0^2 h_2^2}{k_0 h_1 + \frac{1}{2} \text{sh}2k_0 h_1} \frac{\nu h_2 \sqrt{gh_1}}{\nu_2 + G^2/(\rho^2 \sigma^2)} \quad (36)$$

无量纲衰减系数  $D = O(k_0^2 h_2^2) \ll 1$

$$3.1.2 \quad k_0 h_2 \ll 1, k_0 h_1 \ll 1, |m| h_2 \gg 1$$

(33)式的  $\Omega$  取头二项,且第一项是主项。把色散关系(25)展开,可得

$$\sigma^2 = gk_0^2(h_1 + h_2) \quad (37)$$

$$k_1 = \frac{1}{2(h_1 + h_2)} \left[ (1 - \gamma) \frac{k_0 h_1 h_2}{h_1 + h_2} + \frac{\gamma \sigma^2 k_0 h_1 h_2}{g} + \frac{k_0}{m} \text{th}mh_2 \right] \quad (38)$$

上式只有第三项有虚部,且

$$m = m_r + im_i = \begin{cases} \sqrt{\sigma \cdot \frac{\rho\sigma}{G}} \left( i - \frac{1}{2} \frac{\nu\rho\sigma}{G} \right) & \nu \ll G/\rho\sigma \\ \sqrt{\sigma/2\nu} (i - 1) & \nu \gg G/\rho\sigma \end{cases} \quad (39)$$

$$I_m \left( \frac{\text{th}mh_2}{mh_2} \right) = \frac{-m_r \text{th}m_r h_2 + \frac{1}{2} m_r \sin 2m_r h_2 \text{sech}^2 m_r h_2}{(m_r^2 + m_i^2) h_2 (\cos^2 m_r h_2 + \text{th}^2 m_r h_2 \sin^2 m_r h_2)} \quad (40)$$

利用  $|mh_2| \gg 1$ , 即得

$$D = \frac{\sqrt{gh}}{\sigma} k_i = (h_1/h_2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{4h_2} \cdot (1 + h_1/h_2)^{-3/2} (\sigma/2\nu)^{-1/2} \quad \nu \geq G/\rho\sigma \quad (41a)$$

$$D = \frac{\text{th}(\frac{\nu}{2} \frac{\rho\sigma}{G} \sqrt{\frac{\sigma\rho\sigma}{G} h_2}) - \frac{1}{4} \frac{\nu\rho\sigma}{G} \sin(2\sqrt{\sigma \frac{\rho\sigma}{G} h_2}) \text{sech}^2(\frac{\nu\rho\sigma}{2G} \sqrt{\sigma \frac{\rho\sigma}{G} h_2})}{[\cos^2 \sqrt{\sigma \frac{\rho\sigma}{G} h_2} + \text{th}^2(\frac{\nu\rho\sigma}{2G} \sqrt{\sigma \frac{\rho\sigma}{G} h_2}) \sin^2 \sqrt{\sigma \frac{\rho\sigma}{G} h_2}]}$$

$$\frac{1}{2h_2} (h_1/h_2)^{\frac{1}{2}} (1 + h_1/h_2)^{-3/2} (\sigma \cdot \frac{\rho\sigma}{G})^{-1/2} \quad \nu \ll G/\rho\sigma \quad (41b)$$

若  $|mh_2| \gg \frac{G}{\rho\sigma}$  则(41b)变为

$$D = \frac{1}{2h_2} (h_1/h_2)^{1/2} (1 + h_1/h_2)^{-3/2} (\sigma \frac{\rho\sigma}{G})^{-1/2} \quad \nu \ll G/\rho\sigma \quad (42)$$

### 3.1.3 $kh_2 = O(1)$ , $|mh_2| \gg 1$ , $kh_1 \ll 1$

在这种情况下,  $\Omega$  为(33)式的头二项, 且以第一项为主, 展开色散关系(25)可得

$$\sigma^2 = gk_0 \text{th} k_0 h_2 \quad (43)$$

$$D = \frac{\sqrt{gh_1}}{\sigma} k_i = \frac{k_0 h_2}{k_0 h_2 + \frac{1}{2} \text{sh} 2k_0 h_2} \sqrt{\frac{k_0 h_1}{\text{th} k_0 h_2}} \frac{1}{2\sqrt{\frac{\sigma}{2\nu} h_2}} \quad \nu \gg G/\rho\sigma \quad (44)$$

当  $\nu \ll G/\rho\sigma$  时, 只须把(44)式最后一个因子换为  $(\sigma \cdot \frac{\rho\sigma}{G})^{-1/2}$ , 并且乘以(41b)式的第一个因子就可以了。

### 3.1.4 $k_0 h_2 \ll 1$ , $|mh_2| = O(1)$ , $k_0 h_1 = O(1)$

这时,  $\Omega$  仍为(33)式的头二项, 但这二项具有同一量级, 于是

$$\sigma^2 = gk_0 \text{th} k_0 h_1 \quad (45)$$

$$D = \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma \sqrt{\frac{k_0^2 \nu}{\sigma}} \sqrt{\frac{k_0 h_1}{\text{th} k_0 h_1}} \frac{1}{k_0 h_1 + \frac{1}{2} \text{sh} 2k_0 h_1} \frac{\text{th} \sqrt{\frac{\sigma}{2\nu} h_2} - \frac{1}{2} \sin 2\sqrt{\frac{\sigma}{2\nu} h_2} \text{sech}^2 \sqrt{\frac{\sigma}{2\nu} h_2}}{\cos^2 \sqrt{\frac{\sigma}{2\nu} h_2} + \text{th}^2 \sqrt{\frac{\sigma}{2\nu} h_2} \sin^2 \sqrt{\frac{\sigma}{2\nu} h_2}}$$

$$\nu \geq G/\rho\sigma \quad (46)$$

若  $\nu \ll \frac{G}{\rho\sigma}$ , 则(46)式最后一个因子必须用(41b)式的第一个因子来代替。

### 3.1.5 $h_2 \rightarrow \infty$ , 即 $k_0 h_2 \gg 1$

$$\Omega = 1 - 4 \frac{k^2}{m^2}$$

此时  $k_0$  满足下列方程

$$(1 - \gamma) k_0^2 g^2 \text{th} k_0 h_1 - gk_0 \sigma^2 + \gamma \sigma^4 k_0 h_1 = (1 + \frac{4k_0^2}{m^2}) (gk_0 \sigma^2 \text{th} k_0 h_1 - \sigma^4)$$

此方程有解

$$\sigma^2 = gk_0, \quad \sigma^2 = gk_0 \operatorname{th} k_0 h_1 \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma \operatorname{th} k_0 h_1} \quad (47a)$$

对于表面波,我们取  $\sigma^2 = gk_0$ , 于是

$$k_1 = \frac{4k_0^2 \nu_i}{\sigma} \frac{1 - \operatorname{th} k_0 h_1}{1 + (2\gamma - 1) \operatorname{th} k_0 h_1} \quad (47b)$$

若  $k_0 h_1 \ll 1$ , 即长波情况,

$$D = 4k_0^2 h_1^2 \nu / \sqrt{gh_1^3} \quad (48)$$

此时的衰减系数与  $G$  无关。(48)式与文献[4]的结果一致。

3.2  $\nu_e = \nu + \frac{iG}{\rho\sigma} \rightarrow \infty$ , 即  $\sigma / (k^2 |\nu_e|) \ll 1$

按照(9)式

$$m = k[1 - i\sigma / (2k^2 \nu_e)] \quad (49)$$

经过一些仔细的运算,去掉高阶小量,得到

$$\Omega = \frac{-i\sigma}{2k^2 \nu_e} \left( \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2kh_2 - kh_2 \right) (\operatorname{ch}^2 kh_2 + k^2 h_2^2)^{-1} \quad (50)$$

由色散关系(25)得到

$$\sigma^2 = gk_0 \operatorname{th} k_0 h_1 \quad (51)$$

$$D = \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{k_0 h_1}{\operatorname{th} k_0 h_1}} \frac{\sigma}{k_0^2} \frac{\nu}{\nu^2 + G^2 / (\rho^2 \sigma^2)} \frac{\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2k_0 h_2 - k_0 h_2}{\operatorname{ch}^2 k_0 h_2 + k_0^2 h_2^2} \frac{1}{\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2k_0 h_1 + k_0 h_1} \quad (52)$$

由上式可见,  $\nu \gg G/\rho\sigma$  时, 衰减系数与  $\nu$  成反比, 若  $\nu \ll G/\rho\sigma$  时,  $D$  与  $\nu$  成正比。

在淤泥层很厚, 波浪为长波的情况下,  $k_0 h_2 \gg 1$ ,  $k_0 h_1 \ll 1$ , (52)式化简为

$$D = \frac{\gamma}{4} \frac{g \sqrt{gh_1}}{\sigma^2} \frac{\nu}{\nu^2 + G^2 / (\rho^2 \sigma^2)} = \frac{\gamma}{4} \frac{1}{k_0 h_1} \frac{\sigma}{k_0^2} \frac{\nu}{\nu^2 + G^2 / (\rho^2 \sigma^2)} \quad (53)$$

这与文献[4]的结果一致。文献[4]的结果只是(52)式的一种特殊情况。

如果两层都很浅, 即  $k_0 h_1 \ll 1$ ,  $k_0 h_2 \ll 1$ , 则(52)式化简为

$$D = \frac{2}{3} (k_0 h_2)^3 \frac{\gamma}{4} \frac{1}{k_0 h_1} \frac{\sigma}{k_0^2} \frac{\nu}{\nu^2 + G^2 / (\rho^2 \sigma^2)} \quad (54)$$

这意味着: 在  $|\nu_e|$  很大时, 与  $h_2 \rightarrow \infty$  的情况相比,  $h_2 \rightarrow 0$  时的衰减系数几乎可以忽略不计, 这与物理直观相符。

从上述各种显式表示式可以看出:

(1) 对于上层水很深或波长很短的情况,  $kh_1 \gg 1$ , 这种机制不引起波浪衰减  $D=0$ , 这与物理直观符合。

(2) 在下层流体粘性很大, 波长很长使得  $\frac{\sigma}{k_0^2 |\nu_e|} \cdot \frac{1}{k_0 h_1} = O(1)$  即  $\frac{\sigma}{k_0^2} \ll \nu = O\left(\frac{\sigma}{k_0^2} \cdot \frac{1}{k_0 h_1}\right)$  时,  $D=O(1)$ , 这种情况下波浪衰减最大。其余情况均有  $D \ll 1$ 。

在  $\nu_e \rightarrow 0$  时, 各种情况的分类有赖于  $k_0$  的数值, 而在各种情况中  $k_0$  的计算公式又各不相同, 这会给分类带来困难。这里我们指出  $k_0$  均可用下式计算

$$\sigma^2 = gk_0 \tanh k_0 (h_1 + h_2) \quad (55)$$

(35)、(39)、(43)、(45)、(47a)式都是(55)式在各种情况下的首项近似。当 $|\nu_e|$ 很小时,下一节的近似计算中所用的 $k_0$ 都由(55)式计算。

上面各式只是渐近分析的结果,各个公式的适用范围是不连续的。对于那些处于中间状态的情况,只能用(25)式的数值结果。

#### 4 与数值计算结果的比较

在这一节,我们把近似公式的结果(图2~6中的虚线)与精确的数值结果(实线)作一比较。

第一个模型是 Gade 的实验模型。上层是密度为  $0.8593\text{g/cm}^3$ 、 $3.81\text{cm}$  深的煤油,下层是密度为  $1.504\text{g/cm}^3$  的糖水,粘性系数为  $26\text{cm}^2/\text{s}$ 。波浪的圆频率  $\sigma=4.4857/\text{s}$ ,在图2中我们用两段近似曲线(44)式和(46)式来逼近整条曲线。除了在最高点附近偏大之外,其余绝大部分范围内的近似程度都相当好。无量纲深度  $\sqrt{\frac{\sigma}{2\nu}}h_2$  较小的那一段,我们的近似与 Gade 的长波近似几乎一样,在无量纲深度较大的那一段,我们的近似曲线和文献[6]的边界层近似差不多,但我们的近似曲线适用范围更大。在这个例子中,(44)式的小量  $k_0h_1 \leq 0.2$ ,而作为  $O(1)$ 量级的  $k_0h_2$  也只有  $0.2 \sim 0.6$ 。(46)式的小量  $k_0h_2 \leq 0.18$ ,而作为  $O(1)$ 量级的  $k_0h_1$  只不过  $0.2 \sim 0.25$ ,略大于  $k_0h_2$  而已。如果(44)式和(46)式的小参数  $k_0h_1$  和  $k_0h_2$  更小些的话,近似程度会更好。

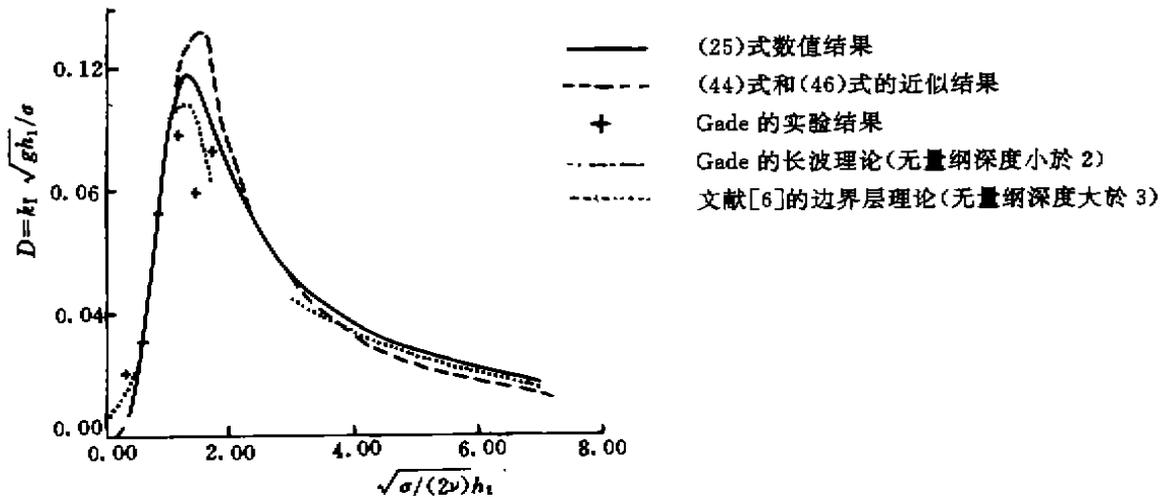


图2 Gade 实验模型的各种方法的结果比较

图3、4是衰减系数与淤泥厚度的关系。图3的参数为: $\rho_1=1.028\text{g/cm}^3$ ,  $h_1=400\text{cm}$ ,  $\rho_2=1.800\text{g/cm}^3$ ,  $G=0$ ,  $\nu=10^3\text{cm}^2/\text{s}$ ,  $\sigma=0.52/\text{s}$ 。图中用(41a)和(46)式分二段逼近曲线。在

无量纲深度小于 2.6 时,近似程度很好,就整条曲线看,近似程度都还可以。近似公式显示的衰减系数的最大值也符合得很好。在本例中,作为小量的  $k_0h_1, k_0h_2$  都已在 0.25 左右。图 4 是  $|\nu_e|$  较大的时的近似。其参数为:  $\rho_1=1\text{g/cm}^3, h_1=1000\text{cm}, \rho_2=2\text{g/cm}^3, G=2\times 10^9\text{N/cm}^2,$

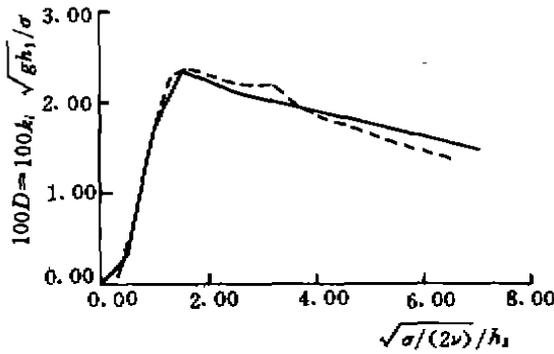


图 3 衰减系数随无量纲深度的变化

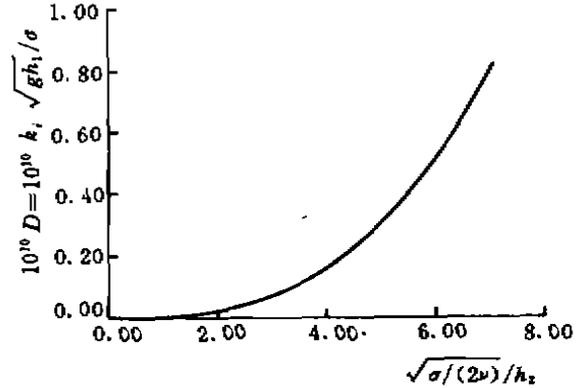


图 4 衰减系数随无量纲深度的变化

$\nu=10^3\text{cm}^2/\text{s}, \sigma=0.52/\text{s}$ 。在这种情况下,近似曲线不需要分段,只要(52)式或(54)式即可。衰减系数很小,几乎不衰减。近似曲线与精确解重合。

图 5、6 画出了衰减系数和无量纲粘性  $\nu/\sqrt{gh_1^3}$  的关系。因为误差很小,又因为都是对数坐标,所以图中的两条线都重合了。图 5 的参数为:  $\rho_1=1\text{g/cm}^3, h_1=10^9\text{cm}, \rho_2=2\text{g/cm}^3, h_2=5\times 10^9\text{cm}, G=0, \sigma=0.52/\text{s}$ 。这是淤泥层无穷厚的情况。图 6 则是淤泥层有一定厚度的情况,具体参数除了  $h_2=5\times 10^9\text{cm}$  之外,其余与图 5 相同。两个图都显示有一个最优粘性值,对应的衰减系数最大,近似公式很好地反映了这个最优值。图 5 中衰减系数的最大值为(47b)和(52)式的交点,图 6 中则是(46)式和(52)式的交点。

尽管各个近似公式是在各种特殊情况下导出来的,但从上面的比较可看出,它们在很大范围内都有较好的近似,一般只须要 1 到 2 个公式即可逼近整条曲线。这确实为讨论各个物理参量的影响提供了方便,而且可以省略数值计算之劳苦。

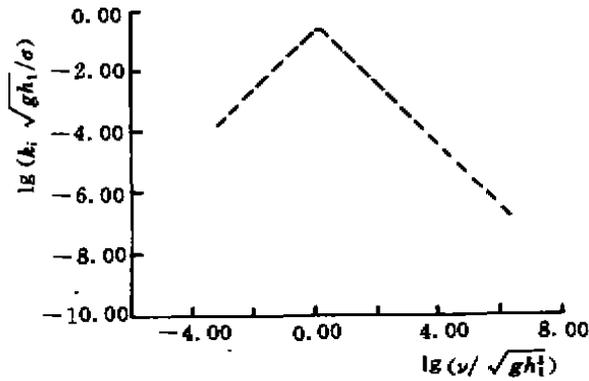


图 5 衰减系数随无量纲粘性的变化。

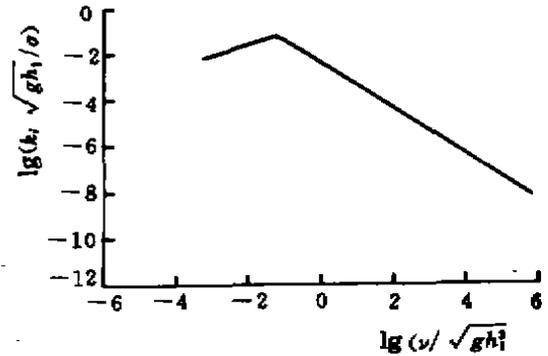


图 6 衰减系数随无量纲粘性的变化

### 参考文献

- 1 Tubman M. W. & Suhayda J. N. , Wave action and bottom movements in fine sediments. Proc. 15th Coastal Eng. Conf. , ASCE, 1976, Honolulu, 1168-1183.
- 2 Gaed H. G. , Effects of a non-rigid, impermeable bottom on plane surface waves in shallow water. J. Mar. Res. , V. 16(1958), 61-82.
- 3 刘宝银, 开阔海面上的安全避风港, 百科知识, 1989年11期(总第124期), 51~52.
- 4 Macpherson H. , The attenuation of water waves over a non-rigid bde. J. Fluid Mech. , V. 97(1980), 721-742.
- 5 Gade H. G. , Effects of a non-rigid, impermeable bottom on plane surface waves in shallow water. Ph. D. thesis, Texas A & M University, 1957, 35pp.
- 6 Dalrymple R. A. & Liu P. L. F. , Waves over soft muds, a two-layer fluid model. J. Phys. Ocean. , V. 8 (1978), 1121-1131.
- 7 Hsiao S. V. & Shemdin O. H. , Interaction of ocean waves with a soft bottom. J. Phys. Ocean. , V. 10 (1980), 605-610.
- 8 Migniot C. , A study of the physical properties of various forms of very fine sediment and their behaviors under hydrodynamic action. Houille Blanche, V. 7(1968), 591-620.
- 9 Kolsky H. , Stress waves in solids, Dover, 1963, 213pp.
- 10 Lamb H. , Hydrodynamics, 6th ed. , Dover, 1945, 738pp.
- 11 Mallard W. W. & Dalrymple R. A. , Water waves propagating over a deformable bottom . Proc. 9th Offshore Tech. Conf. , OTC 2895, Houston, 141-146.

## THE WAVE ATTENUATION ON MUD BED

Zhou Xianchu Wang Jianfeng

*(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)*

**Abstract** In this paper, the wave attenuation in a two-layer fluid system is studied. The fluid in up layer is ideal and the lower layer is the Voigt model of the viscoelastic medium. A dispersion relation is derived and the rate of the wave decay is computed. An asymptotic and explicit expression of the decay rate for different water depth is given, when the viscoelasticity is very large or very small. Comparing with the accurate numerical results, the accuracy is very satisfactory. It can be used as a reference for engineers.

**Key Words** wave seabed interaction, decay, muddy seabed