

# 饱和砂土的非稳定性

韦昌富 江礼茂 章根德

(中国科学院力学研究所, 北京, 100080)

**文 摘** 砂土的非相关塑性流动可能导致介质本身的失稳和问题解的非唯一性。然而, 无论是Drucker或Hill的假设, 都只能给出介质稳定的充分条件。本文首先分析饱和砂土的非相关流动特性, 利用局部屈服面和局部塑性势面的概念, 分析得出饱和砂土稳定的充分必要条件; 然后给出不稳定区域在应力空间的具体位置。文中提出的“不稳定线”与“崩塌面”相一致, 表明了它在海底稳定性分析中有着广泛的实践意义。

**关键词** 非相关流动, 非稳定性, 局部屈服面和塑性势面, 崩塌面。

## 1 引 言

砂土的塑性流动是非相关的, 这可能导致材料本身的失稳和解的非唯一性。Drucker (1951)<sup>[1]</sup>和Hill (1958)<sup>[2]</sup>提出了关于材料稳定性的能量假设, 为材料稳定性的判别提出了充分条件, 但这个条件并不是必要的。Mandel (1964)<sup>[3]</sup>认为, 稳定的材料应该能够抵抗任意形式的微小的扰动, 为此, 他提出了一个关于材料稳定的必要条件, 该条件可用于预测应变沿着某个方向集中和剪切带的形式。近年来, Lade等人进行了一系列的实验研究<sup>[4-6]</sup>, 探讨在常规三轴应力条件下摩擦材料的稳定性, 并给出了相应的砂土稳定条件。这些工作无疑大大加深了我们对砂土失稳机理的理解。

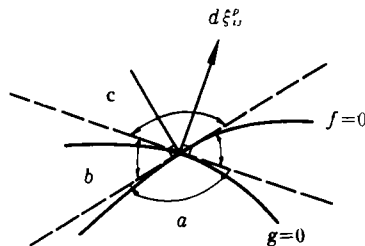
Koenders和Sellmeijer (1992)<sup>[7]</sup>利用文献[3]的结论, 从理论角度探讨了饱和砂土的非稳定性问题, 结果表明: 具有剪缩性的饱和砂土在剪切过程中存在一个失稳点。但他们并未给出该失稳点的具体表示形式。而对于一个物理非稳定问题, 最重要的和最有意义的就是要确定失稳的条件及其临界载荷。尤其是对于一个土工问题, 失稳的条件必须具体化才有其实用的价值。事实上, 文献[8]中的“崩塌面”就是一个失稳面, 不过它纯粹是由作者从试验的角度得到的。本文首先从砂土的非相关流动特性出发, 利用局部屈服面和塑性势面的概念, 试图从理论上探讨砂土的稳定性, 并对不稳定条件在一般的 $p'-q$ 平面上的具体表示加以描述, 使其能直接应用于海底稳定性分析中, 最后还指出了相应的工程应用途径。

## 2 非相关流动与稳定性的关系

无论是具有相关流动特性或具有非相关流动特性的材料, 一旦有效应力状态到达破坏面,

到稿日期: 1993-04-26.

材料自身总是不稳定的。然而，对于砂土这类具有非相关流动特性的介质，根据Drucker和Hill的能量假设，即使应力状态点远未达到破坏面也可能存在失稳现象。如图1所示，应力路径位于区域(a)时，材料处于弹性稳定状态；在区域(c)，因 $\delta^2 w^p > 0$ ，故材料是稳定的；但区域(b)中， $\delta^2 w^p < 0$ ，材料有可能出现失稳。Lade等<sup>[6]</sup>曾在三轴剪切仪上实验，并得到以下结论：



- a: 弹性区
- b:  $\delta^2 w^p = d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p < 0$
- c:  $\delta^2 w^p = d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p > 0$

图1 非相关流动性特性

(1) 当且仅当下列条件满足时，砂土才会失稳：①  $\delta^2 w^p$  小于零；② 饱和或几乎饱和；③ 不排水；④ 砂土本身趋于压缩。

(2) 不满足上述条件中的任一条，材料将是稳定的。

上述结论给出了砂土介质稳定的充分必要条件，同时也表明，Drucker假设实质上只是稳定的充分条件。

### 3 理论分析

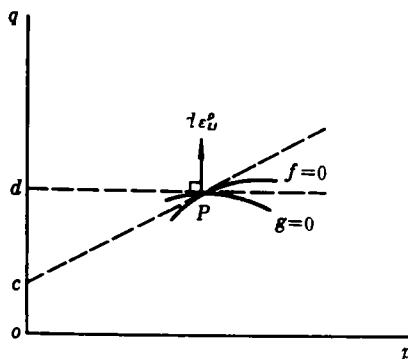
#### 3.1 局部屈服面和塑性势面

为方便起见，本文只讨论各向同性的砂土介质，并认为在介质失稳之前，Mandel稳定条件在所有的方向上都能满足，即应变是均匀分布的。实验表明<sup>[9]</sup>，只要应力状态位于破坏面之下，上述假设是合理的。下面只讨论常规的三轴实验应力条件。定义

$$p' = \frac{1}{3} \sigma'_{kk}, \quad q = \left[ \frac{3}{2} \left( \sigma'_{ij} - \frac{1}{3} \sigma'_{kk} \delta_{ij} \right) \left( \sigma'_{ij} - \frac{1}{3} \sigma'_{kk} \delta_{ij} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{kk}, \quad \varepsilon_s = \left[ \frac{2}{3} \left( \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \left( \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

其中  $\delta_{ij}$  为Kronecker张量。假定应力状态位于破坏面以下，并以  $P_p$  表示，见图2。过  $P_p$  点的屈服面  $f$  和塑性势面  $g$  均是外凸、自然弯曲和光滑的。过  $P_p$  点分别作  $f$  和  $g$  的切线，显然这两条切线可分别用来代替  $P_p$  点微小邻域内的屈服面和塑性势面，称之为局部屈服面和局部塑性势面，并且



$$f = q - \lambda p' - c = 0 \quad (3)$$

$$g = q - \mu p' - d = 0 \quad (4)$$

对于给定点  $P$ ，参数  $\lambda$ ， $\mu$ ， $c$  和  $d$  均为常数，对于相关流动， $\lambda = \mu$ 。

图2 局部屈服面和塑性势面

Vermeer (1982)<sup>[10]</sup> 曾用局部屈服面和塑性势面的概念来分析分叉现象。这里之所以引入这些概念，完全出于以下考虑：不管以前应力路径如何，当应力状态到达  $P$  点时，由于外部的突然扰动使得有效应力路径突然折入区域 (b) (如图1所示)，此刻， $\delta^2 w^p < 0$ 。在塑性功的二次增量  $\delta^2 w^p$  突然由区域 (b) 之外的正值变为区域 (b) 内的负值的瞬间，亦即应力路径在  $P$  点的微小邻域内的突然变化有可能对介质的稳定性产生重大影响。同时，不管介质的屈服面

和塑性势面为何种形式, 只要它们是外凸光滑的, 那么在  $P$  点微小邻域都可以近似地用直线来表示。

### 3.2 增量方程

考虑应力状态位于  $P$  点时介质受到外界扰动的情况, 扰动应力微量以  $d\sigma'_{ij}$  表示。根据塑性流动法则, 引起的塑性应变增量  $d\epsilon^p_{ij}$  为

当  $f < 0$  或  $\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} \cdot d\sigma'_{ij} \leq 0$  时, 材料处于弹性状态, 即  $d\epsilon^p_{ij} = 0$ 。

当  $f = 0$  且  $\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} \cdot d\sigma'_{ij} > 0$  时, 塑性应变增量为

$$d\epsilon^p_{ij} = \frac{1}{h} \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{ij}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{kl}} \cdot d\sigma_{kl} \quad (5)$$

式中  $h$  为硬化函数, 恒为正值。由式(5)得

$$d\epsilon^p_v = -\frac{\mu}{h} \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{kl}} \cdot d\sigma'_{kl}; \quad d\epsilon^p_s = \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{kl}} \cdot d\sigma'_{kl} \quad (6)$$

对于常规的三轴应力条件 ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ), 式(6)变为如下简单的形式:

$$d\epsilon^p_v = -\frac{\mu}{h}(dq - \lambda dp'); \quad d\epsilon^p_s = \frac{1}{h}(dq - \lambda dp') \quad (7)$$

另外, 对于各向同性介质, 弹性应变增量为

$$d\epsilon^e_v = \frac{dp'}{K}; \quad d\epsilon^e_s = \frac{dq}{3G} \quad (8)$$

结合(7)和(8)两式, 得到塑性本构关系式

$$|d\epsilon| = [D_{ep}]|d\sigma| \quad (9)$$

式中的弹塑性矩阵  $[D_{ep}]$  可由下列关系式给出:

当  $f < 0$  或  $dq - \lambda dp' \leq 0$  时,

$$[D_{ep}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3G} & 0 \\ 0 & \frac{1}{K} \end{bmatrix} \quad (10.a)$$

当  $f = 0$  且  $dq - \lambda dp' > 0$  时,

$$[D_{ep}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3G} + \frac{1}{h} & -\frac{\lambda}{h} \\ -\frac{\mu}{h} & \frac{1}{K} + \frac{\lambda\mu}{h} \end{bmatrix} \quad (10.b)$$

不难证明, 如果对于任意应力增量, 都有

$$\delta^2 w = d\sigma'_{ij} d\epsilon_{ij} = \left(\frac{1}{3G} + \frac{1}{h}\right) dq^2 - \left(\frac{\lambda + \mu}{h}\right) dq \cdot dp' + \left(\frac{1}{K} + \frac{\lambda\mu}{h}\right) dp'^2 > 0 \quad (11)$$

那么, (10.b) 式右边的矩阵是正定的。自然, 介质中存在唯一的应变场。事实上, 式(11)保证了介质的稳定性。

### 3.3 砂土的稳定条件

在破坏面内, 当有效应力状态点沿着某应力路径到达  $P$  时, 介质突然受到某微小应力  $d\sigma'_{ij}$  的扰动 ( $d\sigma'_{ij}$  可分解为  $dp'$  和  $dq$  两部分), 这时介质的弹塑性反应可由式(9)给出。

如果扰动 $d\sigma'_{ij}$ 是在排水的条件下施加, 则式(9)给出的 $d\varepsilon_{ij}$ 为有限值,  $d\sigma'_{ij}$ 与 $d\varepsilon_{ij}$ 之间存在一一对应关系, 表明介质中不存在失稳现象, 而不管 $\delta^2 w$ 是正值或是负值。这些结论与Lade等人<sup>[6]</sup>的实验结果相符合。

当扰动是在不排水的条件下进行时, 若介质是完全饱和的, 体应变增量 $d\varepsilon_v=0$ , 而根据有效应力原理,  $dp'=-du$ 。因此, 由式(9)得

如果 $f<0$ 或 $dq-\lambda dp'\leq 0$ , 那么

$$d\varepsilon_s = \frac{1}{3G}dq \quad (12)$$

如果 $f=0$ , 且 $dq-\lambda dp'>0$ , 那么

$$dp' = \frac{\mu}{(\lambda\mu+h/K)}dq, \text{ 且 } d\varepsilon_s = \left[ \frac{1}{3G} + \frac{1}{h} - \frac{\lambda\mu}{h(\lambda\mu+h/K)} \right]dq \quad (13)$$

如果介质是稳定的, 那么必然能抵抗住任意微小扰动 $dq$ 。假定此时的应力状态位于屈服面上, 即 $f=0$ , 介质受到 $dq$ 的扰动, 其反应有且仅有以下两种情况:

对于完全弹性反应,  $\lambda=0$ , 则

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} \cdot d\sigma'_{ij} = dq - \lambda dp' = dq \leq 0 \quad (14.a)$$

对于弹塑性反应, 则

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} \cdot d\sigma'_{ij} = dq - \lambda dp' = \frac{h/K}{\lambda\mu+h/K} \cdot dq > 0 \quad (14.b)$$

介质对扰动 $dq$ 的反应只能由上述两种情况中的一种来决定, 即式(14.a)和式(14.b)不能同时成立。考虑到 $h$ 和 $K$ 均为正值, 故必须有

$$\lambda\mu + \frac{h}{K} > 0 \quad (15)$$

否则, 若 $\lambda\mu + \frac{h}{K} < 0$  (16)

那么, 对于 $dq<0$ 的情况, 式(14.a)和(14.b)同时成立, 即介质的反应既是完全弹性的也是弹塑性的, 这是矛盾的。但如果 $\lambda\mu + \frac{h}{K} = 0$ , 那么任意给定 $dq$ ,  $dp' \rightarrow \infty$ , 这也是不现实的情况。综上所述, 式(15)可作为饱和砂土稳定的必要条件。显然, 这一条件也是充分的, 因为如果式(15)成立, 则式(9)将给出确定的唯一的应变场, 表明介质中处处稳定。从而得到了介质失稳的充要条件为

(1) 受到不排水外部扰动, 并且

$$(2) \lambda\mu + \frac{h}{K} \leq 0 \quad (17)$$

如上述两条件同时成立, 则介质中的应变反应将是不确定的, 表明介质中出现失稳现象。

### 3.4 讨论

由于硬化函数 $h$ 和弹性模量 $K$ 均为正, 所以, 对于相关流动( $\lambda=\mu$ ), 式(15)恒成立。这时介质是稳定的。但是, 对于非相关流动( $\lambda \neq \mu$ ), 式(15)不一定成立。现在所关心的是: 在什么条件下不稳定条件式(17)得以满足, 即介质失稳。显然, 一个必要的条件为

$$\lambda\mu < 0 \quad (18)$$

这时, 出现两种情形:

- (1)  $\lambda < 0$  且  $\mu > 0$
- (2)  $\lambda > 0$  且  $\mu < 0$

在情形(1)下, 使得介质可能出现失稳的有效应力路径如图3(a)所示, 以保证 $\delta^2 w^p < 0$ 。这种情况相当于具有剪胀性的砂土介质在突然的不排水扰动作用下会丧失抵抗能力, 如果此时的有效应力状态位于破坏面之下, 那么这是一种不现实的情况。在情形(2)下, 有效应力路径只有取如图3(b)所示的形式才能使得介质可能出现失稳。对于介质受到不排水扰动 $dq$ 的情况, 图3(b)中的有效应力路径表明了介质具有剪缩的趋势, 亦即孔压瞬间迅速提高而有效平均主应力迅速减少, 最终导致介质失去抵抗外部扰动的能力, 这就是液化现象。从上述的讨论中可知, 失稳的充要条件中实质上隐含了介质具有剪缩性这一要求。

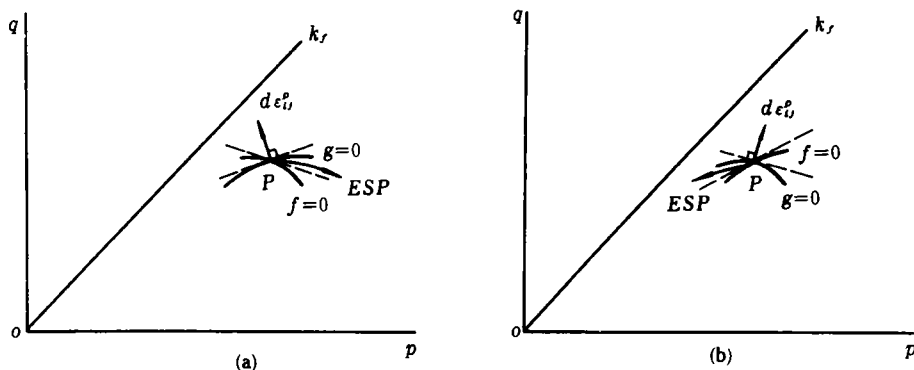


图3 导致失稳的有效应力路径

如果考虑的是刚塑性介质或 $h \ll K$ , 那么式(17)变为 $\lambda\mu < 0$ 。根据上述的讨论可知, 只存在以下情况是合理的, 即

$$\lambda = \frac{\partial f}{\partial p} > 0 \quad \text{且} \quad \mu = \frac{\partial g}{\partial p} < 0 \tag{19}$$

因此失稳的充要条件式(17)变成了式(19)。同时, 据式(17), 介质弹性的存在有利于介质的稳定。从物理意义上看, 这是显而易见的, 因为弹性变形要消耗部分的能量, 从而减少了失稳的可能性。

#### 4 失稳条件和崩塌面的关系

从上面的论述中可知, 当且仅当以下两个条件:

- (1) 介质在不排水的条件下受到扰动,
- (2)  $\lambda\mu + h/K \leq 0$

都得到满足时, 介质才会失稳。而式(17)成立的必要条件为 $\lambda > 0$ , 且 $\mu < 0$ 。对于各向同性的砂土介质, 典型的屈服面如图4所示, 在静水压力轴上屈服面垂直于 $p'$ 轴, 即 $\lambda \rightarrow -\infty$ , 随着剪应变的发展,  $\lambda$ 值逐渐增大, 当应力状态达到破坏面时,  $\lambda$ 值也达到最大值 $\lambda_{max} > 0$ , 而在屈服面顶点,  $\lambda = 0$ 。过各屈服面之顶点可近似地连成一直线, 在直线之上,  $\lambda > 0$ ; 在直线之下,  $\lambda < 0$ 。不难看出, 若介质在破坏面之下出现失稳的话, 那么失稳的区域只能由该

直线和 $K_r$ 线所围成。此直线称为潜在不稳定线，它代表着介质失稳的最低限。

Sladen等人(1990)<sup>[6]</sup>发现，饱和松砂在不排水剪切时的有效应力路径的峰值点与稳定状态点(steady state)可以近似地连成一条射线，在 $(p', q, e)$ 空间上，射线变成一个面，称为“崩塌面”(collapse surface)。当应力状态点位于该面上时，饱和松砂就出现崩塌失稳，最终导致液化。崩塌面可表示为有效应力状态和孔隙比的函数，即

$$f_{collapse} = f(p', q, e) \quad (20)$$

它具有许多重要性质：①它不是一个状态边界面，因为介质的应力状态点可以位于其之上；② $e = \text{常数}$

与该面截成一直线，它在 $p'-q$ 平面上的斜率及纵轴的截距分别以 $\text{tg}\alpha$ 和 $a$ 表示，相应的内摩擦角和凝聚力可由下式给出：

$$\sin\phi = \text{tg}\alpha; \quad c = a/\cos\phi \quad (21)$$

当孔隙比 $e$ 增大时， $a$ 不变，但 $a$ 则减小；③当饱和砂的应力状态到达该面时，强度则迅速降低；④应力状态位于该面上的介质必然具有剪缩性质。尽管Sladen等人<sup>[6]</sup>的结论是由实验得到的，但却隐含了上述不稳定条件。事实上，对于饱和松砂来说，不排水剪切的有效应力路径和屈服面是相近的，前者顶点稍滞后于后者。若考虑剪切过程中介质的弹性要消耗部分能量，则这种滞后可以忽略不计，亦即潜在不稳定线位于崩塌面上，本质上两者是等效的。

失稳条件里要求介质必须是“松”的。Sladen等人<sup>[6]</sup>在整理实验资料时发现Bishop脆性指数 $I_{BU}$ 与归一化后的初始平均有效应力比 $p'_0/p'_{ss}$ 之间有很好的相关关系，如图5所示。其中， $I_{BU}$ 由下式定义：

$$I_{BU} = \frac{c_{ur} - c_{us}}{c_{ur}} \quad (22)$$

式中  $c_{ur}$ 为不排水峰值强度； $c_{us}$ 为稳定状态强度； $p'_0$ 为初始平均有效应力； $p'_{ss}$ 为稳定状态的平均有效应力。可见， $I_{BU}$ 代表得介质失稳后不排水剪切强度的相对衰减幅值。对于各向等压固结饱和砂，只有当 $p'_0/p'_{ss} > 2$ 时，才可能有强度的丧失，即液化。图6给出了 $I_{BU}$ 的

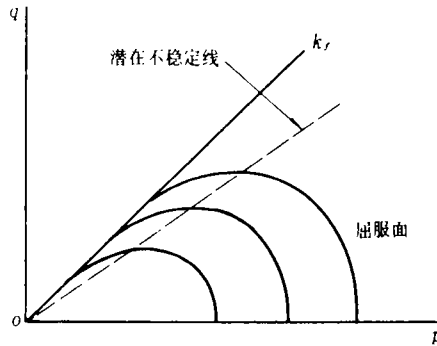


图4 屈服面和潜在不稳定线

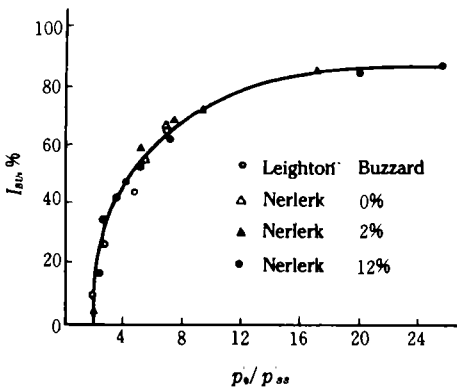


图5 脆性指数与有效应力比的关系

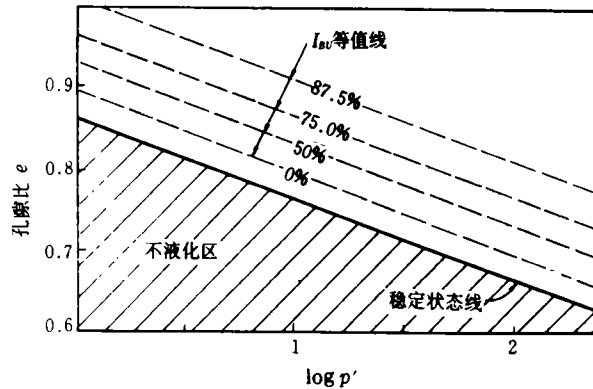


图6  $I_{BU}$ 等值线与稳定状态线

等值线与稳定状态线的相对位置, 当介质的初始状态位于  $I_{BU} \geq 0$  的区域时, 才被认为是“松”的。这时, 若介质受到不排水条件下的扰动, 那么就产生失稳, 最终导致液化。实验表明,  $I_{BU} = 0$  线总是在稳定状态线之上。这一结论解释了为什么有时候介质的初始状态位于稳定状态线之上但却不出现液化的现象。因此,  $I_{BU} = 0$  线可合理地被当作液化和非液化区的分界线。

## 5 失稳条件在海底稳定性分析中的应用

在海底的平缓土坡(坡度小于  $8^\circ$ )中, 大量存在着失稳现象。尽管坡度很缓, 但破坏区域可以很大。Bjerrum (1971)<sup>[11]</sup>曾分析了发生在挪威中部海区大陆架上的松散细砂和粉土层里的大范围的失稳问题, 发现根据传统的稳定性分析结果, 这些失稳了的边坡原来应该是稳定的, 其中的原因当时并不清楚。Lade 等人<sup>[6]</sup>重新分析了这些边坡稳定性问题, 结果表明, 尽管极限平衡方法给出的安全系数在 1.5 以上, 但许多地区土中的应力状态却位于潜在失稳区域。显然, 微小的海平面波动就可以触发大面积的土坡失稳。因为对于松散的细砂和粉土来说, 渗透性相对较低, 同时具有较强烈的剪缩性质, 不稳定条件是极易满足的。极限平衡方法应用于这类边坡问题时, 已经失去其应有的可靠性, 但是用其找出潜在不稳定区域却是切实可行而且非常重要的。具体做法是: ①确定破坏线和潜在失稳线以及相关的强度参数; ②计算出土中各点的应力状态; ③将各点应力状态与潜在失稳条件相比较, 找出潜在失稳区域。

潜在失稳条件的另一个成功的应用就是用其对边坡液化问题进行反分析<sup>[12]</sup>。在这种反分析中, 潜在失稳条件被当作破坏条件。

## 6 结 论

本文利用局部屈服面和局部塑性势面的概念, 讨论了饱和砂土的非稳定性。给出了文献[7]所讨论的失稳点的具体表达形式, 并得到了介质失稳的充分必要条件

- (1) 受到不排水的外部扰动;
- (2)  $\lambda\mu + h/K \leq 0$ 。

如果上述条件得到满足, 那么介质受到任意形式的扰动都会发生失稳, 这些扰动包括外力作用、变形(包括蠕变)以及排水通道受阻等等。介质在莫尔-库仑破坏线以下存在一个潜在失稳区域, 它的下限为潜在失稳线, 该线位于文献[8]的“崩塌面”上。在海底稳定性分析中, 引入“潜在不稳定性”的概念是很必要的也是非常有意义的。

## 参 考 文 献

- 1 Drucker D C. A More Fundamental Approach to Stress-Strain Relations. Procedure: First U. S. National Congress of Applied Mechanics. 487~491.
- 2 Hill R. A General Theory of Uniqueness and Stability in Elasto-plastic Solids. J Mechanics and Physics of Solid, 1958, 6: 236~249.
- 3 Mandel J. Conditions of Stability and Postulate of Drucker Procedure IUTAM Symposium on Rheology

- and Soil Mechanics, Grenoble, France, 1964. 58~68.
- 4 Lade P V, Nelson R B, Ito Y M. Nonassociated Flow and Stability of Granular Materials. *Journal of Engineering Mechanics*, 1987, **113**(9): 1302~1318.
  - 5 Lade P V, Nelson R B, Ito Y M. Instability of Granular Materials with Nonassociated Flow. *Journal of Engineering Mechanics*, 1988, **114**(12): 2173~2186.
  - 6 Lade P V. Static Instability and Liquefaction of Loose Fine Sandy Slopes. *Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE*, 1992, **118**(1): 51~71.
  - 7 Koender M A, Sellmeijer J B. Liquefaction of Unstable Slopes. *Int J Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1992, **16**: 571~579.
  - 8 Sladen J A, D'Hollander R D, Krahn J. The Liquefaction of Sands, a Collapse Surface Approach. *Canadian Geotechnical Journal*, 1985, **22**: 564~578.
  - 9 Chu J, Lo S-C R, Lee I K. Strain-Softening Behaviour of Granular Soil in Strain-Path Testing. *Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE*, 1992, **118**(2): 191~208.
  - 10 Vermeer P A. A Simple Shear- Band Analysis Using Compliance. *Procedure IUTAM Conference on Deformation and Failure of Granular Material. Delft Holland*, 1982. 493~499.
  - 11 Bjerrum L. Subaqueous Slope Failures in Norwegian Fiords. *NGI Publication 88, Norway*, 1971.
  - 12 Sladen J A. Back Analysis of the Nerlerk Berm Liquefaction Slides. *Canadian Geotechnical Journal*, **22**: 579~588.

## On the Instability of Saturated Sands

*Wei Chang-fu    Jiang Li-mao    Zhang Geng-de*

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences)

**Abstract** Non-associated flow may lead to the instability of sand and non-unique solution of the problem, but neither Drucker's nor Hill's postulate gives necessary but sufficient conditions for stability of granular materials. Based on the concepts of local yield and plastic potential surface, non-associative behaviour of saturated sands is analyzed, and a sufficient and necessary condition for the stability is proposed. The potential instability line is established on the  $p'-q$  plane, which is on the "collapse surface"<sup>[8]</sup>.

**Key words** nonassociated flow, instability, local yield and plastic potential surface, collapse surface.