

# 三维 Euler 方程的两种高效高分辨率算法 及其在高速进气道中的应用\*

王保国 刘秋生

清华大学力学系, 北京 100084

卞荫贵

中国科学院力学研究所

**摘要** 提出了两种计算三维 Euler 流场的有效算法:一种是作者提出并发展的三维 LU-TVD 杂交新格式;另一种是 Euler 方程空间七点三维强隐式新算法;两种算法都与有限体积离散相结合,而且都引进了高分辨率的机制,它们分别用于高速进气道三种工况的数值模拟,得到了满意的计算结果。

**关键词** Jameson-Turkel 的 LU 格式, Stone 的 SIP 格式, LU-TVD 杂交格式, 三维强隐式算法, 计算与实验的比较

## 1 引言

大型三维流场的数值模拟是当前国际上热门课题之一,尤其是航天飞机、飞船和高速飞行器研制的兴起,更促进了三维流场数值模拟的大力发展。高速飞行器,尤其是高速进气道和航天飞机的绕流流场是非常复杂的。通常流场中存在着复杂的激波系,存在着波系间的相互作用,存在着强的粘性流动与无粘流的干扰,并且在一定条件下还会有流动分离的问题。所有这些复杂的流动特性给数值模拟带来了很大困难,然而这些恰恰是当代计算流体力学急待需要发展的前缘问题。

复杂流场数值模拟的关键问题之一是捕捉激波和提高激波数值解的分辨率;对于三维流动,还有一个如何提高计算效率、发展快速解法的问题。围绕这两大方面的关键问题,近十几年来国内外学者们做了大量的工作,尤其是 Beam & Warming 和 Steger & Pulliam 的隐式近似因子分解格式、MacCormack 的三步显格式、Jameson 的多步 Runge-Kutta 有限体积法、以及 van Leer、Harten、Osher、张涵信等人的矢量通量分裂格式、TVD 格式和其它耗散型格式更为突出。TVD 格式具有激波分辨率高与非物理振荡小的特点,但显式的 TVD 格式耗计算机机时过多,因此要向隐式发展;Jameson-Turkel 的 LU 格式<sup>[1]</sup>和 Stone 的 SIP 强隐式格式<sup>[2]</sup>都是快速求解 Euler 方程组的有效方法,但它们并不能保证捕捉激波的质量问题;将 LU 与 TVD 相结合,因此文献[3]针对定常流问题提出一种新的 LU-TVD 杂交方法使得捕捉的激波分辨率较高,而且流场迭代求解的收敛速度又快。采取这种格式,文献[3-8]分别完成了一系列的内流及叶栅绕流的二维与三维计算,捕捉到了高质量的激波,并用较小的计算机机时得到了满意的流场收敛解;所有这些都表明了该格式

\* 国家自然科学基金及国家博士后重点资助项目,本文部分内容曾在 1993 年全国博士后大会上宣读

的可行性和生命力。最近,文献[9]又将这种格式作了发展,在处理数值通量计算时采用了张涵信教授 NND 的思想<sup>[10]</sup>,对通量差分作 minmod;数值实践表明:这种处理要比 Harten 数值通量的计算节省许多计算量。对于 Stone 的强隐式格式,文献[11-13]分别用它求解过跨音速流函数方程组并获得成功;文献[14-16]又分别对 Stone 的强隐式作了重要改进,引进了对称型的辅助矩阵,并从数学上分析了改进的 SIP 过程及收敛条件;从完成的大量二维算例表明:改进的 SIP 格式是成功的。

本文在有限体积离散的基础上,分别将 LU-TVD 杂交格式和 SIP 强隐式格式推广到三维,并用于三维高速进气道 Euler 方程的数值模拟。本文完成了零攻角的三种工况(马赫数  $M_\infty=0.85, 2.65$  和  $3.0$ )和  $5^\circ$  攻角一种工况(马赫数  $M_\infty=3.0$ )下的流场计算,给出了它们的结果。最近,我们又分别将这两种算法推广用于三维湍流 Reynolds 平均 Navier-Stokes 方程组,获得了成功<sup>[17,18]</sup>,与美国 NASA Ames 风洞实验比较,结果令人满意。

## 2 用张量表达的基本方程组和基本算子

为便于下文叙述,首先给出高阶张量的梯、旋、散度表达式。采取 Einstein 求和规约后,主要的梯度公式为<sup>[19]</sup>:

$$\vec{\nabla} a = \vec{e}^i e^j \vec{\nabla}_i a_j \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \Pi = \vec{e}^i e^j e^k \vec{\nabla}_i t_{jk} \quad (2)$$

主要的旋度公式为:

$$\vec{\nabla} \times \Pi = \epsilon^{ijk} e_k e^\beta \vec{\nabla}_i t_{j\beta} \quad (3)$$

主要的散度公式为<sup>[4,19]</sup>:

$$\vec{\nabla} \cdot \Pi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} t^{ij} e_j) \quad (4)$$

式中  $\vec{a}$  表示任一矢量,  $a_k$  和  $a^k$  分别为  $\vec{a}$  的协变和逆变分量;  $\Pi$  表示任一个二阶对称张量,常表为  $\Pi = \vec{e}^j e^k t_{jk}$ ;  $\vec{\nabla}_i$  表示协变导数;  $\epsilon^{ijk}$  为 Eddington 张量;  $(x^1, x^2, x^3)$  构成任意曲线坐标系,  $\vec{e}_i$  和  $\vec{e}^i$  分别为这个坐标系的协变和逆变基矢量,而  $g$  的定义为:

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \quad (5)$$

式中  $g_{ij}$  定义为

$$g_{ij} = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^k}{\partial x^j} \quad (6)$$

这里  $(y^1, y^2, y^3)$  构成直角坐标系;显然

$$\sqrt{g} = \frac{\partial(y^1, y^2, y^3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} \quad (7)$$

在任意曲线坐标系下,微分形式的 Navier-Stokes 方程的通用形式为<sup>[4]</sup>:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (8)$$

这里  $t$  为时间;  $\mathbf{W}$  和  $\mathbf{E}$  的定义为<sup>[8]</sup>:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \vec{V} \\ e \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho \vec{V} \\ \rho \vec{V} \vec{V} - \mathbf{\Pi} \\ e \vec{V} - \mathbf{\Pi} \cdot \vec{V} - \lambda \nabla T \end{bmatrix} \quad (9)$$

这里  $\rho, e, \vec{V}, T$  和  $\lambda$  分别为密度, 总内能, 速度, 温度和热传导系数;  $\mathbf{\Pi}$  为应力张量, 常表为  $\vec{e}^i \vec{e}^j t_{ij}$  而粘性应力张量  $\tau$  常表为  $\vec{e}^i \vec{e}^j \tau_{ij}$ , 两者间的关系为:

$$t_{ij} = \tau_{ij} - P g_{ij} \quad (10)$$

变形率张量  $\epsilon$  常表为  $\vec{e}^i \vec{e}^j \epsilon_{ij}$  并且还有

$$\epsilon = \frac{1}{2} [\nabla \vec{V} + (\nabla \vec{V})^T] \quad (11)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) \quad (12)$$

在实际计算中,  $\mathbf{E}$  常被分成无粘部分  $\mathbf{F}_{inv}$  与粘性部分  $\mathbf{F}_{vis}$  的和<sup>[4]</sup>, 即

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}_{inv} + \mathbf{F}_{vis} \quad (13)$$

这里后两项的定义为

$$\mathbf{F}_{inv} = \begin{bmatrix} \rho \vec{V} \\ \rho \vec{V} \vec{V} + P(\vec{i} \vec{i} + \vec{j} \vec{j} + \vec{k} \vec{k}) \\ (e + P) \vec{V} - \lambda \nabla T \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{F}_{vis} = - \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \\ \tau \cdot \vec{V} \end{bmatrix} \quad (15)$$

注意上式中  $\tau$  为粘性应力张量, 它是个二阶的对称张量, 通常表为:

$$\tau = \vec{e}^i \vec{e}^j [\mu (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i) + \lambda^* g_{ij} (\nabla \cdot \vec{V})] \quad (16)$$

式中,  $\lambda^*$  为膨胀粘性系数, 只有在引入 Stokes 假设时即选取  $\lambda^*$  等于  $-\frac{2}{3}\mu$  时, (16) 式才能简化为:

$$\tau_{ij} = \mu [\nabla_i v_j + \nabla_j v_i - \frac{2}{3} g_{ij} (\nabla \cdot \vec{V})] \quad (17)$$

另外, N-S 方程的积分形式为:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \mathbf{W} d\Omega + \oint_{\partial \Omega} \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} d\sigma = 0 \quad (18)$$

### 3 有限体积离散及 LU-TVD 杂交格式

对于任一个有限体单元, 则(18)式变为:

$$\Delta \mathbf{W}_{ijk}^n + (\Delta \tau) \sum_{l=1}^6 (\mathbf{F})_l^{n+1} = 0 \quad (19)$$

式中,

$$F = F(W) = \vec{S} \cdot E \tag{20a}$$

$$\Delta W^n = W^{(n+1)} - W^{(n)} \tag{20b}$$

$$\vec{S} = S_1 \vec{i} + S_2 \vec{j} + S_3 \vec{k} \tag{20c}$$

注意式(19)中  $(\Delta\tau)$  并不代表粘性应力张量的增量,而具有如下定义(下文同):

$$(\Delta\tau) = \frac{\beta\Delta t}{\Omega_{ijk}} \tag{20d}$$

当  $\beta = \frac{1}{2}$  时,格式在时间上具有二阶精度。对于无粘流,则  $E$  退化为  $F\vec{i} + G\vec{j} + H\vec{k}$ ; 这里  $F, G, H$  的定义可参见文献[20]或文献[19]里的式(4),并且  $W$  定义为  $[\rho, \rho u, \rho v, \rho w, e]^T$ , 而  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  为直角坐标系的单位矢量。于是,对于无粘流动  $F^{(n+1)}$  可线性化为<sup>[9]</sup>:

$$F_{i+1/2}^{(n+1)} \approx F_{i+1/2}^{(n)} + A_{i+1/2}^+ \Delta W_i^n + A_{i+1/2}^- \Delta W_{i+1}^n \tag{21}$$

在本文中  $A^+, A^-$ , 和  $A$  的定义不同于文献[9], 而为:

$$A^+ = \frac{\lambda_7}{\lambda_8} (A - \lambda_6 I), \tag{22a}$$

$$A^- = -\frac{\lambda_6}{\lambda_8} (A - \lambda_7 I), \tag{22b}$$

$$\lambda_8 = \lambda_7 - \lambda_6, \Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5\}, \tag{22c}$$

$$\lambda_6 = \min\{\min(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5), 0\}, \tag{22d}$$

$$\lambda_7 = \max\{\max(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5), 0\}, \tag{22e}$$

$$A = S_1 A + S_2 B + S_3 C = A^+ + A^- \tag{22f}$$

这里  $A, B$  和  $C$  分别为  $F, G$  和  $H$  的 Jacobian 阵。

按照 LU-TVD 杂交格式的求解办法,三维 Euler 方程的求解可由下面两步完成:

第一步——解  $L$  算子:

$$\begin{aligned} [I + \Delta\tau(A_{i+1/2}^+ + A_{j+1/2}^+ + A_{k+1/2}^+)] \Delta \tilde{W}_{ijk}^{(n)} &= -\left(\frac{\Delta\tau}{\beta}\right) \tilde{R}_{ijk}^{(n)} \\ &- \Delta\tau A_{i-1/2}^+ \Delta \tilde{W}_{i-1}^{(n)} - \Delta\tau A_{j-1/2}^+ \Delta \tilde{W}_{j-1}^{(n)} - \Delta\tau A_{k-1/2}^+ \Delta \tilde{W}_{k-1}^{(n)} \end{aligned} \tag{23}$$

第二步——解  $U$  算子:

$$\begin{aligned} [I + \Delta\tau(A_{i-1/2}^- + A_{j-1/2}^- + A_{k-1/2}^-)] \Delta W_{ijk}^{(n)} &= \Delta \tilde{W}_{ijk}^{(n)} \\ &- \Delta\tau A_{i+1/2}^- \Delta W_{i+1}^{(n)} - \Delta\tau A_{j+1/2}^- \Delta W_{j+1}^{(n)} - \Delta\tau A_{k+1/2}^- \Delta W_{k+1}^{(n)} \end{aligned} \tag{24}$$

式中  $\tilde{R}_{ijk}^{(n)}$  项为

$$\tilde{R}_{ijk}^{(n)} = (\tilde{F}_{i+1/2} + \tilde{F}_{i-1/2} + \tilde{F}_{j+1/2} + \tilde{F}_{j-1/2} + \tilde{F}_{k+1/2} + \tilde{F}_{k-1/2})^{(n)} \tag{25}$$

这里  $\tilde{F}$  的定义同文献[9],即采用了张涵信教授的 NND 格式<sup>[10]</sup>计算出的数值通量。

应该说明的是:在式(21)、(23)、(24)、(25)中,省略了一些下标的标记;例如  $\Delta W_{i+1}^n$  与  $\Delta W_{i-1}^n$  则分别省略了下标  $j, k$  与  $i, j$ ; 这一做法在国际上也是流行的<sup>[21]</sup>。

于是式(23)、(24)、(22)、(25)便组成了本文构造的 LU-TVD 杂交新格式,显然  $L$  算子与  $U$  算子方程的求解均可逐点扫描推进,计算起来十分方便。本文采用这种格式计算了攻角为  $0^\circ$ , 而进口马赫数分别为 3.00, 2.65 和 0.85 三种工况下的高速进气道三维流场;另外还计算了攻角为  $5^\circ$ , 进口马赫数为 3.00 时进气道三维流场;详细结果在本文第 5

节讨论。

#### 4 Euler 方程组的三维七点强隐式格式

本节不同于文献[13],是讨论 Euler 方程组在三维情况下的强隐式算法。在三维情况下,借助于有限体积离散技术,则 Euler 方程被离散为:

$$A_1 \Delta W_D^n + A_2 \Delta W_S^n + A_3 \Delta W_W^n + A_4 \Delta W_P^n + A_5 \Delta W_E^n + A_6 \Delta W_N^n + A_7 \Delta W_U^n = -R^n \quad (26)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A_D \\ A_2 &= A_S \\ A_3 &= A_W \\ A_4 &= 6A_P + \frac{2\Omega_P}{\Delta t} \\ A_5 &= A_E \\ A_6 &= A_N \\ A_7 &= A_U \\ R &= 6F_P + F_D + F_S + F_W + F_E + F_N + F_U \\ \Delta W^n &= W^{n+1} - W^n \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

这里下标  $D, S, W, P, E, N, U$  分别表示  $(i, j, k-1), (i, j-1, k), (i-1, j, k), (i, j, k), (i+1, j, k), (i, j+1, k), (i, j, k+1)$ ; 显然这里  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$  都是  $5 \times 5$  的矩阵。

将式(26)分解为如下形式:

$$[a_p E_x^{-3} + b_p E_x^{-2} + c_p E_x^{-1} + d_p][I + e_p E_x^{+1} + f_p E_x^{+2} + g_p E_x^{+3}] \Delta W_p^n = -R^n \quad (28)$$

式中,  $E_x^{-1}, E_x^{+1}, \dots$  均是移位算子,例如:

$$E_x^{-1} \Delta W_{i,j,k} = \Delta W_{i-1,j,k} \quad (29a)$$

$$E_x^{+1} \Delta W_{i,j,k} = \Delta W_{i+1,j,k} \quad (29b)$$

在式(28)里  $I$  为  $5 \times 5$  的单位阵。显然式(28)中包含这样的两个算子:一个是下块四对角的  $L$  算子,一个是上块四对角的  $U$  算子;它们的求解也是逐点扫描推进,十分方便。系数  $a, b, c, d, e, f, g$  都是  $5 \times 5$  的矩阵,经推导其值由下式决定:

$$a_p = A_1 [I + \alpha(e_D + f_D)]^{-1} \quad (30a)$$

$$b_p = A_2 [I + \alpha(e_S + g_S)]^{-1} \quad (30b)$$

$$c_p = A_3 [I + \alpha(f_W + g_W)]^{-1} \quad (30c)$$

$$d_p = A_4 + a_p(\alpha e_D + \alpha f_D - g_D) + b_p(\alpha e_S + \alpha g_S - f_S) + c_p(\alpha f_W + \alpha g_W - e_W) \quad (30d)$$

$$e_p = d_p^{-1}(A_5 - \alpha a_p e_D - \alpha b_p e_S) \quad (30e)$$

$$f_p = d_p^{-1}(A_6 - \alpha c_p f_W - \alpha a_p f_D) \quad (30f)$$

$$g_p = d_p^{-1}(A_7 - \alpha b_p g_S - \alpha c_p g_W) \quad (30g)$$

这里  $\alpha$  为循环变数,其取值范围在  $0-1$  之间。如果将式(28)简记为

$$LU \Delta W_p^n = -R^n \quad \text{或者} \quad LU \Delta W_p^n = -\tilde{R}^n \quad (31)$$

这里的  $L$  和  $U$  分别代表(28)式左端两个中括号里的算子。于是由

$$L\Delta V_p^* = -R^n \quad \text{或者} \quad L\Delta V_p^* = -\tilde{R}^n \quad (32)$$

这里  $\tilde{R}$  将由下文式(34)决定。于是由式(32)中解出  $\Delta V_p^*$  值,再由

$$U\Delta W_p^* = \Delta V_p^* \quad (33)$$

便得到了  $\Delta W_p^*$  值。显然式(32)与式(33)的求解具有显式的特征,它们的求解与 Beam-Warming 的近似因式分解格式<sup>[22]</sup>相比其计算量要少得多。因此,式(32)、式(33)连同式(30)及下文中的式(34)便构成了求解三维 Euler 方程组的新的强隐式格式,本文用它成功地计算了高速进气道在进口马赫数为 3.00,攻角为  $0^\circ$  时的三维无粘流场,得到了收敛的三维 Euler 解。

## 5 典型高速进气道算例

因篇幅所限,本节扼要介绍高速进气道三种工况下的计算结果:

(1)用杂交格式计算零攻角、马赫数  $M_\infty = 0.85$  的进气道三维 Euler 流场—进气道的形状如图 1 所示,计算网格采用 TTM 法<sup>[23]</sup>生成,这是一套贴体曲线网格,由它们构成一组有限体积法中的单元。在计算网格形成的过程中采用了沿周向作一系列子午截面,在每个截面上再用 TTM 法解 Poisson 方程,生成贴体网格;图 2 与图 3 分别给出了子午面上和周向截面的网格图;图 4 给出了收敛曲线;在本算例计算中,取 Courant 数为 6,经历 320 个时间步,残差下降三个数量级。

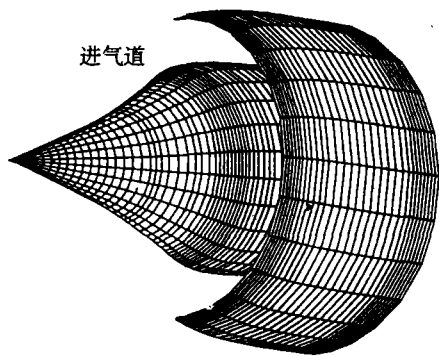


图 1 进气道形状

Fig. 1 Configuration of supersonic inlet

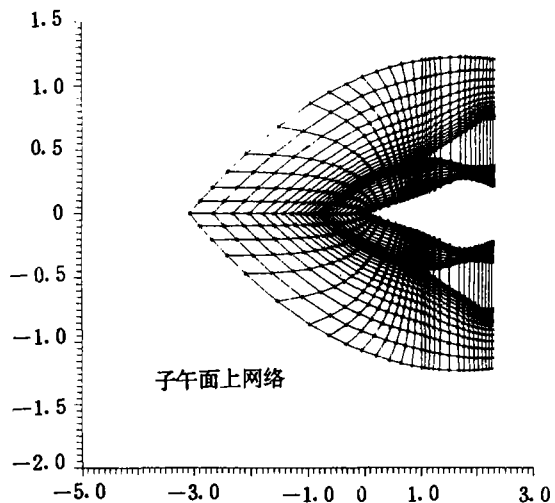


图 2 子午面内计算网格

Fig. 2 Grid on the meridional plane

(2)用杂交格式计算零攻角、进口马赫数为 3.00 的高速进气道三维 Euler 流场—图 5 给出了子午面上全场等马赫线的分布。从这张图上可以清楚地看到;该工况下复杂的激波系以及激波反射的情况。本算例算出的内通道出口截面的马赫数为 2.2 左右;另外,从这张图也相当满意的反映出零攻角下的三维流场的特点即在子午截面上当进气道的几何形状为轴对称时,其无粘的三维流场在零攻角进气下也具有轴对称的特征。此外,本算例也

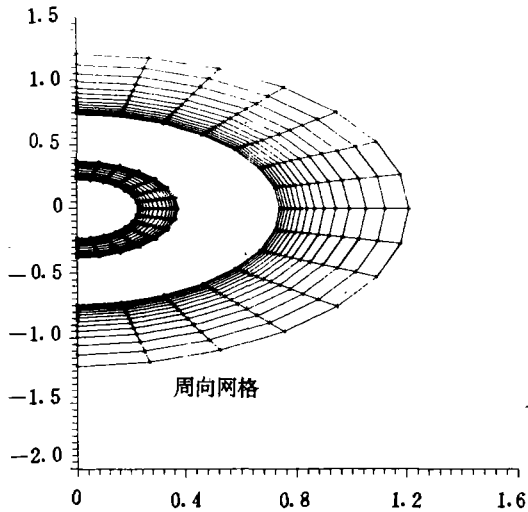


图3 周向某截面网格

Fig. 3 Grid along the circumferential direction

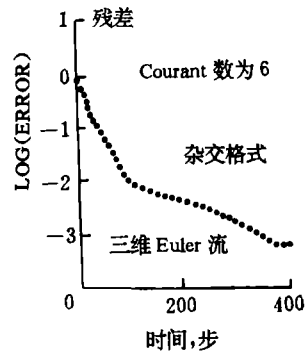


图4 残差收敛史

Fig. 4 Convergence history of residual

表明了采用张涵信教授的 NND 格式<sup>[10]</sup>计算数值通量要比采用 Herten 的 TVD 格式<sup>[24]</sup>简单、省时且计算机编程易行。图 6 给出了子午面上全场速度矢量的分布图。

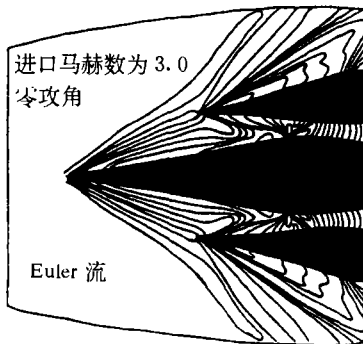


图5 子午面内全场等马赫线分布

Fig. 5 Mach number contours

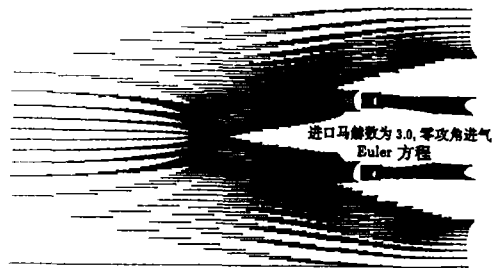


图6 子午面内全场速度矢分布

Fig. 6 Velocity vectors distributions

(3)用杂交格式计算进口马赫数为 3.00,进气攻角为  $5^\circ$ 时的高速进气道三维 Euler 流场一图 7 给出了子午面上全场等马赫线的分布。由于进气攻角的存在,子午面上流场的上、下两个部分已有明显的差别,仅就内通道出口截面的马赫数而言:上半部分为 2.15 左右,而下半部分为 2.42 左右,两者相差 0.27。

(4)用强隐式格式计算进口马赫数为 3.00,零攻角进气的高速进气道三维 Euler 流场一图 8 给出了收敛史曲线;可以看出:经过 280 个时间步,残差下降了三个数量级;这个迭代次数要比三维势函数方程 SIP 解法的迭代次数略多些。计算出的全场等马赫数线分布与图 5 较相近。计算中发现激波附近有数值振荡,为此我们采取了两种措施去计算式(28)中的右端项:一种是在式(28)右端显式的加入二阶和四阶的人工粘性项<sup>[25]</sup>;另一种是将式(28)右端项的数值通量项采用张涵信的 NND 格式<sup>[10]</sup>,即将式(28)右端项的  $R^n$  换

成  $\tilde{R}^n$  :

$$\tilde{R}^n = 2[\tilde{F}_{i+1/2} + \tilde{F}_{i-1/2} + \tilde{F}_{j+1/2} + \tilde{F}_{j-1/2} + \tilde{F}_{k+1/2} + \tilde{F}_{k-1/2}]^n \quad (34)$$

这里  $\tilde{F}$  表示通量  $F$  采用 NND 格式后得到的数值通量。计算表明,采用后种措施更为有效些,它减轻了激波附近的数值振荡,改善和提高了捕捉激波的质量。

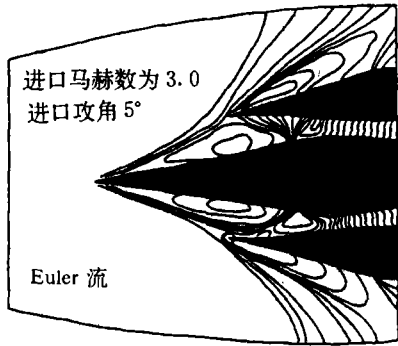


图 7 子午面内全场等马赫线分布

Fig. 7 Mach number contours

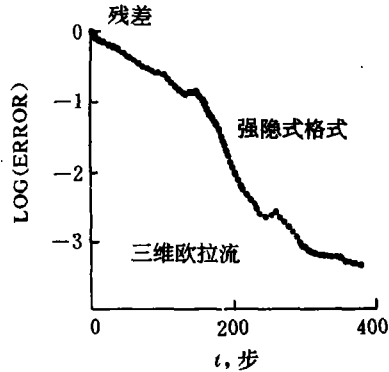


图 8 残差收敛史

Fig. 8 Convergence history of residual

(5)用杂交格式计算进口马赫数为 2.65,零攻角进气时的高速进气道设计工况。这里仅计算该工况下的三维 Euler 方程解,文献[17,18]分别给出了该工况下采用 LU-TVD 杂交格式和采用 SIP 强隐式格式求解三维、湍流 Reynolds 平均 N-S 方程组的结果。图 9 给出了本文无粘计算得出的子午面上全场等马赫线分布的局部放大图,图 10 给出了周向某截面等马赫线的分布,图 11 和图 12 分别给出了沿中心体表面和唇罩内侧面压强的分布曲线。显然,本文计算出的结果与实验数据<sup>[26]</sup>在变化趋势上大体还是一致的,文献[17,18]提供了更满意的结果。

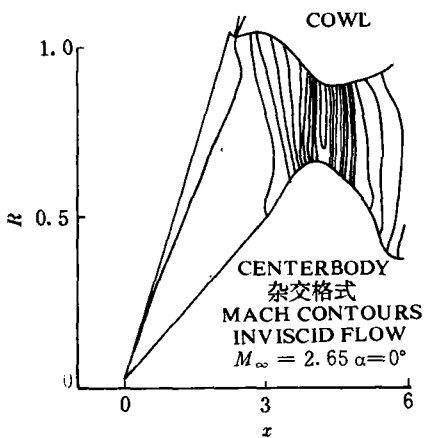


图 9 全场等马赫线分布(局部放大)

Fig. 9 Mach number contours

(Enlarged flow field)

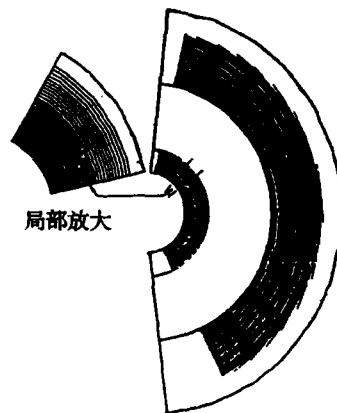


图 10 周向某截面等马赫线分布

Fig. 10 Mach number contours

(on circular cross section)



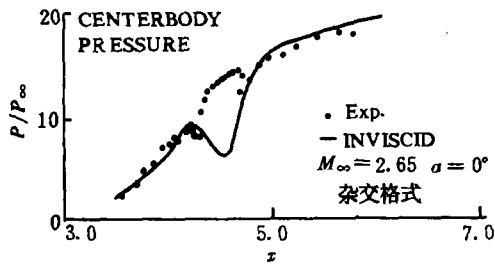


图 11 沿中心体表面的压力分布

Fig. 11 Surface pressure distributions

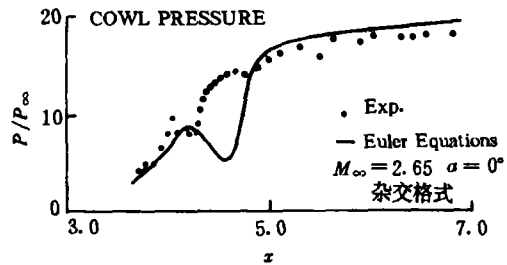


图 12 沿唇罩内侧面的压力分布

Fig. 12 Surface pressure distributions

## 6 两点结论

(1) 本文提出的两种新算法均为高效率的数值格式。对于三维问题, 它们都可化成一个  $L$  算子和一个  $U$  算子, 而且都可以逐点扫描求解, 都避免了其它隐式算法中常出现的各点联立求解带状方程组的现象, 因此它们计算起来都十分简便。但应该指出的是: 两种算法中的  $L$  与  $U$  算子的元素是不同的。

(2) 从激波分辨率的角度上说, LU-TVD 杂交新格式要比三维新的强隐式格式好; 但是从计算量的角度上讲, 后者要比前者计算量小。从工程应用的经济角度考虑, 用三维强隐式格式求解出的无粘流场可以相当经济的为 Navier-Stokes 方程提供很好的初值近似。总之, 两种新的格式各有各的特点, 但它们都有快速求解、具备高效率、高分辨率的共同特征。

## 参考文献

- [1] Jameson A. Turkel E. Implicit schemes and LU decompositions. *Math Comp.* 1981. 37 (156): 385-397
- [2] Stone H L. Iterative solution of Implicit approximations of multidimensional partial differential equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis.* 1968. 5 (3): 530-558
- [3] 王保国. 新的解跨音速 Euler 方程的隐式杂交方法. *航空学报.* 1989. 10 (7): 309-315
- [4] 王保国. 跨音速叶栅流动数值计算的新方法. 中国科学院博士学位论文, 1990: 1-149
- [5] 王保国, 陈乃兴. A new high-resolution hybrid scheme for homogeneous and nonhomogeneous hyperbolic conservation laws. 1st International Symposium on Experimental and Computational Aerothermodynamics of Internal Flows. Beijing China. 1990: 93-101
- [6] 高书春, 王保国. 用 LU 分解格式及 FAS 型多层网格计算流体力学 Euler 方程. *计算物理.* 1990. 7 (1): 39-44
- [7] 王保国, 卞荫贵. An efficient implicit hybrid scheme for hyperbolic conservation laws in curvilinear coordinates. 1st Chinese-Soviet Workshop on Complex Fields of Gas Flow. Beijing China. 1991: 43-44
- [8] 王保国, 卞荫贵. 求解三维欧拉流的隐-显式格式及改进的三维 LU 算法. *计算物理.* 1992. 9 (4): 423-425
- [9] 王保国, 卞荫贵. 用杂交格式求解三维高速进气道内外流场. 全国第六届跨声速流学术讨论会, 全国第七届高超声速流学术会论文, 1993
- [10] 张涵信. 无波动、无自由参数的耗散差分格式. *空气动力学学报.* 1988. 6 (2): 143-165
- [11] 王保国. New iterative algorithm between stream function and density for transonic cascade flow. *AIAA.* 1985: 85-1594
- [12] 王保国. An iterative algorithm between stream function and density for transonic cascade flow. *AIAA Journal of*

Propulsion and Power, 1986, 2(3): 259-265

- [13] 王保国. 跨音速流函数方程强隐式解及确定密度场的新方案. 计算物理, 1985, 2(4): 474-481
- [14] 王保国, 陈乃兴. 计算流体中一个改进的强隐式格式及迭代的收敛性. 计算物理, 1989, 6(4): 431-440
- [15] 王保国. 跨声流函数方程的多层网格——强隐式解法. 计算物理, 1987, 4(1): 71-78
- [16] 王保国, 陈乃兴. An improved SIP scheme for numerical solutions of transonic stream-function equation. International Journal for Numerical Method in Fluids, 1990, 10(5): 591-602
- [17] 王保国, 卞荫贵. An LU-TVD finite volume scheme for solving 3-D Reynolds-averaged Navier-Stokes equations of high speed inlet flows. First Asian Computational Fluid Dynamics Conference, 1995, (3): 1055-1060 (Hong Kong)
- [18] 王保国, 刘晔, 刘秋生, 卞荫贵. Numerical simulation of high speed inlets using 3-D Reynolds-averaged Navier-Stokes equations and SIP-finite volume scheme. First Asian Computational Fluid Dynamics Conference, 1995, (3): 1061-1066 (Hong Kong)
- [19] 王保国. On general form of Navier-Stokes equations and implicit factored scheme. Applied Mathematics and Mechanics, 1988, 9(2): 179-188
- [20] 王保国, 卞荫贵. 转动坐标系中三维跨声速欧拉流的有限体积—TVD 格式. 空气动力学学报, 1992, 10(4): 472-481
- [21] Yee H C, Harten A. Implicit TVD schemes for hyperbolic conservation laws in curvilinear coordinates. AIAA Journal, 1987, 25(2): 266-274
- [22] Beam R M, Warming R F. An implicit factored scheme for the compressible Navier-Stokes equations. AIAA Journal, 1978, 16(4): 393-402
- [23] Thompson J F, Thames F C, Mastin C W. Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary Two-dimensional bodies. J Computational Phys, 1974, 15(3): 299-319
- [24] Harten A. On a class of high resolution Total-Variation-Stable finite difference schemes. SIAM J Numer Anal, 1984, 21(1): 1-23
- [25] Pulliam T H, Steger J L. Recent improvement in efficiency, accuracy, and convergency for implicit approximate factorization algorithms. AIAA 85-0360, 1985
- [26] Smeltzer D B, Sorensen N E. NASA TN D-6971, 1972

1994年8月收到

## TWO EFFICIENT AND HIGH-RESOLUTION HYBRID SCHEMES FOR SOLVING 3-D EULER EQUATIONS AND ITS APPLICATION TO HIGH SPEED INLET FLOWS

Baoguo WANG    Qiusheng LIU

Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084

Yingui Bian

Prof. Institutur of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080

### ABSTRACT

In this paper, two numerical schemes are respectively proposed and developed. The schemes are: (1) high-resolution LU-finite volume scheme (we refer to this scheme as scheme-1), (2) SIP-finite volume scheme (we call scheme-2). The features of two schemes

lie in: ① finite volume approach to adapt to three dimensional body of complex shape, ② in the discretization for space variables, an improved LU decompositions combing a new kind of flux-splitting is proposed for scheme-1; SIP finite volume scheme is developed for scheme-2. ③ in the time marching to obtain the steady result, we use implicit scheme of second order accuracy. ④ Zhang's modified flux function is applied to calculated usually called residual term of the finite differential equations for schemes 1 and 2.

The Schemes are used to compute the 3-D external and internal flow field for an mixed-compression inlet. Numerical experiments show that the schemes generate good shock resolution and many offer greater potential efficiency for use in 3-D practical problems.

**Keywords:** Jameson-Turkel's LU scheme, Stone's SIP scheme, LU-TVD hybrid scheme, improved SIP scheme, Euler equations, -inlet flows