应用数学和力学，第15卷第10期（1994年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Schrödinger 算子的极大耗散扩张*

田 立 新

（镇江 江苏工学院数理系，中国科学院力学所LNM开放研究室）

（戴世强推荐，1993年11月22日收到）

摘 要

本文研究Schrödinger 算子的极大耗散扩张．引入广义不定度规空间，得到在自然边界空间中，Schrödinger算子极大耗散扩张表示形式，为进一步研究非线性 Schrödinger 方程无穷维动力系统的长期混沌行为作准备．

关键词 无穷维动力系统 非线性Schrödinger方程 不定度规空间 耗散算子

一、引 言

非线性Schrödinger方程的长期动力学行为的研究使得孤立波理论研究更为丰富．由于非线性 Schrödinger 方程的复杂性，使得这类问题的研究非常困难，这方面的工作见[1]～[4]，特别是[1]研究该类方程的吸引子及分形维数．我们的工作将利用近年来飞速发展的无穷维动力系研究时间混沌的办法来研究非线性 Schrödinger 方程．本文首先解决这项研究的第一步工作，给出这类方程中 Schrödinger 算子的极大耗散扩张表示形式，接下来将利用这一表示形式研究该类方程吸引子的几何结构、时间混沌、惯性流形及惯性形式等动力系统长期行为．在本文第二节给出一类新空间：广义不定度规空间，它在一般 Banach 空间意义下成立有普遍意义．同时，给出 Schrödinger 算子的自然边界空间，它是一类广义不定度规空间，将利用该空间中不确定的度规，给出 Schrödinger 算子的极大耗散扩张与广义不定度规空间中的极大负子空间一一对应，同时给出表示式．

由[1][4]，Schrödinger算子指$-h\Delta+V(x)$，定义在$C^\infty(M)$，M是C^∞紧 Riemann 流形，在域Sobolev空间$H^2(M)$中有唯一的自共轭扩张．但在非紧Riemann流形，这类算子就相当复杂，自然也就引起 Schrödinger 方程研究的困难．为此，本文先解决一类这样的算子的扩张表示．设

$$
\begin{aligned}
&L_0f=if''-f\\
&D(L_0)=\{f:f,\ f',\ f''\in L^{p'}[0,\ 2\pi],\ f(0)=f(2\pi),\\
&\qquad f'(0)=f'(2\pi),\ 1<p'<\infty\}
\end{aligned}
$$

L_0将是本文研究的一类Schrödinger算子．

* 国家自然科学基金资助项目

令$X=L^{p'}[0, 2\pi]$，$p'>1$，在X中作广义半内积$[\cdot, \cdot]_p$(见[5])

$$[f, g]_p=\int_0^{2\pi} f\bar{g}|\bar{g}|^{p-2}dx, \qquad 1<p<\infty$$

p与p'可以不同。

显然X中范数$\|f\|=[f, f]^{1/p}$，作$A:D(L_0)\to X$，使$Af=if''$。设$G(L_0)=\{\{f, L_0f\}, f\in D(L_0)\}$。在$X\times X$，构造$Q(\cdot, \cdot)$，使

$$Q(f, g)=(fg)'(2\pi)-(fg)'(0)$$
$$=f'(2\pi)g(2\pi)-f'(0)g(0)+f(2\pi)g'(2\pi)-f(0)g'(0)$$

设$\bar{H}=\bar{H}_+\oplus\bar{H}_-$，“$\oplus$”指直和，这儿

$$\bar{H}_+=\mathrm{span}\{f\in X, Q(f, f)\geqslant 0\}, \quad \bar{H}_-=\mathrm{span}\{f\in X, Q(f, f)\leqslant 0\}$$

记$\hat{H}=\bar{H}/G(L_0)$。构造$\hat{Q}=\hat{Q}_++\hat{Q}_-$，使

$$\hat{Q}_+(\hat{f}_+, \hat{g}_+)=Q(\hat{f}_+, \hat{g}_+)\mathrm{sign}Q(\hat{g}_+, \hat{g}_+), \qquad \hat{f}_+, \hat{g}_+\in\bar{H}_+$$
$$\hat{Q}_-(\hat{f}_-, \hat{g}_-)=Q(\hat{f}_-, \hat{g}_-)(-\mathrm{sign}Q(\hat{g}_-, \hat{g}_-)), \qquad \hat{f}_-, \hat{g}_-\in\bar{H}_-$$

设$\check{H}=\{f:f, f'\in X\}$，$\tilde{H}=\hat{H}\oplus\check{H}$，任意$\tilde{f}\in\{\hat{f}, \check{f}\}$，定义$\tilde{Q}$如下

$$\tilde{Q}(\tilde{f}, \tilde{g})=\hat{Q}(\hat{f}, \hat{g})+[\check{f}, \check{g}],$$

定理1 A是Banach空间X中的对称算子。(定义见[5])

定理2 $(\bar{H}_+/G(L_0), \hat{Q}_+)$，$(\bar{H}/G(L_0), -\hat{Q}_-)$是广义半内积空间。

定理3 $(\hat{H}, \hat{Q})$是广义不定度规空间。

定理4 若L_0的极大耗散扩张是L，则L与$\tilde{H}$中极大负子空间$\tilde{N}$一一对应，并且

$$Lu=iu''-u+\varphi(\hat{u})$$
$$D(L)=\{u:u, u', u''\in X, \hat{u}\in\hat{N}\}$$

$\hat{N}$是$\tilde{N}$的$\tilde{H}$到$\hat{H}$的投影子空间。

二、定 理 的 证 明

本文研究的算子L_0是Banach空间中算子，自然就比 Hilbert 空 间中的算子研究难得多。也正是如此，建立了 Banach 空间中的广义半内积以及广义p自共轭算子、p耗散算子(见[5])。不定度规空间的研究见[6][7]。这里我们构造广义不定度规空间，该空间进一步且比较深入的研究将另文给出。

定义1 R是复（或实）线性空间，$x, y, z\in R$，$\lambda\in C$。定义$\langle y, z\rangle$是满足下述关系的复（或实）数。

(1) $\langle x+y, z\rangle=\langle x, z\rangle+\langle y, z\rangle$；$\langle\lambda x, y\rangle=\lambda\langle x, y\rangle$。

(2) 任意$y\in R$，若$\langle x, y\rangle=0$，则$x=0$。

则称$(R, \langle\cdot, \cdot\rangle)$是广义Krein空间。

定义2 空间$(R, \langle\cdot, \cdot\rangle)$称为广义不定度规空间，若它含有二个子空间$H_+$，$H_-$且

(1) $R=H_+\oplus H_-$，这里$\oplus$是直和且相对于$\langle\cdot, \cdot\rangle$正交，即$\langle x, y\rangle=0, x\in H_+, y\in H_-$。

(2) $(H_+, \langle\cdot, \cdot\rangle)$，$(H_-, -\langle\cdot, \cdot\rangle)$是广义半内积空间。

这里$H_+=\{x\in R|\langle x, x\rangle\geqslant 0\}$，$H_-=\{x\in R|\langle x, x\rangle\leqslant 0\}$。$H_+$，$H_-$分别称为正子空间与负子空间。

引理1 若R是广义不定度规空间，如果$x, y\in R$，$x=x_++x_-$，$y=y_++y_-$，$x_+, y_+\in H_+$，$x_-, y_-\in H_-$，

设 $$[x,\ y]=\langle x_+,\ y_+\rangle+\langle x_-,\ y_-\rangle$$
则$(R,\ [\cdot,\ \cdot])$是广义半内积空间.

证明 关键是证明下述不等式

$$|[x,\ y]|\leqslant[x,\ y]^{1/p}[y,\ y]^{(p-1)/p},\qquad p>1$$

因$ab\leqslant a^p/p+b^q/q$，$a>0$，$b>0$，这儿$1/p+1/q=1$. 由验算可知仅需证明

$$(1+km^{p-1})^p\leqslant(1+k^p)(1+m^p)^{p-1}$$

上述不等式利用Young不等式及级数得到，略去证明.

定义投影算子$P_\pm:\Pi=(R,\ \langle\cdot,\ \cdot\rangle)\to H_\pm$，使$x=x_++x_-\in\Pi\mapsto x_\pm\in H_\pm$.

引理2 L是极大非负子空间的充要条件是$P_+L=H_+$. 每个非负子空间含在一个极大非负子空间中.

证明略去.

定理 1 的证明

设f，$g\in D(L_0)$，则

$$[Af,\ g]_p=\int_0^{2\pi}if''\bar{g}|\bar{g}|^{p-2}dx=\int_0^{2\pi}if''\bar{g}\Big((p-2)\int_0^{|g|}\alpha^{p-3}d\alpha\Big)dx$$

$$=\int_0^{2\pi}if''\bar{g}(p-2)\Big(\int_0^{\infty}X_{[0,\ |g|]}(x)\alpha^{p-3}d\alpha\Big)dx$$

$$=(p-2)\int_0^{\infty}\alpha^{p-3}\Big(\int_0^{2\pi}i\bar{g}X_{[|g|>\alpha]}(x)df'\Big)d\alpha$$

$$=(p-2)\int_0^{\infty}\alpha^{p-3}\Big(-\int_0^{2\pi}i\bar{g}'X_{[|g|>\alpha]}(x)df\Big)d\alpha$$

$$=(p-2)\int_0^{\infty}\alpha^{p-3}\int_0^{2\pi}f(\overline{-ig''})X_{[|g|>\alpha]}(x)dxd\alpha$$

$$=-(p-2)\int_0^{\infty}\alpha^{p-3}\int_0^{2\pi}f(\overline{ig''})X_{[|g''|>\alpha]}(x)dxd\alpha$$

$$=-\int_0^{2\pi}f(\overline{ig''})\int_0^{|g''|}d(\alpha^{p-2})dx$$

$$=-\int_0^{2\pi}f(i\bar{g}'')|g''|^{p-2}dx$$

$$=-[f,\ Ag]_p$$

因此A是对称算子.

定理 2 的证明

若$\bar{f}\in G(L_0)$，则$\bar{Q}_\pm(\bar{f},\ \bar{f})=0$且$G(L_0)$是核空间. 现证明$\bar{Q}_+(\cdot,\ \cdot)$是广义半内积空间，仅要证

$$|\bar{Q}_+(\bar{f},\ \bar{g})|\leqslant|\bar{Q}_+(\bar{f},\ \bar{f})|^{1/p}|\bar{Q}_-(\bar{g},\ \bar{g})|^{(p-1)/p},\qquad \bar{f},\ \bar{g}\in H_\pm$$

事实上，

$$|\bar{Q}_+(\bar{f},\ \bar{g})|=|Q(\bar{f},\ \bar{g})|=|\mathrm{Re}[A^*f,\ g]|$$
$$=0.5|\mathrm{Re}[A^*f,\ g]+\mathrm{Re}[f,\ A^{**}g]|$$

因为$A^*\supset-A$，$-A^{**}\subset A^*$，则

$$|\bar{Q}_+(\bar{f},\ \bar{g})|=0.5|\mathrm{Re}[A^*f,\ g]+\mathrm{Re}[f,\ -A^*g]|$$

建立$H\times H$中新的广义半内积如下

$$[\bar{u},\ \bar{v}]_{12}=\mathrm{Re}[u^1,\ v^1]+\mathrm{Re}[u^2,\ v^2]$$

$$\bar{u}=\{u^1,\ u^2\},\ \bar{v}=\{v^1,\ v^2\}\in H\times H$$

仿照引理1，$[\cdot,\ \cdot]_{12}$是$H\times H$中的广义半内积．设

$$W\bar{u}=W\{u^1,\ u^2\}=\{u^2,\ u^1\},\ \bar{u}\in H\times H$$

则W是$(H\times H,\ [\cdot,\ \cdot]_{12})$中的广义$p$自共轭算子．置

$$W_1\bar{u}=W\bar{u},\ \bar{u}\in H_+,\ W_1\bar{u}=-W\bar{u},\ \bar{u}\in\bar{H}_+\backslash H_+$$

则W_1是广义正定算子，则易得W_1的下述不等式成立：

$$|[W_1\bar{u},\ \bar{v}]_{12}|\leqslant|[W_1\bar{u},\ \bar{u}]_{12}|^{1/p}|[W_1\bar{v},\ \bar{v}]_{12}|^{(p-1)/p}$$

易证

$$|\bar{Q}_+(\bar{f},\ \bar{g})|\leqslant0.5|[Wu',\ u']_{12}|^{1/p}|[Wv',\ v']_{12}|^{(p-1)/p}$$

$$=0.5\{|\mathrm{Re}[A^*f,\ f]_p+\mathrm{Re}[f,\ A^{**}f]_p|\}^{1/p}\{|\mathrm{Re}[A^*g,\ g]_p+\mathrm{Re}[g,\ A^{**}g]_p|\}^{(p-1)/p}$$

$$=|\bar{Q}_+(\bar{f},\ \bar{f})|^{1/p}|\bar{Q}_-(\bar{g},\ \bar{g})|^{(p-1)/p}$$

其中 $u'=\{f,\ A^*f\},\ v'=\{g,\ A^*g\}$

完成证明．

引理3 $\hat{Q}(\hat{f},\ \hat{g})=\bar{Q}(\bar{f},\ \bar{g})$，$\hat{f}$，$\hat{g}$是$\bar{f}$，$\bar{g}$的陪集，这儿$\hat{f}$，$\hat{g}\in\hat{H}$，$\bar{f}$，$\bar{g}\in\bar{H}$．

证明 显然$\hat{Q}(\hat{f},\ \hat{f})=0$，$\hat{f}\in G(L_0)$．若$\hat{f}\in\hat{H}$，$\bar{f}_0\in G(L_0)$，首先我们证明

$$\hat{Q}(\hat{f}+\bar{f}_0,\ \hat{f})=\hat{Q}(\hat{f},\ \hat{f})$$

事实上 $$\hat{Q}(\hat{f}+\bar{f}_0,\ \hat{f})=\bar{Q}_+(\bar{f}_++\bar{f}_0,\ \bar{f}_+)+\bar{Q}_-(\bar{f}_-,\ \bar{f}_-)\tag{2.1}$$

$$\bar{Q}_+(\bar{f}_++\bar{f}_0,\ \bar{f}_+)=Q(\bar{f}_++\bar{f}_0,\ \bar{f}_+)\mathrm{sign}Q(\bar{f}_+,\ \bar{f}_+)$$

$$=[A^*(f_++f_0),\ f_+]\mathrm{sign}Q(\bar{f}_+,\ \bar{f}_+)$$

$$=[A^*f_+,\ f_+]\mathrm{sign}Q(\bar{f}_+,\ \bar{f}_+)+[Af_0,\ f_+]\mathrm{sign}Q(\bar{f}_+,\ \bar{f}_+)$$

$$=\bar{Q}_+(\bar{f}_+,\ \bar{f}_+)+[Af_0,\ \bar{f}_+]\mathrm{sign}Q_-(\bar{f}_+,\ \bar{f}_+)$$

其中 $\bar{f}_+=\{f_+,\ L_1f_+\}\in\bar{H}_+,\ L_1=A^*-I,\ \bar{f}_0=\{f_0,\ L_0f_0\}\in G(L_0)$

现证明$[Af_0,\ f_+]=0$．由定理2，类似有

$$|[Af_0,\ f_+]|=|Q(\bar{f}_0,\ \bar{f}_+)|=0.5|[Wf_0',\ f_+']_{12}|$$

$$\leqslant0.5|[Wf_0',\ f_0']_{12}|^{1/p}|[Wf_+',\ f_+']_{12}|^{(p-1)/p}$$

$$=0.5|[Af_0,\ f_0]_p|^{1/p}|[Wf_+',\ f_+']_{12}|^{(p-1)/p}=0$$

这儿 $f'=\{f,\ A^*f\},\ \bar{f}_0=\{f_0,\ L_0f_0\},\ \bar{f}_+=\{f_+,\ L_1f_+\}$

所以$[Af_0,\ f_+]=0$．

$$\hat{Q}(\hat{f}+\bar{f}_0,\ \hat{f})=\bar{Q}(\bar{f}+\bar{f}_0,\ \bar{f})=\bar{Q}_+(\bar{f}_+,\ \bar{f}_+)+\bar{Q}_-(\bar{f}_-,\ \bar{f}_-)$$

$$=\bar{Q}(\bar{f},\ \bar{f})$$

接下去证明

$$\hat{Q}(\hat{f},\ \hat{f}+\bar{f}_0)=\bar{Q}(\bar{f},\ \bar{f}+\bar{f}_0)=\bar{Q}(\bar{f},\ \bar{f}),$$

$$\bar{f}\in\bar{H}_+\oplus\bar{H}_-,\ \bar{f}_0\in G(L_0)$$

这儿$\bar{f}=\bar{f}_++\bar{f}_-$，注意到$\bar{f}_++\bar{f}_0\in\bar{H}_+$，$\bar{f}_-+\bar{f}_0\in\bar{H}_-$．

$$\bar{Q}(\bar{f},\ \bar{f}+\bar{f}_0)=\bar{Q}_+(\bar{f}_+,\ \bar{f}_++\bar{f}_0)+\bar{Q}_-(\bar{f}_-,\ \bar{f}_-)$$

$$=\bar{Q}_+(\bar{f}_+,\ \bar{f}_+)+\bar{Q}_-(\bar{f}_-,\ \bar{f}_-+\bar{f}_0)$$

因为

$$\bar{Q}=(\bar{f}_+,\ \bar{f}_++\bar{f}_0)=\bar{Q}_+(\bar{f}_+,\ \bar{f}_+)+\bar{Q}_-(0,\ \bar{f}_0)=\bar{Q}_+(\bar{f}_+,\ \bar{f}_+)$$
$$=\bar{Q}_+(\bar{f}_+,\ \bar{f}_++\bar{f}_0)=\bar{Q}(\bar{f}_+,\ \bar{f}_++\bar{f}_0)$$

则 $$\bar{Q}_+(\bar{f}_+,\ \bar{f}_++\bar{f}_0)=\bar{Q}_+(\bar{f}_+,\ \bar{f}_+)$$

相同的理由得到

$$\bar{Q}_-(\bar{f}_-,\ \bar{f}_-+\bar{f}_0)=\bar{Q}_-(\bar{f}_-,\ \bar{f}_-)$$

则

$$\bar{Q}(\bar{f},\ \bar{f}+\bar{f}_0)=\bar{Q}_+(\bar{f}_+,\ \bar{f}_+)+\bar{Q}_-(\bar{f}_-,\ \bar{f}_-)=\bar{Q}(\bar{f},\ \bar{f})$$
$$\hat{Q}(\hat{u},\ \hat{u})=\bar{Q}(\bar{u},\ \bar{u}),\quad \hat{u}\in \bar{H}_+/G(L_0)\oplus \bar{H}_-/G(L_0),\quad \bar{u}\in \bar{H}_+\oplus \bar{H}_-$$

$\hat{u}$是$\bar{u}$的陪集。

定理 3 的证明

因为$\bar{Q}$是不定度规且$\bar{Q}$半线性，则有$(\hat{H},\ \hat{Q})$是广义不定度规空间，本定理得证。

设$\bar{N}$是$(\bar{H},\ \bar{Q})$的负子空间，$\hat{N}$是$\bar{N}$到$\hat{H}$投影，这儿$\bar{H}=\hat{H}\oplus\check{H}$，易证$\hat{N}$是$(\hat{H},\ \hat{Q})$中负子空间且

$$\|\check{u}\|^p\leqslant -\hat{Q}(\hat{u},\ \hat{u})=-\bar{Q}(\bar{u},\ \bar{u})\leqslant c\|\hat{u}\|^p,\qquad 任意\{\hat{u},\ \check{u}\}\in\bar{N}$$

引理4 若$\bar{N}$是极大负子空间，则$\hat{N}$是$(\hat{H},\ \hat{Q})$中的极大负子空间。

引理5 若$\bar{N}$是极大负子空间，则

$$\|\check{f}\|^p\leqslant -\hat{Q}(\hat{f},\ \hat{f}),\quad \bar{f}=\{\hat{f},\ \check{f}\}\in\bar{N}$$

定义$\varphi:\hat{f}\mapsto\check{f}$，则$\varphi$是$\hat{N}$到$\check{H}$的压缩映射。又，若$\varphi$是压缩映射，则$\varphi$的图象是$\bar{H}$中极大负子空间。

定理 4 的证明

设L是极大耗散扩张，则

$$\mathrm{Re}[Lf,\ f]\leqslant 0,\qquad f\in D(L)$$

若$f\in D(L_0)$，$g\in D(L)$，则

$$\mathrm{Re}[L_0f,\ g]=\mathrm{Re}[Af,\ g]-[f,\ g]$$
$$|\mathrm{Re}[Af,\ g]|\leqslant|\mathrm{Re}[L_0f,\ g]|+|[f,\ g]|\leqslant(\|L_0f\|+\|f\|)\|g\|^{p-1}$$
$$|[Af,\ g]|\leqslant 2(\|L_0f\|+\|f\|)\|g\|^{p-1}$$

所以$g\in D(A^*)$，$D(L_1)\supset D(L)$。对任意$g\in D(L_0)$，$f\in D(L)$，成立

$$|[g,\ Lf-L_1f]|\leqslant\|g\|\|Lf-L_1f\|^{p-1}$$

由[6]广义半内积空间的Riesz表示定理，存在唯一$\check{f}\in\check{H}$，使对任意$g\in D(L_0)$，成立

$$[g,\ Lf-L_1f]=[g,\ \check{f}],\quad Lf-L_1f=\check{f}$$

因此$Lu=L_1u+\check{f}$。这时

$$\hat{Q}(\hat{f},\ \hat{g})=\bar{Q}(\bar{f},\ \bar{g})=\bar{Q}_+(\bar{f}_+,\ \bar{g}_+)+\bar{Q}_-(\bar{f}_-,\ \bar{g}_-),\qquad \hat{f},\ \hat{g}\in\hat{H}$$

$\hat{f}$，$\hat{g}$是$\bar{f}$，$\bar{g}$的陪集元，且

$$\bar{f}=\bar{f}_++\bar{f}_-,\ \bar{g}=\bar{g}_++\bar{g}_-,\qquad \bar{f}_+,\ \bar{g}_+\in\bar{H}_+,\ \bar{f}_-,\ \bar{g}_-\in\bar{H}_-$$

下述不等式将成立

$$\hat{Q}(\hat{f},\ \hat{f})-m\|f-\check{f}\|^p+\|\check{f}\|^p\leqslant 0\tag{2.2}$$

其中m是任意常数，$\bar{f}=\{f,\ L_1f\}\in G(L_0)$，$\hat{f}$是$\bar{f}$的陪集元。为此，先证明

$$Q(\bar{f},\ \bar{f})-m\|f-\check{f}\|^p+\|\check{f}\|^p\leqslant 0,\qquad \bar{f}\in G(L_1)\tag{2.3}$$

因为 $$Q(\bar{f},\ \bar{f})=[L_1f,\ f]-[f,\ f]$$

则 $\mathrm{Re}[L_1 f, f]=Q(\bar{f}, \bar{f})-[f, f]$

由于

$$\mathrm{Re}[Lf, f]\leqslant 0,\ \mathrm{Re}[L_1 f+\check{f}, f]\leqslant 0$$
$$Q(\bar{f}, \bar{f})-\mathrm{Re}[f, f]+\mathrm{Re}[\check{f}, f]\leqslant 0$$

则要证(2.3)式，只需证明

$$-m\|f-\check{f}\|^p+\|\check{f}\|^p\leqslant-[f, f]+\mathrm{Re}[\check{f}, f] \tag{2.4}$$

事实上，

$$\mathrm{Re}[-f+\check{f}, f]$$
$$\leqslant|[-f+\check{f}, f]|\leqslant\|f-\check{f}\|\|f\|^{p-1}$$
$$\leqslant\|f-\check{f}\|^p/p+\|f\|^q/q, \qquad 1/p+1/q=1$$

上述不等式左边$=[f, f]+\mathrm{Re}[\check{f}, f]$，则

$$[f, f]-\mathrm{Re}[\check{f}, f]\geqslant-\|f-\check{f}\|^p/p-\|f\|^p/q$$

用上述不等式于(2.4)式，则需证明

$$-m\|f-\check{f}\|^p+\|\check{f}\|^p-\|f-\check{f}\|^p/p-\|f\|^p/q\leqslant 0$$

或 $$(-m-1/p)\|f-\check{f}\|^p+\|\check{f}\|^p\leqslant\|f\|^p/q \tag{2.5}$$

注意到

$$\mathrm{Re}[-f+\check{f}, \check{f}]$$
$$\leqslant|[-f+\check{f}, \check{f}]|\leqslant\|\check{f}-f\|\|\check{f}\|^{p-1}\leqslant\|f-\check{f}\|^p/p+\|\check{f}\|^q/q$$
$$q\mathrm{Re}[-f+\check{f}, \check{f}]\leqslant(q/p)\|f-\check{f}\|^p+\|\check{f}\|^p$$
$$-q\mathrm{Re}[f, \check{f}]+(q-1)\|\check{f}\|^p\leqslant q\|f-\check{f}\|^p/p$$
$$-(q/(q-1))\mathrm{Re}[f, \check{f}]+\|\check{f}\|^p\leqslant(q/(p(q-1)))\|f-\check{f}\|^p$$
$$-(q/(q-1))\mathrm{Re}[f, \check{f}]\leqslant(q/(p(q-1)))\|f-\check{f}\|^p-\|\check{f}\|^p$$

因此成立

$$\|\check{f}\|^p-\|f-\check{f}\|^p\leqslant p\mathrm{Re}[f, \check{f}]\leqslant p\|f\|\|\check{f}\|^{p-1}$$
$$\leqslant p[(1/p)\|f\|^p+(1/ql)\|\check{f}\|^{(p-1)q}]$$
$$=l\|f\|^p+(p/ql)\|\check{f}\|^p$$

上式中$l>0$且使$1-(p/ql)>0$，取

$$0<l<(\sqrt{1+4p}+1)/q$$

则 $$l^2-l/q-p/q^2<0,\ 1-(p/ql)>0$$

上式也用到如下不等式：

$$ab\leqslant la^p/p+b^q/ql,\ 1/p+1/q=1,\ a>0,\ b>0,\ l>0$$

类似我们可以得到

$$(1-p/ql)\|\check{f}\|^p-\|f-\check{f}\|^p\leqslant l\|f\|^p$$

或

$$\|\check{f}\|^p-\|f-\check{f}\|^p/[1-p(ql)^{-1}]\leqslant l\|f\|^p/[1-p(ql)^{-1}]$$

用上不等式于(2.5)，我们仅需证明

$$(-m-1/p+1/[1-p(ql)^{-1}])\|f-\check{f}\|^p\leqslant(-l/(1-p(ql)^{-1})+1/q)\|f\|^p \tag{2.6}$$

取$m=-1/p+1/[1-p(ql)^{-1}]<0$，则(2.6)式成立，事实上(2.6)式左边为0，

$$右边系数=-l/[1-p(ql)^{-1}]+1/q>0$$

(2.6)式自然就成立。因此(2.3)式成立，故

$$Q(\tilde{f},\tilde{f})-m\|f-\check{f}\|^p+\|\check{f}\|^p\leqslant 0,\quad \tilde{f}=\{f,L_1f\},m<0$$

因而 $Q(\tilde{f},\tilde{f})\leqslant 0$，$\tilde{f}\in\tilde{H}_-$，$\bar{Q}(\tilde{f},\tilde{f})=\bar{Q}_-(\tilde{f},\tilde{f})$

则 $\hat{Q}(\hat{f},\hat{f})=\bar{Q}(\tilde{f},\tilde{f})=\bar{Q}_-(\tilde{f},\tilde{f})$

从而(2.2)式成立.

因为$Lv=L_1v=L_0v$，$v\in D(L_0)$．$\check{f}=\varphi(\hat{f})$及$\check{f}$依赖于$\hat{f}$在$\hat{H}$中的陪集，$-m<0$，则$-m\|f-\check{f}\|^p\geqslant 0$．因此，(2.2)式的中间一项可以省去且

$$\hat{Q}(\hat{f},\hat{f})+\|\varphi(\hat{f})\|^p\leqslant 0,\qquad f\in D(L_0)$$

因此$\{\hat{f},\varphi(\hat{f})\}$，$f\in D(L_0)$形成一个$\tilde{H}$中对应于$\hat{Q}$的负子空间．

此外，若$Lu=L_1u+\varphi(\hat{u})$且L是L_0的扩张，$\{\{\hat{u},\varphi(\hat{u})\}|u\in D(L)\}$是$\tilde{H}$的极大负子空间，则能证明(2.2)成立，所以$L$是$p$耗散算子．因此，存在$\tilde{H}$的相应的负子空间，且得到负子空间下的表示，定理证毕．

参 考 文 献

[1] Yan Yin, Attractors and dimensions for discretizations of a weakly damped Schrödinger equation and a Sine-Gorden equation, *Nonlinear Analysis, TMA*, **20** (12) (1993), 1417—1452.

[2] Soffer, A., Multichannel nonlinear scattering for nonintegrable equations, *J. Differential Equation*, **98** (1992), 376—390.

[3] Hayashi, Nakao, The initial value problem for the derivative nonlinear Schrödinger equation in the energy space, *Nonlinear Analysis, TMA*, **20**(7) (1993), 823—833.

[4] Helffer, B., Semi-classical analysis for the Schrödinger operator and applications, *Lecture Notes in Math.*, **1336**, Springer Verlag (1988).

[5] Wei Guo-qiang and Shen You-qiang, The generalized p normal operators and p hyponomal operators on Banach space, *Chinese Ann. Math. Ser B*, **8**(1) (1987), 70—79.

[6] Langer, H., Spectral functions of definitzable operators in Krein spaces, *Lecture Notes in Math.*, **948**, Springer-Verlag (1984), 1—46.

[7] Bongar, L., Indefinite inner product spaces, *Ergeb. Math. Grenzgeb*, **78**, Springer-Verlag (1974).

The Maximum Dissipative Extension of Schrödinger Operator

Tian Li-xin

(Department of Mathematics and Physics, Jiangsu Institute of Technology, Zhenjiang, Jiangsu; LNM, Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

In the present paper we study the maximum dissipative extension of Schrödinger operator, introduce the generalized indefinite metric space and get the representation of maximum dissipative extension of Schrödinger operator in natural boundary space, make preparation for the further study longtime chaotic behavior of infinite dimension dynamics system in nonlinear Schrödinger equation.

Key words infinite dimension dynamics system, nonlinear Schrödinger equation, indefinite metric space, dissipative operator