第8卷 第1期 应用数学与计算数学学报 Vol.8 No.1
1994年6月 COMM. ON APPL. MATH. AND COMPUT. Jun., 1994

广义流体动力学守恒方程组的弱解的存在性和唯一性问题*

朱 刚 沈孟育 高 智

(清华大学工程力学系，北京100084) (中国科学院力学研究所，北京100081)

摘要 本文讨论了非定常广义流体动力学方程组[1]在大尺度情况下平均流动参数所应满足的条件，提出了相应的假设，证明了大尺度平均流动参数弱解的存在性和唯一性.

关键词: 存在性; 唯一性; 守恒方程组.

1. 引 言

流体力学基本方程组为经典Navier-Stokes 方程组. 由N-S 方程组导出的相应湍流方程有经典Reynolds 方程组和湍流大涡模拟(LES) 方程组[3]. 另外，近年还发展了通过精细数值求解N-S 方程组获得湍流场的DNS 方法[4]. 这几类基本方法在提供湍流流场信息方面既有区别，又有一定的联系.

文[1] 中提出了新的流体守恒方程组，认为在对流体状态平均量，即对流体大尺度运动的研究和数值计算中，必须同时考虑分子随机运动和流体小尺度运动对大尺度运动的作用. 这些作用将在流体大尺度运动方程组中增添新的附加项; 这些附加项则可通过对分子随机运动以及对流体小尺度运动的某种平均运算来获得. 对分子随机运动取统计平均将导致动量、能量和质量的附加输运，这就是分子粘性. 热传导和质量扩散. 为了获得流体小尺度运动对大尺度运动作用的附加项，同时对时间和空间取平均. 对流体小尺度运动取时间-空间平均同样导致动量、能量和质量的附加输动. 这些非线性附加输运项与平均采用的时间尺度以及空间尺度有关. 利用分子统计平均诸公式[2] 和时间-空间平均运算诸规则，通过考虑空间小体积元内流体质量、动量和能量的守恒关系，经运算可导得新的流体守恒方程组:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i}=0\\
&\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t}+\overline{u}_j\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial^2\overline{u}_i}{\partial x_j\partial x_j}+\frac{\partial(\overline{\lambda}_{ij})}{\partial x_j}
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

其中:

$$
[\overline{u}_i,\overline{p},\overline{\lambda}_{ij}]=\frac{1}{\Delta t_n\pi_k^3\Delta_{k,n}}\int_t^{t-\Delta t_n}\iiint_{x_k-\frac{1}{2}\Delta_{k,n}}^{x_k+\frac{1}{2}\Delta_{k,n}}[u_i,p,(u_i^{<}-\overline{u}_i^{<})(u_j^{<}-\overline{u}_j^{<})]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \tag{1.2}
$$

本文1993年11月22日收到.
* 本项研究得到国家自然科学基金和高等学校博士学科点专项基金资助.

这里，$u_i^>$ 和$u_i^<$ 分别为u_i 的大尺度分量和小尺度分量. $(u_i^< - \overline{u}_i^<)$ 可由下面的小尺度方程组解得：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial(u_i^< - \overline{u}_i^<)}{\partial x_i} = 0 \\
&\frac{\partial(u_i^< - \overline{u}_i^<)}{\partial t} + (u_j^< - \overline{u}_j^<)\frac{\partial(u_i^< - \overline{u}_i^<)}{\partial x_j} \\
&= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial(p^< - \overline{p}^<)}{\partial x_j} + \nu\frac{\partial^2(u_i^< - \overline{u}_i^<)}{\partial x_j \partial x_j} - \overline{u}_j\frac{\partial(u_i^< - \overline{u}_i^<)}{\partial x_j} - (u_j^< - \overline{u}_j^<)\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial(\overline{\lambda}_{ij})}{\partial x_j}
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

以上所得的新的流体守恒方程(1.3), 在层流时即为N-S 方程; 在湍流时，若流体小尺度运动的空间非均匀效应(即高波数运动部分) 可以忽略，但时间非均匀效应(即高频运动部分) 不可忽略，则此方程组化为经典的湍流Reynolds 方程；若流体小尺度运动的时间非均匀效应可忽略，但空间非均匀效应不可忽略，则此方程组化为白噪声滤波运算下的大涡模拟方程.

2. 基本假设

由于在最小尺度级$\overline{u}_i = u_i, u_i$ 满足N-S 方程组；若进一步假定u_i 在数值网格尺度级满足线性化N-S 方程组，则可在网格尺度内求得u_i 的近似解析解，该解析解为网格节点上物理平均量的函数，因之旋涡非线性作用项$\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\lambda}_{ij})$ 亦为网格节点上物理平均量的已知函数，大尺度(LS) 方程组近似封闭，小尺度方程组可以丢弃，此时计算流场只需求解LS 方程组. 这样，我们可以做如下简化，认为$\overline{\lambda}_{ij}$ 仅是时均量的函数. 由此，我们只需讨论大尺度方程组(LS)(1.1) 的性质，而且有：

$$
\frac{\partial \overline{\lambda}_{ij}}{\partial x_j} = g(\vec{u}, \vec{v}) \le M\overline{u}_j\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \qquad M \le 1 \tag{2.1}
$$

引入双线性形式：

$$
\begin{aligned}
d\left(\frac{\partial \overline{\lambda}_{ij}}{\partial x_j}, \vec{w}\right) &= \int_\Omega \left(\frac{\partial \overline{\lambda}_{ij}}{\partial x_j} \cdot \vec{w}\right) d\Omega \\
&\le \int_\Omega \left(M\overline{u}_j\frac{\partial \overline{u}_{ij}}{\partial x_j} \cdot \vec{w}\right) d\Omega \\
&\le M a_1(\vec{u}; \vec{v}, \vec{w})
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

其中三线性形式$a_1(\cdot;\cdot,\cdot)$ 的定义及性质见[6].

引理1　　$d(g(\vec{u}, \vec{v}), \vec{v}) = 0.$

证明　由假设(2.2) 可知：

$$
d(g(\vec{u}, \vec{v}), \vec{w}) \le M a_1(\vec{u}; \vec{v}, \vec{w})
$$

取$\vec{w} = \vec{v}$, 则：

$$
d(g(\vec{u}, \vec{v}), \vec{v}) \le M a_1(\vec{u}; \vec{v}, \vec{v}) = 0
$$

且$d(g(\vec{u}, \vec{v}), \vec{w}) \ge 0$ 故得证.　□

3. 守恒方程变分问题

引人Hilbert 空间V 和H:

$$V = \{\vec{v}|\vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^n, \mathrm{div}\vec{v} = 0\}$$
$$H = \{\vec{u}|\vec{u} \in (L^2(\Omega))^n, \mathrm{div}\vec{u} = 0, \nu_n\vec{u} \triangleq \vec{u}\cdot\vec{n}|_{\delta_\Omega} = 0\}$$

并且，V 赋予$(H_0^1(\Omega))^n$ 范数，H 赋予范数:

$$\|\vec{u}\|_H^2 = \|\vec{u}\|_0^2 + \|\mathrm{div}\vec{u}\|_0^2$$

易证有下列稠密的连续嵌人关系:

$$V \searrow H = H' \searrow V'$$

设T 为一固定实数，考虑空间:

$$W((0,T);V,V') = \{\vec{u}|\vec{u} \in L^2((0,T);V),\ \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} \in L^2((0,T);V')\}$$

且赋予范数:

$$\|\vec{u}\|_w = \left(\int_0^T \left(\|\vec{u}\|_v^2 + \left\|\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right\|_{*V}^2\right)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$W((0,T);V,V')$ 为Hilbert 空间，简记为$W(0,T)$. 此空间有Green 公式成立:

$$\int_0^T \left(< \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{u}(t), \vec{v}(t) > + < \vec{u}(t), \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} >\right)\mathrm{d}t$$
$$=< \vec{u}(T), \vec{v}(T) > - < \vec{u}(0), \vec{v}(0) > \qquad \forall \vec{u}, \vec{v} \in W(0,T) \tag{3.1}$$

其中，$<\cdot,\cdot>$ 表示V 和V' 的对偶积. 引人$HS((0,T);V,H)$, 设$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) & t \in [0,T] \\ 0 & t \notin [0,T] \end{cases}$ 并设$\hat{u}(\tau)$ 为$\tilde{u}(t)$ 的Fourier 变换，则$\forall s \in R^+$:

$$H^s((0,T);V,H) = \{u|u \in L^2((0,T);V), |\tau|^s\hat{u}(\tau) \in L^2(R,H)\}$$

赋予范数:

$$\|u\|_{HS}^2 = \int_0^T \|u(t)\|_V^2\,\mathrm{d}t + \int_R |\tau|^{2s}\|\hat{u}(\tau)\|_H^2\,\mathrm{d}\tau$$

则:

$$V \searrow \Rightarrow H^s((0,T);V,H) \searrow L^2((0,T);H) \tag{3.2}$$

定义$\Theta = \{\vec{v}|\vec{v} \in (\mathcal{D}(\Omega))^n, \mathrm{div}\vec{v} = 0\}$, Θ 在V 和H 中稠密.

考察非线性方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\vec{u}}{\partial t} - \nu\Delta\vec{u} + (\vec{u}\nabla\vec{u}) + \nabla p - \dfrac{\partial\overline{\lambda}_{ij}}{\partial x_j} = f & \forall(x,t) \in \Omega \times R^+ \\ \mathrm{div}\vec{u} = 0 & \forall(x,t) \in \Omega \times R^+ \\ \vec{u}|_\Gamma = 0 & \forall(x,t) \in \Gamma \times R_+ \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0 & \forall x \in \Omega \end{cases} \tag{3.3}$$

其中Ω为有界域，$\Gamma=\partial\Omega, R^+=[0,+\infty)$. 引人双线性形式$a_0(\vec{u},\vec{v})$和三线性形式$a_1(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$(见[6]). 并设$\vec{u},\vec{w}\in L^2((0,T);V)$. 定义抽象函数$t\to A_0\vec{u}(t)$:

$$A_0\vec{u}(t)\in V',\quad <A_0\vec{u}(t),\vec{v}>=a_0(\vec{u}(t),\vec{v})\quad \forall\vec{v}\in V$$

故$t\to A_0\vec{u}(t)\in L^2((0,T);V')$. 同样，有

$$A_1(\vec{w}(t),\vec{u}(t))\in V',<A_1(\vec{w}(t),\vec{u}(t),v>=a_1(\vec{w}(t);\vec{u}(t),v)\quad \forall v\in V$$

根据Sobolev 不等式，有:

$$\|A_1(\vec{u},\vec{u})\|_{L^2((0,T);V')}\le\sqrt{2}\|\vec{u}\|_{L^\infty((0,T),H)}\|\vec{u}\|_{L^2((0,T),V)}$$

根据(2.2), 我们有$D(\vec{w},\vec{u})\in V'$, 使:

$$<D(\vec{w},\vec{u}),v>=d(g(\vec{w},\vec{u}),v)\qquad \forall v\in V \tag{3.4}$$

故$t\to D(\vec{w},\vec{u})$ 在$[0,T]$ 上可测.

引理2　设$\vec{w},\vec{u}\in L^2((0,T);V)\bigcap L^\infty((0,T);H)$, 则

$$D(\vec{w},\vec{u})\in L^2((0,T);V')\quad (n=2) \tag{3.5}$$

证明　山:

$$|d(g(\vec{u},\vec{v}),\vec{w})|\le M|a_1(\vec{u},\vec{v},\vec{w})|\le M\|\vec{w}\|_{0,4}\|\vec{u}\|_{0,4}|\vec{v}|_1$$

得

$$\|D(\vec{u},\vec{v})\|_{*V}\le M\|\vec{w}\|_{0,4}\|\vec{u}(t)\|_{0,4}\qquad (rma.e.\text{在}(0,T))$$

再山Sobolev 嵌入不等式:

$$\|f\|_{0,4,\Omega}\le\sqrt{2}\|f\|_0^{\frac{1}{2}}|f|_1^{\frac{1}{2}}.$$

代入:

$$\|D(\vec{u},\vec{v})\|_{*V}^2\le 2M^2|\vec{w}(t)|_1|\vec{u}(t)|_1\|w(t)\|_0\|\vec{u}(t)\|_0$$

作积分:

$$\int_0^T\|D(\vec{u},\vec{v})\|_{*V}^2\mathrm{d}t\le M^2\|\vec{w}(t)\|_{L^\infty((0,T),H)}\|\vec{u}(t)\|_{L^\infty((0,T),H)}\|\vec{w}\|_{L^2((0,T),V)}\|\vec{u}\|_{L^2((0,T),V)}$$

山此得证. □

山引理2 证明过程还可得:

引理3

$$\|D(\vec{u},\vec{v})\|_{L^2((0,T),V')}\le\sqrt{2}M\|\vec{u}\|_{L^\infty((0,T),H)}\|\vec{u}\|_{L^2((0,T),V)}. \tag{3.6}$$

设$\vec{f}\in L^2((0,T);(H^{-1}(\Omega))^n),\vec{u}_0\in H$, 则原问题(3.3) 的弱问题为:

求$\vec{u}\in L^2((0,T);V)\bigcap L^\infty((0,T);H)$, 使

$$
(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{u}(t);\vec{v}) + a(\vec{u}(t),\vec{u}(t),\vec{v}) = <\vec{f}(t),\vec{v}) + (D(\vec{u},\vec{u}),\vec{v}) \quad \forall \vec{v}\in V \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0 \end{cases}
$$

其中$a(\vec{w};\vec{u},\vec{v}) = a_0(\vec{u},\vec{v}) + a_1(\vec{w};\vec{u},\vec{v})$.

定理1 设$\vec{u}\in L^2((0,T);V)\bigcap L^\infty((0,T);H)$ 是(P) 问题的解，则$\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\in L^2((0,T);V')$

证明 根据A_0, A_1 性质及引理1 可证. □

4. 半离散化问题的性质

由于V 是可分的，故它存在基函数系$\vec{w}_m(m\geq 1)$ 使得由$\{\vec{w}_1,\vec{w}_2,\cdots,\vec{w}_m\}$ 所张成的有限维子空间$V_m\to V(m\to\infty)$, 由此，有下列问题:

求$\vec{u}_m(t)=\sum\limits_{j=1}^{\infty} g_{jm}(t)\vec{w}_j$, 使满足:

$$
(\mathrm{P}_m) \quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{u}_m(t),w_j) + a(\vec{u}_m(t),\vec{u}_m(t),w_j) = < f(t),w_j > + (D(u_m(t),u_m(t)),w_j) \\ u_m(0)=u_{0m} \quad u_{0m}\in V_m\text{且}u_{0m}\to u_0(m\to\infty) \end{cases} \tag{4.1}
$$

定理2 问题(P_m) 在$L^\infty((0,T);H)\bigcap L^2((0,T);V)$ 内有唯一解，且:

$$
\|\vec{u}_m\|_{L^\infty((0,T),H)} + \|\vec{u}_m\|_{L^2((0,T),V)} \leq C \tag{4.2}
$$

其中C 为与m 无关的常数.

证明 将$u_m=\sum\limits_{j=1}^{\infty} g_{jm}(t)w_j$ 代入(P_m), 根据$\{w_i\}_{i=\overline{1,m}}$ 线性独立，矩阵$[(w_i,w_j)]_{1\leq i,j\leq M}$ 非奇异，故有:

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_{jm}(t) = \varphi_j(t;g_{1m}(t),\cdots,g_{mm}(t)) \qquad 1\leq j\leq m \tag{4.3}
$$

再由Cara 定理可知，方程(4.3) 在$[0,t_m]$ $(t_m\leq T)$ 内有局部极大解$u_m(t)$.

设$t\in[0,t_m]$, 在(4.1) 中取$w_j=u_m(t)$, 并对i 从1 到m 求和，且对(4.1) 两边积分，得到:

$$
\|u_m(t)\|_H^2 \leq \|u_{0m}\|_H^2 + \frac{1}{2\nu}\int_0^t \|f(s)\|_{*V}^2\,\mathrm{d}s \tag{4.4}
$$

其中，用到了引理1 及a_1 的反对称性，并利用了Green 公式(3.1) 及以下不等式:

$$
\left|\int_0^t < f(s),u_m(s) > \mathrm{d}s\right| \leq \frac{1}{2}\left\{\varepsilon\int_0^t \|u_m(s)\|_V^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \|f(s)\|_{*V}^2\,\mathrm{d}s\right\} \tag{4.5}
$$

且在(4.5) 中取$\varepsilon=2\nu$. (4.4) 说明了u_m 在$L^\infty((0,T),H)$ 中有界. 若在(4.5) 中取$\varepsilon=\nu$, 则得:

$$\|u_m(t)\|_H^2 + \nu\int_0^t \|u_m(t)\|_V^2 \mathrm{d}t \le \|u_{0m}\|_H^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^t \|f(t)\|_{*V}^2 \mathrm{d}t \tag{4.6}$$

故 u_m 在 $L^2((0,T);V)$ 中有界，容易验证，u_m 是 (P_m) 的唯一解. □

定理3 序列 $\{u_m\}$ 在 $H^r((0,T);V,H)(0<r<0.25)$ 中有界.

证明 将 $u_m(t)$ 在 $-\infty<t<\infty$ 上延拓，使 $[0,T]$ 外 u_m 为0, 延拓后记为 $\tilde{u}_m(t)$, 从而把 (P_m) 也延拓到了 $-\infty<t<\infty$ 上：

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\hat{u}_m(t),w_i)+a(\tilde{u}_m(t),\tilde{u}_m(t),w_i)\\&=<\tilde{f}(t),w_i>+(D(\tilde{u}_m(t),\tilde{u}_m(t),w_i)+(u_{0m},w_i)\delta_0-(u_m(T),w_i)\delta_T\end{aligned}$$

其中 δ_0,δ_T 为 $t=0,t=T$ 的Pirac 测度，$\tilde{f}$ 为 f 的延拓，使得[0,T] 之外，$\tilde{f}$ 为0. 对上式作 Fourier 变换，再根据：

$$\begin{aligned}\|A_1(w,u)\|_{*V} &\le \|w\|_{0,4}\|u(t)\|_{0,4}\\ \|D(\tilde{w},\tilde{u})\|_{*V_v} &\le M^2\|\tilde{w}\|_{0,4}\|\tilde{u}(t)\|_{0,4}\end{aligned}$$

并在 R 上对 t 积分：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c\|\hat{u}_m(\tau)\|_H^2 \mathrm{d}\tau \le a$$

其中 a,c 均为常数. □

5. 存在性和唯一性

下面来讨论(P) 问题的存在性和唯一性：

定理4 (P) 问题至少有一个解.

证明 根据定理2、定理3, 知存在 $\{u_m\}$ 的子序列 $\{u_\mu\}$ 使：

$$\begin{aligned}&\lim_{\mu\to\infty} u_\mu = u && \text{在}L^2((0,T);V)\text{中弱收敛.}\\&\lim_{\mu\to\infty} u_\mu = u && \text{在}L^2((0,T);V)\text{中弱星收敛.}\\&\lim_{\mu\to\infty} u_\mu = u && \text{在}H^r((0,T);V,H)\text{中弱收敛.}\end{aligned}$$

由此可推出：

$$\lim_{\mu\to\infty} u_\mu = u \quad \text{在}L^2((0,T);H)\subset(L^2(\Omega\times(0,T))^n\text{弱收敛.}$$

不失一般性，设基函数系 $(w_i)_{i\ge1}\subset\Theta$, 取 $\psi\in L^1[0,T]$, $\psi(T)=0$, 以 ψ 乘 (P_m) 两端并积分，利用Green 公式并固定 μ_0, 考虑到 $v\in V_{\mu 0}$, 则：

$$\begin{aligned}&-\int_0^T(u_\mu(t),v)\psi'(t)\mathrm{d}t+\int_0^T a(u_\mu(t);u_\mu(t),v)\mathrm{d}t\\&=\int_0^T<f(t),v>\psi(t)\mathrm{d}t-(u_{0\mu},v)\psi(0)+\int_0^T(D(u_\mu(t),u_\mu(t)),v)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

根据前面及 a_1 性质，又由 $\lim\limits_{\mu\to\infty} u_{0\mu}=u_0$ 在 H 中成立，故 $\mu\to\infty$ 时上式变为：

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T (u(t),v)\psi'(t)\mathrm{d}t+\int_0^T a(u(t);u(t),v)\psi(t)\mathrm{d}t \\
&=\int_0^T <f(t),v>\psi(t)\mathrm{d}t+\int_0^T (D(u(t),u(t),v)\psi(t)\mathrm{d}t-(u_0,v)\psi(0) \\
&\qquad \forall v\in V_{\mu 0},\quad \forall x\in C^1[0,T],\quad \psi(T)=0
\end{aligned}
$$

根据μ_0 的任意性，$\bigcup\limits_{n\geq 1} u_m$ 在V 内稠密，故上式对所有$v\in V$ 均成立，故当$\psi\in\mathcal{D}(0,T)$ 时，有：

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t),v)+a(u(t);u(t),v)=< f(t),v>+(D(u(t),u(t)),v)\qquad \forall v\in u, \text{在}\mathcal{D}'\text{内成立}
$$

此式在$L^2(0,T)$ 内成立．用ψ 乘(P_m) 两边，再在$[0,T]$ 上积分，易证$(u(0),v)=(u_0,v)$，故$u(0)=u_0$ 在V' 内成立．由于$u_0\in H$，故$u(0)=u_0$ 在H 中成立．故u 是(P) 的一个解． □

定理5 在二维情况下，(P) 问题有唯一解．

证明 设u_1,u_2 为(P) 的两个解，令$w=u_1-u_2$ 则知w 满足：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w+A_0w+A_1(u_1,u_1)-A_1(u_2,u_2)=D(u_1,u_1)-D(u_2,u_1) \\
w(0)=0 \qquad \text{在}L^2(0,T;v)\text{意义下}.
\end{cases}
$$

以w 作内积：

$$
\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t},w\right)+a_0(w,w)+a_1(u_1;u_1,w)-a_1(u_2;u_2,w)=(D(u_1,u_1),w)-(D(u_2,u_2),w)
$$

由：

$$
\begin{aligned}
|a_1(u_1;u_1,w)-a_1(u_2;u_2,w)| &\leq c_1\|u_1\|_V\|w\|^2_{0,\psi,\Omega} \\
&\leq \nu\|w\|_V^2+\frac{c_2^2}{4\nu}\|u\|_V^2\|w\|_H^2 \\
|(D(u_1,u_1),w)-(D(u_2,u_2),w)| &\leq c_1M\|u_1\|_V\|w\|^2_{0,\psi,\Omega} \\
&\leq M\nu\|w\|_v^2+\frac{c_2^2M}{4\nu}\|u\|_V^2\|w\|_H^2
\end{aligned}
$$

代入得到：

$$
\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t},w\right)\leq\frac{c_3^2}{4\nu}\|u\|_V^2\|w\|_H^2
$$

由$w\in W(0,T)$，对上式积分并由Green 公式及Gronwall 定理[6]，可知，$t\to\|w\|_H^2$ 在$[0,T]$ 上连续，$\|w(t)\|_H=0$ 故存在唯一解． □

以上所得结果对二维流动情况成立．不难将相应结论推广到三维上去．进一步且可考虑大尺度方程组与小尺度方程组之间的耦合对大尺度方程组的弱解所产生的影响．

参 考 文 献

[1] 高智．新的流体守恒方程组．IMACS STR-92026.
[2] Henshaw W.P. et. al. On the Smallest Scale for the incompressible Navier-Stokes equations. Theoretical computational Fluid Dynamics: 1:2, 1989.

[3] Ferziger J.H. Theoretical Approaches to Turbulence. ed. by Dwoyer et al. Springer-Verlag. New York: 1985.

[4] Orzsag S.A. Lect. Notes in Phys. 59, 1976, 32-51.

[5] 朱刚，陈农，胡庆康. 粘流-无粘干扰流动理论广义解的存在性和唯一性条件. 应用数学与计算数学学报：7:1, 1993.

[6] Temam R. Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis. North-Holand Amsterdam: 1977.

Existence and Uniqueness of Generalized Conversation Equations of Fluid Mechanics

Zhu Gang　　Shen Menyu

(Department of Engineering Mechanics,Tsing Hua University,Beijin100084)

Gao Zhi

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences,Beijin100081)

Abstract

In this paper, Generalized Fluid Mechanics Equations is studied on its conditions to be obeyed by average flow parameters on large scale, and a corresponding hypothesis is gived. Based on these, existence and uniqueness of weak solution of average flow parameters are studied on large scale in two dimension.

Key words　existence, uniqueness,conversation equations.