

三维冲击载荷下半无限裂纹的动态应力强度因子*

李湘平 柳春图

(中国科学院力学研究所, 北京 100080)

摘 要

本文分析了无界弹性体中含一半无限裂纹, 在裂纹面上受一对距离裂纹尖端为 L 的冲击集中载荷作用的三维应力强度因子历史, 求得了 I 型应力强度因子的精确解. 求解方法基于积分变换法、Wiener-Hopf 技术以及 Cagniard-de Hoop 变换的直接应用. 由于问题包含一特征长度 L , 在以前被认为是难以解决的. 本文还讨论了解的某些性质并给出了数值结果.

关键词 三维冲击载荷、半无限裂纹、应力强度因子

近年来, 由于数学上的困难, 三维现象在动态断裂力学中很少受到注意. 在解析方面工作尤其缺乏, 可用的结果很少. Freund 首先研究了 Rayleigh 表面波与半平面裂纹相互作用问题^[1]. Achenbach 和 Gantesen 研究了三维简谐力下的半无限裂纹应力强度因子历史^[2]. 后来 Freund 又提出了一个用一般的方法来解决一类三维弹性动态裂纹问题^[3]. 这个方法由文献[4, 5] 所推广. 然而, 如果一对集中力突然开始作用在裂纹面上, 且作用点距离裂纹尖端为 L , 即

$$\sigma_{xx}(x, z, t) = -P\delta(x+L)\delta(z)H(t). \quad (1)$$

在这种情形下如何得到精确应力强度因子解仍然是未知的^[3, 6].

此问题在本文中得到了解决. 分析关键步骤是采用积分变换、Wiener-Hopf 技术以及 Cagniard-de Hoop 变换方法的直接应用. 在某些方面, 本文方法类似于文献[7]. 本文求得了 I 型应力强度因子历史的精确解, 讨论了解的某些特性并给出了数值结果.

1 控制方程

矢量表述: 在各向同性弹性体中, 位移矢量 u 可用 Navier 方程表为

$$\ddot{u} = C_d^2 \nabla(\nabla \cdot u) - C_s^2 \nabla \times (\nabla \times u), \quad (2)$$

1992-11-20 收稿, 1993-10-14 收修改稿.

*国家自然科学基金资助项目.

其中 C_d, C_s 分别为膨胀波和剪切波波速.

求解方程(2)的标准方法是通过位移矢量的 Helmholtz 分解, 引入位移势函数 φ 和 ψ :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= \nabla\varphi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中标量势函数 φ 和矢量波势函数 $\boldsymbol{\psi} = (\psi_x, \psi_y, \psi_z)$ 满足解耦的波动方程:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 \boldsymbol{\psi} &= b^2 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中 a, b 分别为膨胀波速 C_d 和剪切波速 C_s 的倒数. 进一步地, 弹性材料的 Rayleigh 波速用 C_R 表示, 而相应的倒数用 c 表示.

考虑包含一半无限裂纹的无界弹性体, 材料特征参量为剪切模量 μ , Poisson 比 ν , 质量密度 ρ . 引入一右手直角系, 使 z 轴与裂纹前缘线重合, 且半无限裂纹位于区域 $y=0, x < 0$ 中. 在裂纹面上自时间 $t=0$ 始作用一对法向冲击点载, 该载荷离开裂纹尖端距离为 L .

由于几何形状和加载的对称性, 只须考虑上半平面 $y \geq 0$. 应力波场应满足边界条件:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{yy}(x, 0, z, t) &= \sigma_-(x, z, t) + \sigma_+(x, z, t), \\ \sigma_{xy}(x, 0, z, t) &= 0, \\ \sigma_{yz}(x, 0, z, t) &= 0, \\ u_y(x, 0, z, t) &= u_-(x, z, t), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

且 $-\infty < x, z < \infty$ 及 $t \geq 0$. 函数 σ_- 在区域 $x < 0$ 为已知, 而在区域 $x > 0$ 为 $\sigma_- \equiv 0$. 本文中

$$\sigma_-(x, z, t) = -P\delta(x+L)\delta(z)H(t), \quad P > 0, \quad (6)$$

其中下标负号用来表示在区域 $x < 0$ 不为 0 的函数; 而正号下标表示在区域 $x > 0$ 不为 0, 在区域 $x < 0$ 恒为 0 的函数.

初始条件可表为

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, y, z, 0) &= 0, & \frac{\partial \varphi(x, y, z, 0)}{\partial t} &= 0, \\ \boldsymbol{\psi}(x, y, z, 0) &= 0, & \frac{\partial \boldsymbol{\psi}(x, y, z, 0)}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中 $y \geq 0$.

2 求解方法

下面我们用积分变换法来确定动态应力强度因子 K_I . 以下方程通过膨胀波势 φ 表示——剪切波势可类似处理.

首先, 引入单边 Laplace 变换:

$$\hat{\varphi}(x, y, z, S) = \int_0^\infty \varphi(x, y, z, t) e^{-St} dt; \quad (8)$$

其次,取双边 Laplace 变换消去变量 z . 其变换参量为 $S\zeta$:

$$\bar{\varphi}(x, y, \zeta, S) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(x, y, z, S) e^{-S\zeta z} d\zeta; \quad (9)$$

最后,关于 x 取双边 Laplace 变换,其变换参量为 $S\eta$:

$$\Phi(\eta, y, \zeta, S) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(x, y, \zeta, S) e^{-S\eta x} dx. \quad (10)$$

研究表明这些变换的收敛域为

$$-\sqrt{a^2 - \zeta^2} < \operatorname{Re}(\eta) < \sqrt{a^2 - \zeta^2}, \quad (11)$$

ζ 为实数且 $-a < \zeta < a$.

关于势函 φ 和 ψ 控制方程经过三重变换后,其变换域中的适当解为

$$\begin{aligned} \Phi(\eta, y, \zeta, S) &= A \exp(-S\alpha y), \\ \Psi(\eta, y, \zeta, S) &= B \exp(-S\beta y), \\ B &= (B_x, B_y, B_z), \end{aligned} \quad (12)$$

且

$$\alpha^2 = a^2 - \eta^2 - \zeta^2, \quad \beta^2 = b^2 - \eta^2 - \zeta^2. \quad (13)$$

复平面 η 沿割线 $\sqrt{a^2 - \zeta^2} < |\operatorname{Re}(\eta)| < \infty, \operatorname{Im}(\eta) = 0$ 切开,使得在割开的复 η 平面中,对每一值 ζ , 均有 $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$. 类似地 $\operatorname{Re}(\beta) \geq 0$.

对边界条件 (5) 和方程 (3) 中第二式三重 Laplace 变换得到 5 个方程. 如果 A, B_x, B_y, B_z 从这些方程中消去,结果为包含两个未知量 U_- 和 Σ_+ 的方程式

$$\frac{\mu}{b^2} \frac{R(\eta, \zeta)}{\alpha(\eta, \zeta)} U_- = -\frac{1}{S} \Sigma_+(\eta, \zeta) + \frac{1}{S^2} P \exp(Sl\eta), \quad (14)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} R(\eta, \zeta) &= 4(\eta^2 + \zeta^2)\alpha(\eta, \zeta)\beta(\eta, \zeta) + (\beta^2 - \eta^2 - \zeta^2)^2, \\ U_-(\eta, \zeta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_-(x, z, S) \exp(-S(\zeta z + \eta x)) dz dx, \\ \Sigma_+(\eta, \zeta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\sigma}_+(x, z, S) \exp(-S(\zeta z + \eta x)) dz dx. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

方程 (15) 为 Wiener-Hopf 方程.

3 Wiener-Hopf 技术

引入一新定义函数 $S(\eta, \zeta)$ 为

$$S(\eta, \zeta) = \frac{R(\eta, \zeta)}{\chi(c^2 - \eta^2 - \zeta^2)}, \quad \chi = 2(b^2 - a^2). \quad (16)$$

那么函数 $S(\eta, \zeta)$ 可因子化为^[3]

$$S_{\pm}(\eta, \zeta) = \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_a^b \tan^{-1} \left(\frac{4\xi^2 \sqrt{b^2 - \xi^2} \sqrt{\xi^2 - a^2}}{(b^2 - 2\xi^2)^2} \right) \frac{\xi d\xi}{\sqrt{\xi^2 - \zeta^2} (\sqrt{\xi^2 - \zeta^2} \pm \eta)} \right\}. \quad (17)$$

同样函数 $\alpha(\eta, \zeta)$ 可因子分解为

$$\alpha(\eta, \zeta) = [\sqrt{\sqrt{a^2 - b^2} + \eta}]_+ [\sqrt{\sqrt{a^2 - \zeta^2} - \eta}]_-. \quad (18)$$

经过一些运算后, 方程 (14) 可重写为

$$\frac{\mu x}{b^2} \frac{(\sqrt{c^2 - \zeta^2} - \eta) S_-(\eta, \zeta)}{\sqrt{(\sqrt{a^2 - \zeta^2} - \eta)}} U_- = -\frac{\sqrt{(\sqrt{a^2 - \zeta^2} + \eta)}}{S(\sqrt{c^2 - \zeta^2} + \eta) S_+(\eta, \zeta)} \Sigma_+(\eta, \zeta) + \frac{P}{S^2} D(\eta), \quad (19)$$

其中

$$D(\eta) = \frac{\sqrt{(\sqrt{a^2 - \zeta^2} + \eta)}}{(\sqrt{c^2 - \zeta^2} + \eta) S_+(\eta, \zeta)} \exp(SI\eta). \quad (20)$$

因为函数 $D(\eta)$ 在带域: $-\sqrt{a^2 - \zeta^2} < \text{Re}(\eta) < \sqrt{a^2 - \zeta^2}$ 中为解析函数, 且当 $|\eta| \rightarrow \infty, D(\eta) \rightarrow 0$. 因此它可表为两个函数 $D_+(\eta)$ 和 $D_-(\eta)$ 之和:

$$D_+(\eta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{q-1\infty}^{q+i\infty} \frac{D(z)}{z-\eta} dz, \quad \text{Re}(\eta) > q, \quad (21)$$

而

$$D_-(\eta) = D(\eta) - D_+(\eta), \quad (22)$$

函数 $D_+(\eta)$ 和 $D_-(\eta)$ 分别在复 η 平面右半平面 $\text{Re}(\eta) > -\sqrt{a^2 - \zeta^2}$ 及左半平面 $\text{Re}(\eta) < \sqrt{a^2 - \zeta^2}$ 为解析函数.

采用图 1 所示的积分路径, 有

$$\begin{aligned} D_+(\eta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{bc}} \frac{D(z)}{z-\eta} d\eta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_c} \frac{D(z)}{z-\eta} dz \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{a^2 - \zeta^2}}^{-\infty} \text{Im} \left[\frac{D(z)}{z-\eta} \right] dz \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\sqrt{a^2 - \zeta^2}}^{\infty} \frac{\sqrt{(z - \sqrt{a^2 - \zeta^2})}}{(z - \sqrt{c^2 - \zeta^2}) S_-(z, \zeta)} \frac{\exp(-SIz)}{z + \eta} dz. \end{aligned} \quad (23)$$

在方程 (4.4) 代入 $D_+(\eta), D_-(\eta)$, 可得到

$$\begin{aligned} \frac{\mu x}{b^2} \frac{(\sqrt{c^2 - \zeta^2} - \eta) S_-(\eta, \zeta)}{\sqrt{(\sqrt{a^2 - \zeta^2} - \eta)}} U_- &= \frac{P}{S^2} D_- \\ &= -\frac{1}{S} \frac{\sqrt{(\sqrt{a^2 - \zeta^2} + \eta)}}{(\sqrt{c^2 - \zeta^2} + \eta) S_+} \Sigma_+ + \frac{P}{S^2} D_+. \end{aligned} \quad (24)$$

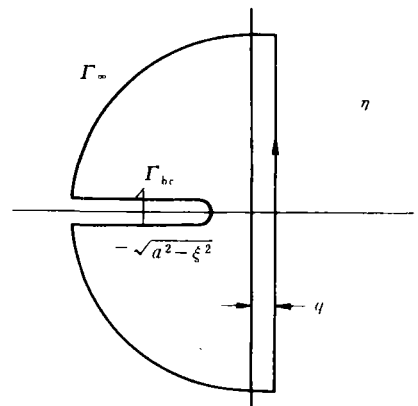


图 1

方程(24)的左边和右边在重迭带域 $\text{Re}(\eta) < \sqrt{a^2 - \zeta^2}$ 及 $\text{Re}(\eta) > -\sqrt{a^2 - \zeta^2}$ 分别为解析. 因此, 通过解析连续性, 两边均表示一个相同的整函数 $E(\eta)$. 依据 Liouville 定理: 一个有界的整函数必为一常数. 经过某些简单分析得出 $E(\eta) \equiv 0$. 因此, 有

$$\begin{aligned} \Sigma_+ &= \frac{P}{S} \frac{(\sqrt{c^2 - \zeta^2} + \eta)S_+}{\sqrt{(\sqrt{a^2 - \zeta^2} + \eta)}} \frac{1}{\pi} \int_{\sqrt{a^2 - \zeta^2}}^{\infty} \frac{\sqrt{v - \sqrt{a^2 - \zeta^2}} \exp(-Slv)}{(v - \sqrt{c^2 - \zeta^2})S_-(v, \zeta)} \frac{dv}{\eta + v}, \\ U_- &= \frac{b^2}{\mu x} \frac{P}{S^2} \frac{\sqrt{(\sqrt{a^2 - \zeta^2} - \eta)}}{(\sqrt{c^2 - \zeta^2} - \eta)S_-(\eta, \zeta)} \left\{ \frac{\sqrt{(\sqrt{a^2 - \zeta^2} + \eta)}}{(\sqrt{c^2 - \zeta^2} + \eta)S_+(\eta, \zeta)} \exp(Sl\eta) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\pi} \int_{\sqrt{a^2 - \zeta^2}}^{\infty} \frac{\sqrt{v - \sqrt{a^2 - \zeta^2}}}{(v - \sqrt{c^2 - \zeta^2})S_-(v, \zeta)} \frac{\exp(-Slv)}{v + \eta} dv \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

4 动态应力强度因子

我们现在来确定动态应力强度因子 K_I . 依据通常定义, 有

$$\sigma_{yy}(x, 0, z, t) \sim \frac{K_I(z, t)}{\sqrt{2\pi x}}, \quad x \rightarrow 0^+, \quad (26)$$

其中 K_I 是待定的沿裂纹前缘动态应力强度因子.

根据考虑变换函数渐近特性的 Abel 定理, 给出

$$\bar{K}_I(\zeta, S) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} [(2S\eta)^{1/2} \Sigma_+(\eta, \zeta)]. \quad (27)$$

利用方程(25), 则变换后沿裂纹前缘的应力强度因子为

$$\bar{K}_I(\zeta, S) = \sqrt{\frac{2}{S}} \frac{P}{\pi} \int_{\sqrt{a^2 - \zeta^2}}^{\infty} \frac{\sqrt{(v - \sqrt{a^2 - \zeta^2})} \exp(-Slv)}{(v - \sqrt{c^2 - \zeta^2})S_-(v, \zeta)} dv. \quad (28)$$

在放松 ζ 是实变量的约束后, 关于变量 z 的 Laplace 逆变换给出

$$\hat{K}_I(z, S) = \frac{S}{2\pi i} \int_{\zeta_0 - i\infty}^{\zeta_0 + i\infty} \bar{K}_I(\zeta, S) \exp(S\zeta z) d\zeta, \quad (29)$$

其中 ζ_0 是 $(-a, a)$ 中的实数.

改变变换参量 ζ 和变量 W 之间的积分次序有

$$\hat{K}_I(z, S) = \sqrt{2S} \int_1^{\infty} \frac{P}{\pi} \sqrt{W-1} \cdot \hat{I}(W, S) dW, \quad (30)$$

这里

$$\hat{I}(W, S) = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{\sqrt{a^2 - \zeta^2} \exp(-S(L\sqrt{a^2 - \zeta^2} W - \zeta z))}{\left(W - \sqrt{\frac{c^2 - \zeta^2}{a^2 - \zeta^2}}\right) S_-(\sqrt{a^2 - \zeta^2} W, \zeta)} d\zeta, \quad (31)$$

B_r 为逆变换的 Bromwich 围线.

为使 $\hat{K}_I(z, S)$ 关于时间 t 的最后 Laplace 逆变换可用观察得出, 采用 Cagniard-de Hoop 变换. 注意到在 ζ -平面上积分最佳路径可由方程

$$L\sqrt{a^2 - \zeta^2} W - \zeta z = t \tag{32}$$

给出. 且方程 (32) 求解后有

$$\zeta_{L\pm} = -tz \pm WL\sqrt{t^2 - a^2(z^2 + W^2L^2)} / (z^2 + W^2L^2), \tag{33}$$

这里取使平方根为正的那一支. 易知如果令 $\text{Im}(\zeta_{L\pm}) = 0$, 则有

$$\left. \begin{aligned} t &= a\sqrt{z^2 + L^2W^2} \\ \zeta &= -az/\sqrt{z^2 + W^2L^2} \end{aligned} \right\}, \tag{34}$$

由于不越过极点和分枝点, 则由 $\zeta_{L\pm}$ 定义的 Cagniard 围线转换是十分简单的. 沿 Cagniard 围线引入 t 作为新变量, 从而有

$$\hat{I}(W, S) = \frac{1}{\pi} \int_{a\sqrt{z^2 + W^2L^2}}^x \text{Im} \left\{ \frac{\sqrt[4]{a^2 - \zeta_{L\pm}^2} \frac{\partial \zeta_{L\pm}}{\partial t} \exp(-St) dt}{\left(W - \sqrt{\frac{c^2 - \zeta_{L\pm}^2}{a^2 - \zeta_{L\pm}^2}} \right) S_{-}(\sqrt{a^2 - \zeta_{L\pm}^2} W, \zeta_{L\pm})} \right\}. \tag{35}$$

为使 Laplace 变换卷积定理可以应用, 定义函数 Q 为

$$K_I(z, t) = \partial Q(z, t) / \partial t, \quad Q(z, 0) = 0, \tag{36}$$

则有

$$\hat{K}_I(z, S) = S\hat{Q}(z, S). \tag{37}$$

联立方程 (30), (35), 通过卷积得到

$$K_I(zL, T) = \frac{\sqrt{2} \cdot P}{\pi^{3/2} \cdot L^{3/2}} \frac{\partial}{\partial T} \int_1^{\sqrt{T^2 - zL^2}} \left\{ \int_{\sqrt{-zL^2 + W^2}}^T \text{Im} \left\{ \frac{\sqrt[4]{1 - \hat{\zeta}_{L\pm}^2} \left(\frac{\partial \hat{\zeta}_{L\pm}}{\partial \tau} \right)}{\left(W - \sqrt{\frac{c^2 - \hat{\zeta}_{L\pm}^2}{1 - \hat{\zeta}_{L\pm}^2}} \right) S_{-}(\sqrt{1 - \hat{\zeta}_{L\pm}^2} W, \hat{\zeta}_{L\pm})} \right\} \frac{d\hat{\tau}}{\sqrt{T - \hat{\tau}}} \right\} \sqrt{W - 1} dW, \tag{38}$$

其中

$$T = t/aL, \quad C = c/a, \quad zL = z/L. \tag{39}$$

公式 (38) 为本文主要结果.

5 结果和讨论

对于所得到结果 $K_I(z, t)$, 如果将其在 $-\infty < z < \infty$ 上关于 z 积分, 则解应退为相应的二维线布载情形. 此问题已由 Freund 所解决^[6]. 如果在方程 (28) 中实施积分, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{K}_I(z, S) dz = \sqrt{\frac{2}{S}} \frac{P}{\pi} \int_a^{\infty} \frac{\sqrt{v-a}}{(v-c)S_{-}(v)} \exp(-Stv) dv. \tag{40}$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_I(z, t) dz = \sqrt{\frac{2}{\pi l}} \frac{P}{\pi} \int_a^{t/l} \frac{\sqrt{v-a} dv}{(v-c)S_{-}(v) \cdot \sqrt{t/l-v}}. \tag{41}$$

这与 Freund^[6] 结果完全一致.

对方程(38)中积分,本文进行了数值计算.计算参数为 $b=1.87a$, $c=2.02a$, $z=L$. 所得结果绘制在图2中.图中时间已无量纲化.因此时间 $T=\sqrt{2}$ 相应于膨胀波到达裂纹前缘线观察点 z 的时间.动态应力强度因子值也相应地乘上因子 $2/P \cdot (\pi L/2)^{3/2}$.

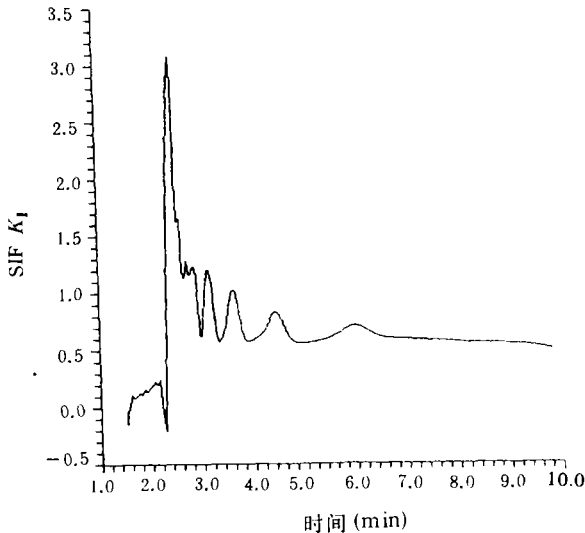


图 2

随着冲击集中力的作用,沿裂纹边缘位置 z 处直到膨胀波前到达前一直静止.这个波前在性态上是压缩的,使两裂纹面初始彼此靠近.这点从动态应力强度因子初始从 0 跳跃为负值可以反映.这种性质是这种特定三维载荷分布解的显著特征.这种现象类似于由 Freund, Ramirez 和 Champion 等人所讨论的^[3-5].

在膨胀波前到达后,本文解呈现出复杂的图象,而且与 Freund 等结果有较大的不同.在他们解中,是在膨胀波前到达后而 Rayleigh 波到达前,动态应力强度因子为负值,并且在 Rayleigh 波前到达时刻呈对数奇异性.究其原因:在

Freund 等人不包含特征尺度解中,载荷作用在裂纹尖缘 ($x=y=z=0$),产生的波沿裂纹面传播而不包含任何波与裂纹面的反射干涉现象.而在本文解中,由于载荷作用点离裂纹边缘为 L ,激发出的波经过裂纹边缘位置 z 处时,不仅有直接入射至 z 处一次波,而且有由一次波与裂纹面相撞后产生的次级反射波.本文解包含同一时刻到达 z 处所有波的贡献.因此所得结果呈现出复杂而丰富的图象.

冲击动态应力强度因子 $K_I(z, t)$ 对固定的点 $z=L$, 在 $C_d t/L=10$ 以后逐渐趋近于其相应的静态应力强度因子值.其中

$$K_I(\infty, z) = \frac{\sqrt{2} P}{(\pi L)^{3/2}} \frac{1}{1+(z/L)^2} \quad (42)$$

到此完成了一对突加集中力作用在裂纹面上,离开裂尖位置为 L 的三维应力强度因子历史的分析.本文结果及方法可应用到其它任意载荷作用的问题.

参 考 文 献

- [1] Freund, L. B., *Int. J. Solids Struct.*, 1971, 7: 1199—1210.
- [2] Achenbach, J. D., Gautensen, A., *J. Appl. Mech.*, 1977, 44: 243—249.
- [3] Freund, L. B., *J. Mech. Phys. Solids*, 1987, 35: 61—72.
- [4] Ramirez, J. C., *Q. Appl. Math. XLV.*, 1987, 2: 361—376.
- [5] Champion, C. R., *Int. J. Solids Struct.*, 1988, 24: 285—300.
- [6] Freund, L. B., *Dynamic Fracture Mechanics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
- [7] Kuo, M. K., Cheng, S. H., *Int. J. Solids Struct.*, 1991, 25: 751—768.
- [8] Nobel, B., *Methods Based on the Wiener-Hopf Technique.*, Pergamon Press, New York, 1958.