

# 关于 Fotia 隔离段流动突变理论分析的看法

陈科挺 岳连捷 张新宇

中国科学院力学研究所

陈科挺, 博士生, 超燃冲压发动机方向, E-mail: ckt83164@gmail.com

摘要: Matthew L. Fotia 通过对超燃冲压发动机燃烧模态转换机理的研究, 认为三类流动无法存在于隔离段当中。而且他结合热力学第二定律及 Heiser 和 Pratt 提出的隔离段流动模型, 认为其中一类流动之所以在物理上不可实现是因为产生了负熵区。而这一类流动的不可现会造成在隔离段出口出现流动马赫数不连续的现象。Fotia 则试图由此来解释发动机在燃烧模态转换过程中隔离段内的流动突变现象。但是我们通过分析发现, 其在物理模型的选择上和数学公式的推导中都存在问题, 由此导出了错误的结论。他在对 Heiser 和 Pratt 隔离段流动模型的公式描述中, 实际上已将其中的核心流作为可压缩的变截面加热流动进行分析, 这显然并不合理。而我们经考虑认为以可压缩的变截面摩擦流动描述该核心流特性更为合适。

关键词: 隔离段 流动突变 负熵区

## 1 引言

近年来, Fotia 关于隔离段流动突变的理论分析[1]被国内学者较为广泛地接受和引用。其从理论上对超燃冲压发动机在燃烧模态转换过程中存在的隔离段出口压力变化不连续现象给出了解释。他认为三类流动由于各自物理上的限制无法存在于隔离段中, 这些限制分别为: (1) 隔离段内壁面摩擦及传热, 使得流动压力不得不升高; (2) 正激波条件限制了流动的最大压升; (3) 隔离段出口条件必须满足热力学第二定律, 即相较于进口流动, 出口流动的熵肯定是增大的。Fotia 又进而结合 Heiser 和 Pratt 隔离段流动模型[2]对第三类限制条件进行了分析, 认为特定的隔离段出口条件会使隔离段内的流动不满足热力学第二定律, 从而导致模态转换中隔离段流动变化不连续, 即发生突变。但是我们发现 Fotia 在数学公式处理上存在问题, 并且在物理模型的选择上也不甚合理, 故其理论分析得出的关于特定隔离段出口条件会导致负熵区的结论并不可信。本文的目的是纠正 Fotia 在文献[1]的不合理之处, 也希望诸位读者对隔离段内流动能有更深入的认识。

## 2 Fotia 理论分析存在的问题

### 2.1 公式推导

为了方便讨论, 本文采用和文献[1]相同的公式编号。另由于文献[1]中的公式有一些错误, 本文中会给出更正后的正确表达, 并用添加星号“\*”的方式加以区分。

Fotia 在理论导出负熵区的过程中存在一些数学处理上的问题。其将一维可压缩流动中的熵、静温及马赫数的微分式表达为如下形式

$$\frac{ds}{c_p} = \frac{dT_0}{T_0} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dP_0}{P_0} = -\frac{2}{\gamma M^2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right) \frac{dP_0}{P_0} \quad (3^*)$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{\gamma M^2}{1-M^2} \frac{dA}{A} + \frac{2(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)}{1-M^2} \frac{dP_0}{P_0} \quad (4^*)$$

$$\frac{dM^2}{M^2} = -\frac{2\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)dA}{1-M^2} - \frac{2}{\gamma M^2} \frac{(1+\gamma M^2)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)dP_0}{1-M^2} \quad (5)$$

其中 (3\*,4\*)式是根据[3]更正文献[1]中部分印刷错误后的形式。继而通过联立以上三式,并结合热力学第二定律给出的限制条件  $ds/c_p \geq 0$ , 原作者导出以下不等式

$$\frac{dP}{P} + \frac{dM^2}{M^2} \geq -\frac{(2-M^2)dA}{(1-M^2)A} \quad (6)$$

但是(6)式仅仅适用于  $M < 1$  的情况, 而正确的不等式形式应该为

$$(1-M^2)\left(\frac{dP}{P} + \frac{dM^2}{M^2}\right) + (2-M^2)\frac{dA}{A} \geq 0 \quad (6^*)$$

由于隔离段内的流动可能是超声速也可能是亚声速, 故  $1-M^2$  的正负并不能被确定。也就是说, 如果(6\*)式的不等号两侧被同除以  $1-M^2$  时, 其不等号的方向可能发生改变。所以, (6)式并不是限制条件  $ds/c_p \geq 0$  于隔离段内流动的等价描述。

Fotia 进而引入了总压的微分表达式

$$\frac{dP_0}{P_0} = \frac{dP}{P} + \frac{\gamma M^2}{2+(\gamma-1)M^2} \frac{dM^2}{M^2} \quad (7)$$

其通过将(7)式代入(6)式得到

$$\frac{\gamma M^2}{(1-M^2)A} \frac{P}{P_0} - \left(\frac{dP}{dA} + \Omega_{loss}\right) \geq 0 \quad (8)$$

其中  $\Omega_{loss}$  为总压损失项。

然而, 考虑到(6)式并不是对于熵增关系的恰当描述, 故由其导出的(8)式的适用性也是值得商榷的。实际上, 其正确形式应该由将(7)式代入(6\*)式导出

$$(1-M^2)\left[\left(2+(\gamma-1)M^2\right)\frac{dP_0}{P_0} + (M^2-2)\frac{dP}{P}\right] + \gamma M^2(2-M^2)\frac{dA}{A} \geq 0 \quad (8^*)$$

为了便于(8)式与(8\*)式的比较, 用  $\Omega_{loss}$  替换(8\*)式中的总压项, 将(8\*)式重写为

$$(1-M^2)(2-M^2)\left(\frac{dA}{P} \Omega_{loss} - \frac{dP}{P}\right) + \gamma M^2(2-M^2)\frac{dA}{A} \geq 0 \quad (8^{**})$$

直观上, (8)式似乎可以通过在(8\*\*)式不等号两边同除以  $(1-M^2)(2-M^2)dA/P$  得到。但是考虑到  $1-M^2$  项的符号会随着流动马赫数的不同而变化, 这种不等式变换方式并不可取。另外, 通过对 Heiser 和 Pratt 隔离段流动模型的理论分析, 我们不难发现隔离段中的核心流面积  $A$  随着出口马赫数的减小呈现二次曲线关系, 并且在特定的隔离段出口马赫数下存在最小值。因此,  $dA$  的符号也会随着隔离段出口马赫数的变化而变化。对于 Fotia 在其文中采用的算例 (取隔离段入口马赫数  $M_1=2.2$ , 比热比  $\gamma=1.34$ ), 可以计算得出  $dA$  的符号将在隔离段出口马赫数  $M_2=1.30$  时发生变化。此外再通过对  $(1-M^2)(2-M^2)dA/P$  项的观察, 可发现其在  $M_2=1.00$  时也会改变符号。通过以上分析, 我们就可以很直观地了解到 Fotia 的负熵区间 ( $1.00 < M_2 < 1.30$ ) 是如何被错误地推导出来的。因此, 我们认为 Fotia 在文献[1]中提到的负熵区并不存在。

## 2.2 物理模型的选择

Fotia 在 Heiser 和 Pratt 隔离段流动模型的理解上也存在一些问题, 其采用(3\*)式 (文献[1]中的(3)式) 来表征该流动模型熵微分式的合理性是值得商榷的。事实上, 基于一维可压缩流动理论[3], (3\*)式、(4\*)式及(5)式中均隐含了以下关系式

$$\frac{dP_0}{P_0} = -\frac{\gamma M^2}{2} \frac{dT_0}{T_0} \quad (9)$$

然而于上述的隔离段流动模型，其假设流动是一个绝热过程，这也就是意味着隔离段中核心流的总温是保持不变的。而当隔离段中存在分离流时，核心流的总压会沿着隔离段单调减小。如此看来，(9)式并不适合应用于该隔离段流动。而实际上，该隔离段模型中的核心流动已经被错误地作为变截面的加热管流进行考虑了，而这与隔离段内流动的物理过程及 Heiser 和 Pratt 的理论假设显然是矛盾的。

根据 Heiser 和 Pratt 的隔离段流动模型，当隔离段出口背压处于合适范围内时，隔离段中央为核心流，而其周围为分离流区。图 1 中，整个隔离段 ABCD 被作为控制体进行分析。其内的流动是绝热的，并且考虑到分离区内流动速度较小（可忽略不计），故不考虑壁面摩擦对流动的影响。另假设隔离段出口截面上的压力是均匀分布的。倘若将核心流和分离流分开考虑，将分离流区 DEFG 当作一个控制体进行分析，考虑到静压会沿着隔离段单调上升，我们发现出口 DG 处的动量  $I = \dot{m}u + PA$  和曲线 EFG 处的并不一致。由于出口处的分离流压力  $P_2$  高于上游，而其速度被忽略不计，故出口处的分离流动量相比上游也会有所增大。因此要使分离流区满足动量守恒定律，再考虑到壁面与分离流区不存在摩擦力的假定，核心流和分离流的动量交换就变得必不可少。这也就是说两流动之间必定存在黏性剪切力。如此看来，用可压缩的变截面绝热摩擦管流来描述隔离段中的核心流动应该更为合理。

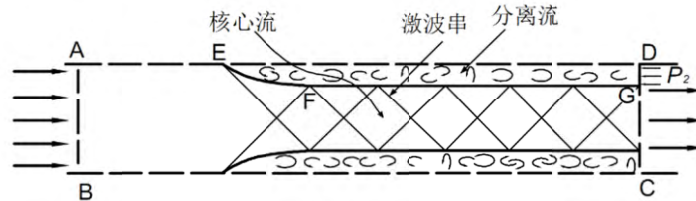


图 1 Heiser 和 Pratt 隔离段流动控制体分析模型

而作为带摩擦的绝热变截面流动，隔离段核心流的熵、静压和马赫数的微分式为

$$\frac{ds}{c_p} = \frac{dT_0}{T_0} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dP_0}{P_0} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dP_0}{P_0} \quad (10)$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{\gamma M^2}{1-M^2} \frac{dA}{A} - \frac{\gamma M^2 [1+(\gamma-1)M^2]}{2(1-M^2)} \cdot 4f \frac{dx}{D} \quad (11)$$

$$\frac{dM^2}{M^2} = -\frac{2(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)}{1-M^2} \frac{dA}{A} + \frac{\gamma M^2 (1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)}{1-M^2} \cdot 4f \frac{dx}{D} \quad (12)$$

其中  $f$  代表无量纲的摩擦系数， $D$  代表水力学直径。并且考虑到

$$\frac{dP_0}{P_0} = -\frac{\gamma M^2}{2} \cdot 4f \frac{dx}{D} \quad (13)$$

则静压和马赫数的微分式可以被重写为

$$\frac{dP}{P} = \frac{\gamma M^2}{1-M^2} \frac{dA}{A} + \frac{1+(\gamma-1)M^2}{1-M^2} \frac{dP_0}{P_0} \quad (14)$$

$$\frac{dM^2}{M^2} = -\frac{2(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)}{1-M^2} \frac{dA}{A} - \frac{2(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2)}{1-M^2} \frac{dP_0}{P_0} \quad (15)$$

通过联立(10,14,15)式，并代入到  $ds/c_p \geq 0$  中，可得到新的限制条件表达式，并且其形

式与(8\*)式及(8\*\*)式一致。

### 3 结论

通过上述的分析推导,我们已可明析地了解 Fotia 的负熵区是如何错误地推导出来的。Fotia 在不等式的处理过程中,未考虑到隔离段实际流动中物理量变化对不等号方向的影响,故产生了不合理的结论。而且其公式中隐含的将隔离段内核心流动作为变截面加热管流的考虑也被证明是不合适的。因此,我们认为在其所谓的负熵区并不是一种解释隔离段中流动突变的恰当方式。而对于隔离段内流动突变的认识是需要我们进一步研究深化的。

#### 参考文献:

- [1] Fotia, M. L., "Mechanics of Combustion Mode Transition in a Direct-Connect Ramjet-Scramjet Experiment," *Journal of Propulsion and Power*, Vol.31, No.1, 2015, pp. 69-78.  
doi: 10.2514/1.B35171
- [2] Heiser, M. L., and Pratt, D. T., *Hypersonic Airbreathing Propulsion*, Education Series, AIAA, Washington, D.C., 1994, Chap. 6.
- [3] 董秉纲, 孔祥言, 邓国华. *气体动力学*. 高等教育出版社, 2012.