

重力-毛细波的环形聚焦

王展

(中国科学院力学研究所流固耦合系统力学重点实验室, 北京, 100190, Email: zwang@imech.ac.cn)

摘要: 由于三阶非线性薛定谔方程的普遍适用性, 水波动力学与非线性光学在特定问题中展现中类似的现象。此文利用 Akers-Milewski (AM) 模型方程研究非线性深水重力-毛细波的动力学行为。数值结果显示, 当高频的重力-毛细波列以近临界速度 (23 cm/s) 移动时, 初始的发展演化展现出与非线性光学类似的聚焦现象, 这一结果与传统模型三阶非线性薛定谔方程的预测相符。更为重要的是, 与非线性光学一样, 对应于高斯型初值的点态聚焦与对应于超高斯型初值的环形聚焦均被 AM 方程的数值实验所证实。但重力-毛细波的长时间行为则不同于薛定谔方程 (因为水波波形无法在有限时间内出现波坍塌), 取而代之的是解碎裂成一群块状孤立波。

关键词: 重力-毛细波; 非线性光学; 自聚焦; 超高斯; 块状孤立波

1 引言

风吹过湖面或海面时卷起的层层涟漪是小尺度的波浪, 其特征波长为 2~3cm; 在此特征尺度之下, 必须同时考虑重力与表面张力的作用, 因此这种波也被称为“重力-毛细波”。重力-毛细波在物理、工程与数学中均有重要的意义: 小尺度波浪与风生浪有关, 关系到大气和海洋间的动量与能量交换; 在工程上, 对于近海面风力和风向的监测主要通过监测海面由风掌控的小尺度波浪而得到, 卫星上的微波散射雷达 (scatterometer) 的特征波长为 3~7 cm, 重力-毛细波与此雷达的波段相近, 是其主要的信息来源; 在数学上, 重力波中的孤立波只存在于浅水流动之中且只能在波的前进方向形成局域化 (即波的展向无法衰减到零), 而在重力与表面张力的共同作用之下存在着块状孤立波 (英文名为 lump, 该类孤立波可以在任意水平方向衰减到零) 且可在任意水深中存在。

重力-毛细波中的块状孤立波是一种包络型孤立波, 其解最初由 Milewski^[7]和 Parau 等^[9]在 2005 年分别通过对简化模型和原始欧拉方程的数值计算而得到。之后的实验研究主要是由 Duncan 和 Akylas 的团队合作完成, 他们利用水波受迫共振的方法周期性地生成块状孤立波^[2-3,6]。Kim & Akylas^[5]利用渐近分析从理论上证明了块状孤立波在重力-毛细波中的存在性; 他们的文章表明, 解的存在主要是因为其波包的运动演化由 ‘2+1’ 型的三阶非

线性薛定谔方程 (cubic nonlinear Schrodinger equation) 所控制 (其中的 ‘2+1’ 是指该方程具有一个时间变量与两个空间变量)。事实上, 三阶非线性薛定谔方程是一个具有普遍适用性的方程, 它出现在非线性光学、水动力学、凝聚态物理、生物学等各个学科领域。非线性深水波与非线性光学均以非线性薛定谔方程为基本模型, 这一事实引导我们思考这两个学科之间的相似性。我们尝试以下两个问题: ①在特定的场景和参数这下我们能否在水波和光学中观察到相似的现象; ②数值结果已经证明稳定的块状孤立波在重力-毛细波中起到极其重要的作用, 是整个动力系统的吸引子之一^[8,10-11], 那么这种结构在非线性光学中的对应物亦是值得深入探讨的。

从理论上讲, 三阶非线性薛定谔方程在两个空间变量的情形下具有奇异性: 当初始哈密顿量为负值时, 解在有限时间内聚焦并出现波坍塌现象 (即变成一个无界的 Delta 函数)^[13]。但是在现实中, 水波并不会表现出如此奇异的行为, 因此用三阶非线性薛定谔方程来描述重力-毛细波的长时间动力学行为并不恰当。这引导我们对这一特定问题建立更为合理的数学模型。Akers & Milewski^[1]建立了一个用于研究非线性深水重力-毛细波动力学演化的新模型, 我们称之为 Akers-Milewski (AM) 方程。该模型的推导是基于 Whitham 方程的思想^[12], 但在非线性项的系数选取上具有独到之处 (见之后的推导过程)。参考文献 [1]最先给出了 AM 模型方程, 而文献[2,3,6,11]则对该方程进行了进一步的数值研究, 同时与实验对比的结果验证了该方程对于描述深水重力-毛细波的有效性。

我们利用 AM 方程对深水重力-毛细波的动力学进行数值研究, 重点展现厘米尺度水动力学的自聚焦现象, 强调其与强激光脉冲在水中传播现象的相似性。在第 2 小节中我们将简单给出 Akers-Milewski 方程的推导, 以及三阶非线性薛定谔方程在重力-毛细波中的应用。第 3 小节中给出重力-毛细波的环形聚焦的数值结果, 并比较它们与强激光脉冲在水中传播时所产生的类似现象的异同。

2 Akers-Milewski 方程与三阶非线性薛定谔方程

深水重力-毛细波的控制方程为:

$$\begin{cases} \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0 & z < \eta(x, y, t) \\ \eta_t = \phi_z - \nabla\eta \cdot \nabla\phi & z = \eta(x, y, t) \\ \phi_t + \frac{1}{2}(|\nabla\phi|^2 + \phi_z^2) + g\eta + \frac{\sigma}{\rho} \nabla \cdot \left[\frac{\nabla\eta}{\sqrt{1+|\nabla\eta|^2}} \right] = 0 & z = \eta(x, y, t) \\ \phi_z \rightarrow 0 & z \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (1)$$

其中 x, y 为水平坐标, z 为垂直坐标, g 代表重力加速度, ρ 代表流体的密度, σ 代表表面张力系数; $z = \eta(x, y, t)$ 为自由水面, $\phi(x, y, z, t)$ 为流体的速度位势, 其梯度等于流体速度; 而算子 ∇ 和 $\nabla \cdot$ 分别代表水平梯度与水平散度。对系统进行无量纲化处理, 分别选取

$$\left[\frac{\sigma}{\rho g}\right]^{1/2}, \quad \left[\frac{\sigma}{\rho g^3}\right]^{1/4}, \quad \left[\frac{\sigma g}{\rho}\right]^{1/4}$$

为长度、时间和速度位势的特征尺度。对无量纲方程进行线性化, 得到深水重力-毛细波的色散关系

$$\omega^2 = \sqrt{k^2 + l^2}(1 + k^2 + l^2) \quad (2)$$

$$c_p^2 = \frac{\omega^2}{k^2 + l^2} = \frac{1}{\sqrt{k^2 + l^2}}(1 + k^2 + l^2) \quad (3)$$

其中, ω 代表线性波的频率, k 和 l 分别代表 x 和 y 方向的波数, 而 c_p 则表示相速度(即波峰传播的速度)。假设波只沿 x 方向传播, 即可知当 $k = \pm 1$ 及 $l=0$ 时, $|c_p|$ 达到其最小值 $\sqrt{2}$ 。对于右行波, 我们有

$$\omega = \text{sgn}(k)\sqrt{(k^2 + l^2)^{1/2} + (k^2 + l^2)^{3/2}} \quad (4)$$

由于重点关注相速度极小值(临界速度)附近的波的行为, 我们可将式(4)中的色散关系在临界波数 $(\pm 1, 0)$ 处进行泰勒展开, 得到的结果为

$$\omega = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{sgn}(k)(1 + 2|k| + k^2 + 2l^2) \quad (5)$$

利用以下关系式

$$\omega \sim i\partial_t, \quad k \sim -i\partial_x, \quad \text{sgn}(k) \sim iH \quad (6)$$

其中 H 表示对 x 的方向进行希尔伯特变换, 将式(6)中的关系式代入式(5)得到一个线性色散方程

$$\eta_t + \frac{\sqrt{2}}{2}\eta_x - \frac{\sqrt{2}}{4}H[\eta - \eta_{xx} - 2\eta_{yy}] = 0 \quad (7)$$

仿 Whitham 方程, 在式(7)中加入 Burgers 类型的非线性项以得到所需的非线性方程

$$\eta_t + \frac{\sqrt{2}}{2}\eta_x - \frac{\sqrt{2}}{4}H[\eta - \eta_{xx} - 2\eta_{yy}] + \alpha(\eta^2)_x = 0 \quad (8)$$

最后剩下确定系数 α , 这也是参考文献[1]的精华所在。鉴于三阶非线性薛定谔方程的普适性及其对于水波问题的重要性, 我们可以分别从原始方程(1)及简化方程(8)出发各自导出三阶非线性薛定谔方程。由于式(8)与式(1)在 $(k, l) = (\pm 1, 0)$ 处具有相同的色散关系, 因此所得的薛定谔方程天然具有相同的线性项, 最后我们选取 α 使得这两个薛定谔方程的三阶非线性项也具有相同的系数。假设 η 为被波包缓慢调制的高频波, 则

$$\eta = \epsilon A(X - c_g T, Y, \tau) e^{i\theta} + \epsilon^2 A_2(X - c_g T, Y, \tau) e^{i2\theta} + \dots \quad (9)$$

其中, ϵ 代表与振幅相关的小参量, $(X, Y, T, \tau) = (\epsilon x, \epsilon y, \epsilon t, \epsilon^2 t)$, $\theta = kx + ly - \omega t$ 且 $(k, l) = (\pm 1, 0)$, 而 $c_g = \partial_k \omega = \sqrt{2}$ 为所关注临界点的群速度。将式(9)的假设代入方程(8)得到关于波包 A 的控制方程

$$iA_\tau + \frac{\sqrt{2}}{4}A_{XX} + \frac{\sqrt{2}}{2}A_{YY} + 8\sqrt{2}\alpha^2|A|^2A = 0 \quad (10)$$

从方程(1)出发也可以得到与(10)相同的非线性薛定谔方程, 而且我们知道其非线性项的系数应为 $11\sqrt{2}/8$, 由此我们可以确定 $\alpha = \sqrt{11}/8$ 。在参考文献[2]中, 作者在方程(8)的基础上又引入了黏性项, 得到了可与进行实验对比的方程:

$$\eta_t + \frac{\sqrt{2}}{2}\eta_x - \frac{\sqrt{2}H}{4}[\eta - \eta_{xx} - 2\eta_{yy}] + \frac{\sqrt{11}}{8}(\eta^2)_x - \nu(\eta_{xx} + \eta_{yy}) = 0 \quad (11)$$

其中, ν 为无量纲的黏性系数。

3 环形聚焦

为叙述方便, 我们首先利用方程(8)计算无黏深水重力-毛细波中的块状孤立波解, 这一结果已经在 Akers & Milewski^[1]及 Wang & Vanden-Broeck^[11]中被详细讨论。深水块状孤立波的存在性也已被其他模型和方程所证实 [5,7,9-10]等。如图 1 与图 2 所示, 对称的深水重力-毛细波中的块状孤立波从 $c_p = \sqrt{2}$ 处分岔出来形成两个分支, 一支为中心点值为负的下压波 (depression wave); 另一支为中心点值为正的上提波 (elevation wave)。在这些解中, 只有大振幅的下压波是稳定的, 其他解均不稳定; 而对于一大类初始条件, 大振幅的下压波 (图 2 左) 在深水重力-毛细波的长时间发展演化中起到了类似于吸引子的作用^[10]。

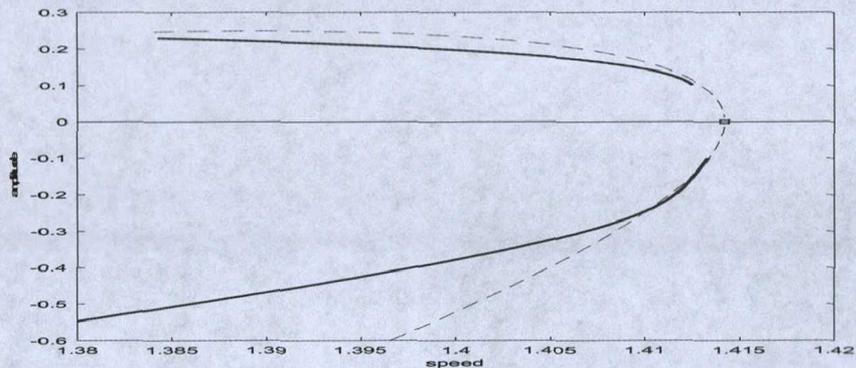


图 1 深水重力-毛细波中块状孤立波的分岔图 (蓝色实线为方程(8)的计算结果), 分岔点为 $\sqrt{2}$, 上半支为上提波, 下半支为下压波。红色虚线为非线性薛定谔方程的理论预测值

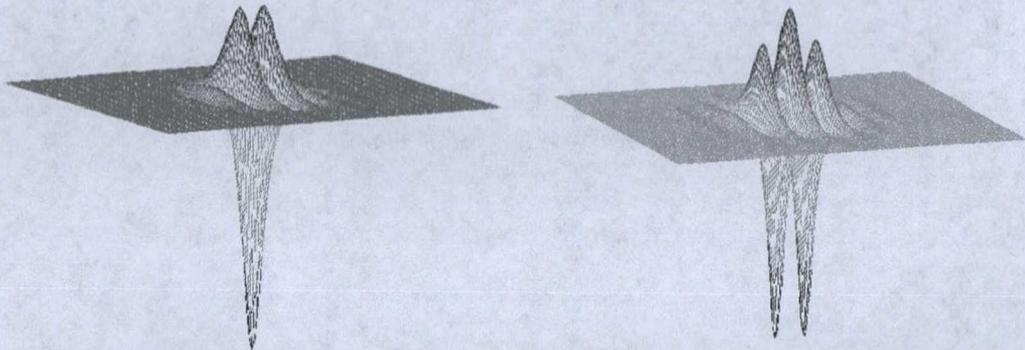


图 2 典型的块状孤立波的波形: 下压波 (左) 和上提波 (右)

非线性光学的基本方程也是三阶非线性薛定谔方程，Grow^[4]指出，当强激光脉冲打入水中时展现出强烈的聚焦现象：当初值为高斯型时，聚焦发生在一个点上；而当初值为超高斯型时，聚焦现象发生在一个环上。我们利用方程(11)探索类似的现象能否在深水重力-毛细波中出现。取超高斯型波包缓慢调制下的高频简谐波为初值：

$$\eta(x, y, 0) = 2\epsilon\beta e^{-(\epsilon^2 x^2 + \epsilon^2 y^2)^2 / \gamma} \cos(kx) \quad (12)$$

我们先取 $k = 1, \epsilon = 0.05$ ，图3显示了解随时间的发展演化。图3中的第二个时刻清晰呈现出解在一个环形上的非线性聚焦现象（颜色变深代表着振幅变大），解之后的发展并未如非线性薛定谔方程所预测的那样出现波坍塌（wave collapse），而是破碎成一群斑点，这些高亮的斑点正是对应着下压型的块状孤立波解（图2左）。图4显示了图3时间历程中各时间点对应波型在Fourier空间的谱。谱随时间的演化表明初始窄带谱首先发展出倍周期现象（period doubling），然后是一个波谱不断变宽的过程（spectrum broadening）。最后我们需要指出 $k = 1$ 对应着临界波数，在此特殊点波的相速度达到极小值，此处线性色散向外传递的能量较少。而当所取波数远离临界波数时，虽然也能看到环形聚焦现象，但色散的干扰明显增多（如图5中取 $k = 0.75$ ）。

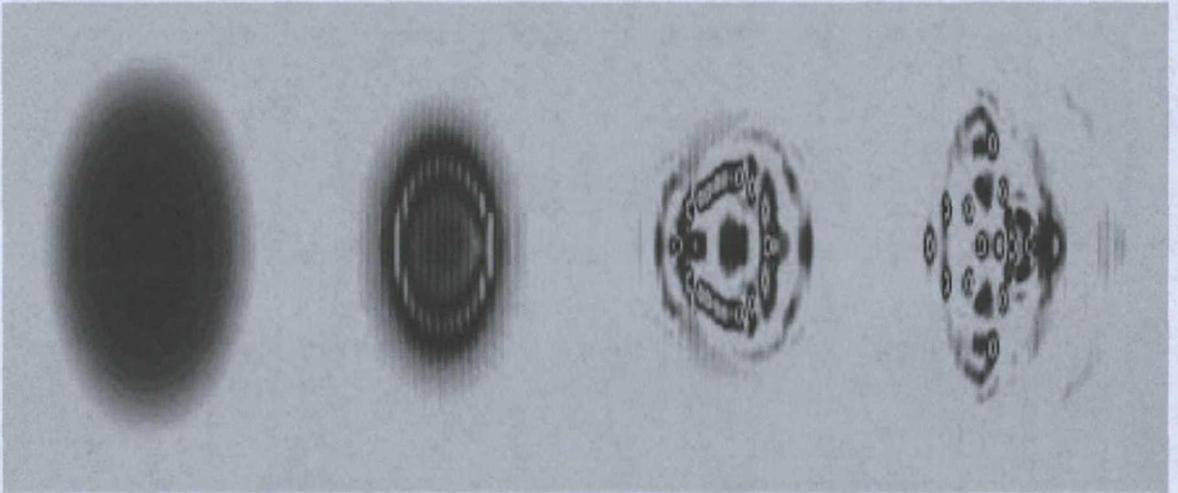


图3 重力-毛细波的环形聚焦现象：超高斯初值随时间的发展演化

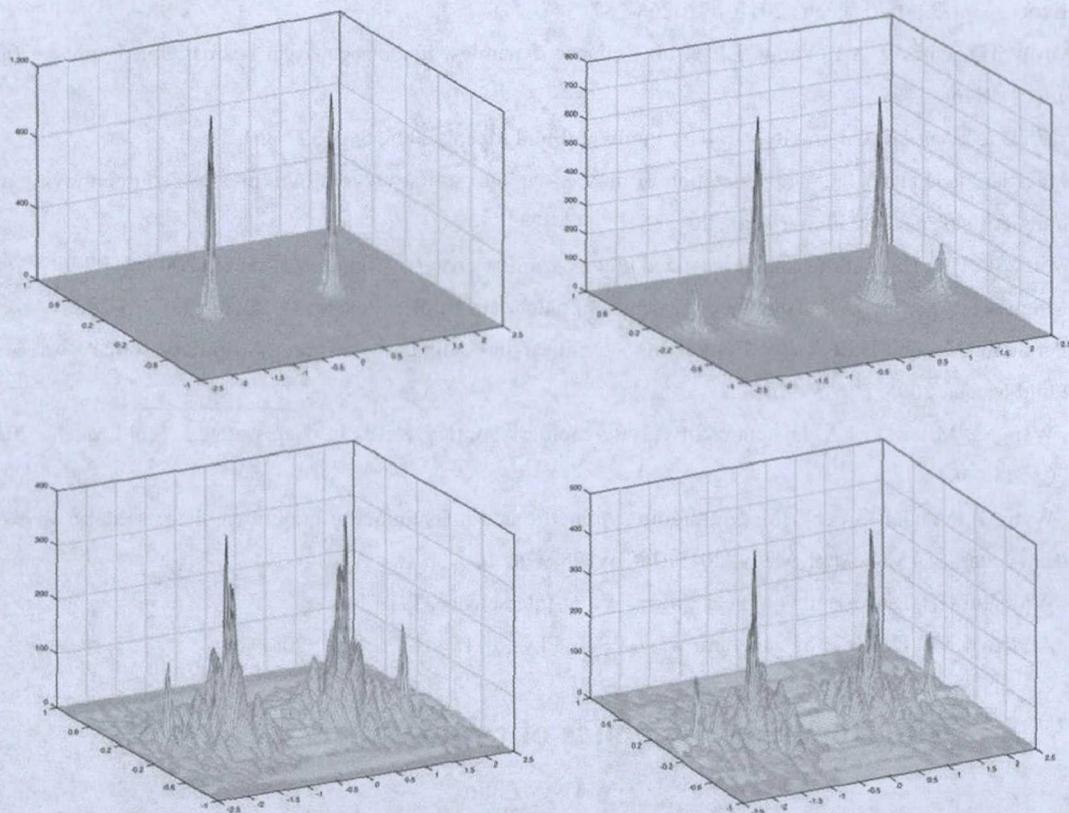


图 4 对应于图 3 中各时间点 Fourier 空间中的谱

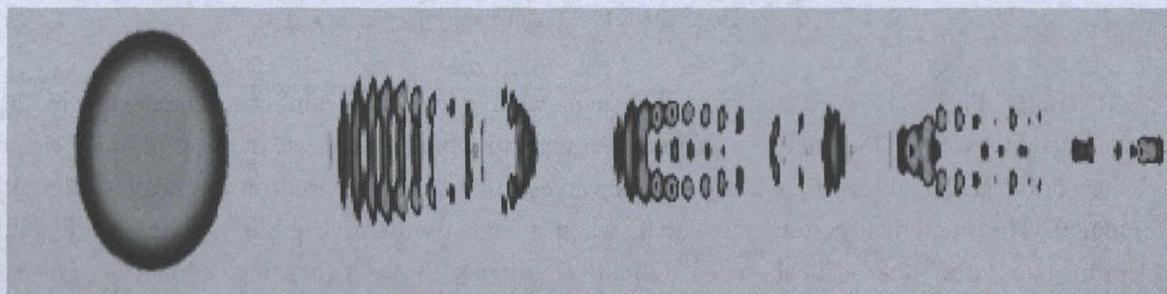


图 5 偏离临界点的聚焦现象

参考文献

- 1 Akers B, Milewski PA. A model equation for wavepacket solitary waves arising from capillary-gravity flows. *Stud. Appl. Math.*, 2009, 122: 249-296
- 2 Cho Y, Diorio JD, Akylas TR, et al. Resonantly forced gravity-capillary lumps on deep water. Part 2. Theoretical model. *J. Fluid Mech.*, 2011, 672: 288-306
- 3 Diorio JD, Cho Y, Duncan JH, et al. Resonantly forced gravity-capillary lumps on deep water. Part 1.

- Experiment. J. Fluid Mech., 2011, 672: 268-287
- 4 Grow TD, Ishaava AA, Vuong LT, et al. Collapse dynamics of super-gaussian beams. Opt. Express, 2006, 14(12): 5468-5475
 - 5 Kim B, Akylas TR. On gravity-capillary lumps. J. Fluid Mech., 2005, 540: 337-351
 - 6 Masnadi N, Duncan JH. The generation of gravity-capillary solitary waves by a pressure source moving at a trans-critical speed. J. Fluid Mech., 2017, 810: 448-474
 - 7 Milewski PA. Three-dimensional localized gravity-capillary waves. Comm. Math. Sci., 2005, 3: 89-99
 - 8 Milewski PA, Wang Z. Self-focusing dynamics of patches of ripples. Physica D, 2016, 333: 235-242
 - 9 Parau EI, Vanden-Broeck JM, Cooker MJ. Nonlinear three-dimensional gravity-capillary solitary waves. J. Fluid Mech., 2005, 536: 99-105
 - 10 Wang Z, Milewski PA. Dynamics of gravity-capillary solitary waves in deep water. J. Fluid Mech., 2012, 708: 480-501
 - 11 Wang Z, Vanden-Broeck JM. Multilump symmetric and nonsymmetric gravity-capillary solitary waves in deep water. SIAM J. Appl. Math., 2015, 75(3): 978-998.
 - 12 Whitham GB. Linear and nonlinear waves. Wiley-Interscience, 1974
 - 13 Zakharov VE. Collapse of Langmuir waves. Sov. Phys. IETP, 1972, 35(5): 908-914

Ring-focusing dynamics of capillary-gravity waves

WANG Zhan

(Key Laboratory for Mechanics in Fluid Solid Coupling Systems, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100190. Email: zwang@imech.ac.cn)

Abstract: There are deep analogies between water waves and nonlinear optics due to the universality of the cubic nonlinear Schrodinger equation. In this paper we numerically investigate the nonlinear dynamics of capillary-gravity waves in deep water based on the Akers-Milewski model. The numerical results show that, when a high oscillatory capillary-gravity wave train propagates near the critical speed (23cm/s), initially its self-focusing dynamics can be described by the cubic nonlinear Schrodinger equation, which is similar to a strong laser pulse propagating through a Kerr media. More importantly, the point-focusing dynamics resulting from Gaussian initial data and the ring-focusing dynamics resulting from the super-Gaussian initial data are very much similar to those occurring in nonlinear optics. However, in contrast to the nonlinear Schrodinger equation, wave collapse does not happen in the long-time dynamics of capillary-gravity waves, and instead, it is arrested by a group of depression lumps.

Key words: Capillary-gravity waves; Nonlinear optics; Self-focusing; Super-Gaussian; Lump