

计算物理
Chinese Journal of Computational Physics
ISSN 1001-246X, CN 11-2011/O4

《计算物理》网络首发论文

题目: 基于第二粘性的 Navier-Stokes 方程组求解正激波结构
作者: 李馨东, 赵英奎, 胡宗民, 姜宗林
收稿日期: 2019-08-21
网络首发日期: 2019-11-11
引用格式: 李馨东, 赵英奎, 胡宗民, 姜宗林. 基于第二粘性的 Navier-Stokes 方程组求解正激波结构. 计算物理.
<http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2011.o4.20191111.1054.002.html>



网络首发: 在编辑部工作流程中, 稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定, 且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式(包括网络呈现版式)排版后的稿件, 可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定; 学术研究成果具有创新性、科学性和先进性, 符合编辑部对刊文的录用要求, 不存在学术不端行为及其他侵权行为; 稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准, 正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性, 录用定稿一经发布, 不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容, 只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

出版确认: 纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊(光盘版)》电子杂志社有限公司签约, 在《中国学术期刊(网络版)》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版, 以单篇或整期出版形式, 在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊(网络版)》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物(ISSN 2096-4188, CN 11-6037/Z), 所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

基于第二粘性的 Navier-Stokes 方程组求解正激波结构

李馨东^[1], 赵英奎^[1], 胡宗民^[2], 姜宗林^[2]

([1]北京应用物理与计算数学研究所,北京, 100094) ([2]中国科学院力学研究所,北京, 100190)

摘要 为考察气体第二粘性(即体积粘性)对正激波内部流动的影响机制,数值求解了含第二粘性的一维 Navier-Stokes 方程组,结果表明:第二粘性对激波内部的密度、热流和能量分布等物理量具有抹平效应,导致热流和熵流的峰值减小、激波厚度增加,体积粘性耗散的增加使得一部分机械能转化为内能;考虑第二粘性所计算的密度分布和激波厚度大为改善,与实验数据吻合较好;当马赫数为 $1.2 \leq Ma \leq 10$, 激波内部的 Knudsen 数满足 $0.12 \leq Kn \leq 0.4$ 。因此,当考虑第二粘性时 Navier-Stokes 方程组能更准确地模拟正激波结构。

关键词 Navier-Stokes 方程; Stokes 假设; 第二粘性; 体积粘性, 正激波结构

中图分类号 O35 文献标志码 A

Investigation of Normal Shock Structure by Using Navier-Stokes Equations with the Second Viscosity

LI Xindong^[1], ZHAO Yingkui^[1], HU Zongmin^[2], JIANG Zonglin^[2]

([1]Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100094, China)

([2]Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract In order to investigate the influence mechanism of the second viscosity on the internal flow of a normal shock wave, one-dimensional Navier-Stokes equations are numerically solved. The results indicate that the second viscosity has a smoothing effect on density, heat flow and energy distribution in the shock wave, which results in a decrease of the peak value of heat and entropy flows, and an increase of shock thickness. Due to the production of normal viscous dissipation, some lost mechanical energy is converted into internal energy. When considering the second viscosity, the density distribution and shock thickness are greatly improved, which are in good agreement with the experimental data. In addition, the Knudsen number is obtained as $0.12 \leq Kn \leq 0.4$ within the Mach number range from 1.2 to 10. It indicates that the Navier-Stokes equations with the second viscosity can simulate normal shock structure more accurately.

Key words Navier-Stokes equations; Stokes assumption; the second viscosity; Bulk viscosity; Shock wave structure

0 引言

流体力学是一门古老的学科,至今已发展近两百年了,其基本理论可以追溯至 19 世纪四五十年代^[1]。在流体力学领域,目前被人们广为熟悉和使用的 Navier-Stokes 方程组是由斯托克斯(G.G. Stokes)于 1845 年正式建立的^[2],他从牛顿内摩擦定律出发,完整推导出了含两个耗散系数的流体运动基本方程组,它们分别是剪切粘性系数 μ 和体积粘性系数 ζ ,也分别叫作牛顿流体的第一粘性和第二粘性。然而,在那篇奠定流体力学理论基石的论文^[2]中,Stokes 针对不可压缩或近似不可压缩流动问题,人为地给出了“ $\zeta = 0$ ”的假设,即忽略第二粘性或体积粘性,这是一个很强的人为假设。170 多年过去了,目前可压缩流体力学领域的主流研究仍然采用着这个“Stokes 假设”。其实在数学上,第一、二粘性完整地描述了牛顿流体的线性本构关系,它们分别体现在切向粘性应力和法向粘性应力;

收稿日期: 2019-08-21

基金项目: 中国博士后科学基金(2017M610821)、国家自然科学基金青年基金(11902042)。

作者简介: 李馨东(1988-),男,助理研究员,从事流体力学、界面不稳定性等研究领域, li_xindong@iapcm.ac.cn.

网络首发时间: 2019-11-11 15:23:57 网络首发地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2011.04.20191111.1054.002.html>

在物理上，第二粘性与流体微团以有限速率改变其体积时的耗散机制有关^[3]，当物质状态迅速变化或内部有缓慢自由度（如转动、振动和化学反应等）激发时，就可以借助第二粘性去描述系统热力学平衡的偏离^[4]。另外，根据热力学第二定律还可以证明 $\mu \geq 0, \zeta \geq 0$ ，当且仅当热力学系统内部的耗散过程是可逆的时候，这两种粘性系数才都为零^[5]。

近 60 年来，分子运动论^[6-8]、连续介质理论^[9,10]和实验^[11-14]已经表明：除了单原子气体外，Stokes 假设一般是不成立的，尤其在较高温度和频率的情况下。最近，第二粘性效应也在正激波结构^[15,16]、可压缩边界层流动^[17-20]、湍流燃烧^[21,22]、均匀各同性湍流^[23]、环形激波聚焦^[24]等可压缩流动中得到了应用研究，这些研究表明第二粘性作为流体固有的物性参数，对许多可压缩流动问题都会产生较为显著的影响。

本文研究的一维正激波结构，在数学上常被看作是一种没有宽度的间断，在物理上却是一种连续渐变的、强烈压缩的薄层。由于正激波结构的一维流动特征，不涉及气面相互作用，因而常被作为检验理论模型和算法可靠性的标准算例。实际上，真实的激波结构是一种简单而经典的非平衡态流动，波前波后均处于平衡态，在激波内部薄层区域属于非平衡态；尽管激波厚度只有几个分子平均自由程，但气体流动量从波前超声速区是平滑地过渡到波后亚声速区的。在以往研究中，通常采用 Boltzmann 方程^[25]、直接蒙特卡罗模拟（DSMC）^[26-28]和连续流 Navier-Stokes 方程等不同理论模型去求解气体的激波结构，并指出 N-S 方程组是不适用于计算激波结构的，因为理论计算氩气（Ar）、氮气（N₂）的激波结构与实验结果^[29]偏差较大。但是，对于多原子气体而言，如果基于“Stokes 假设”去求解 N-S 方程，那么实质上是忽略了第二粘性这个物理耗散的，因此有必要重新考察第二粘性（即体积粘性）对正激波内部流动的影响。

1 含第二粘性的一维 Navier-Stokes 方程组

激波是一种具有强烈压缩特性的物理流动现象，如图 1 所示。气流以超声速经过真实激波的内部时，流动变量从波前的超声速区（ $Ma_1 > 1$ ）平滑地过渡到波后的亚声速区（ $Ma_2 < 1$ ），波前和波后处于热力学平衡态，其宏观物理量可以通过 Rankine-Hugoniot 关系确定。激波内部处于非平衡态，厚度 δ 只有几个平均自由程。

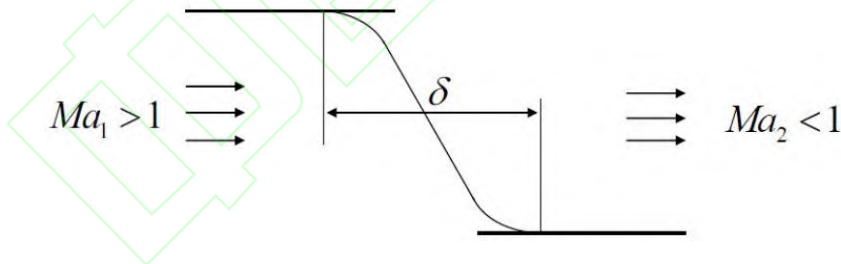


图 1 正激波内部结构的示意图

Fig.1 Diagram of internal structure of the normal shock wave

为求解图 1 中的激波内部流动，现在给出含有第二粘性的一维 Navier-Stokes 方程组，如等式 (1) 所示，其中的 μ 和 ζ 分别为第一粘性（剪切粘性）和第二粘性（体积粘性）。

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{4}{3} \mu + \zeta \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho H u)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{4}{3} \mu + \zeta \right) u \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \end{cases}, \quad (1)$$

考虑一维定常流动（即坐标参考系建在激波阵面上，流动量仅与空间位置 x 有关），则得连续方程、动量方程和能量方程的一维形式分别为

$$\begin{cases} \frac{d(\rho u)}{dx} = 0 \\ \frac{d(\rho u^2 + p)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\left(\frac{4}{3} \mu + \zeta \right) \frac{du}{dx} \right) \\ \frac{d(\rho Hu)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\left(\frac{4}{3} \mu + \zeta \right) u \frac{du}{dx} + k \frac{dT}{dx} \right) \end{cases}, \quad (2)$$

将上式对 x 做一次积分，有

$$\begin{cases} \rho u = \rho_1 u_1 \\ \rho u^2 + p - \left(\frac{4}{3} \mu + \zeta \right) \frac{du}{dx} = \rho_1 u_1^2 + p_1 \\ \rho Hu - \left(\frac{4}{3} \mu + \zeta \right) u \frac{du}{dx} - k \frac{dT}{dx} = \rho_1 u_1 H_1 \end{cases}. \quad (3)$$

定义无量纲参数 $\bar{x} = \frac{\rho_1 u_1 x}{\mu_1}$, $\bar{u} = \frac{u}{u_1}$, $\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_1}$, $\bar{T} = \frac{T}{T_1}$, $\bar{p} = \frac{p}{\rho_1 u_1^2}$, $\bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_1}$, 普朗特数采

用 Eucken 关系式 $\text{Pr} = \frac{4\gamma}{9\gamma - 5} = \frac{\mu c_p}{k}$, 总焓 $H = c_v T + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho}$, $\bar{c}_v = \frac{1}{\gamma(\gamma - 1)Ma_1^2}$, Ma_1 为来流马赫数, 脚标 1 表示波前参数。将等式 (3) 无量纲化, 整理后 (去掉上标“-”) 得到一阶常微分方程组如下

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dx} = \frac{\rho^2}{\mu \left(\frac{4}{3} + \alpha \right)} \left(1 + \frac{1}{\gamma Ma_1^2} - p - \frac{1}{\rho} \right) \\ \frac{dp}{dx} = \left[\frac{p}{\rho} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\text{Pr}}{\rho^2} \left(\frac{4}{3} + \alpha \right) \right] \frac{d\rho}{dx} + \frac{\text{Pr}}{\mu} \left[p + \frac{\gamma - 1}{2\gamma\rho} - \frac{(\gamma - 1)Ma_1^2 + 2}{2\gamma Ma_1^2} \rho \right] \end{cases}, \quad (4)$$

该二元一阶微分方程组的边界条件满足

$$\begin{cases} \rho(-\infty) = 1 \\ p(-\infty) = \frac{1}{\gamma Ma_1^2} \end{cases}, \quad \begin{cases} \rho(+\infty) = \frac{(\gamma + 1)Ma_1^2}{2 + (\gamma - 1)Ma_1^2} \\ p(+\infty) = \frac{2\gamma Ma_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma(\gamma + 1)Ma_1^2} \end{cases}. \quad (5)$$

第一粘性采用 Sutherland 公式: $\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1.5} \frac{T_0 + T_s}{T + T_s}$, 新引进的无量纲参数 $\alpha = \frac{\zeta}{\mu} \geq 0$ 表示第二

粘性与第一粘性之比, 它决定了第二粘性的大小。本文主要考察第二粘性的三种理论结果:

1) $\alpha = \frac{\zeta}{\mu} = 0$ (或 $\zeta = 0$), 表示 Stokes 假设理论, 即忽略第二粘性^[2];

2) $\alpha = \frac{\zeta}{\mu} = (\gamma - 1) \frac{p\tau}{\mu}$, 表示分子运动论给出的粘性系数比^[6-8];

3) $\alpha = \frac{\zeta}{\mu} = \frac{1}{2} \frac{p\tau}{\mu}$, 表示连续介质理论给出的粘性系数比^[9,10];

本文以双原子的氮气为例, 仅考虑激波内部的转动激发态, 氮气分子的弛豫时间为 $p\tau_{rot} = \frac{\pi}{4} \mu Z_{rot}$, 分子碰撞数的范围^[16] $Z_{rot} \leq 10$, 为简单起见计算取碰撞数 $Z_{rot} = 10$ 。N₂ 为量热完全气体, 比热比 $\gamma = 1.4$ 。无量纲后的分子平均自由程为

$$\lambda = \frac{\rho_1 u_1 \lambda_1}{\mu_1} = \frac{16}{5} \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} Ma_1^2, \quad (6)$$

激波厚度函数 $\delta_0(x)$ 和激波厚度 δ 分别定义为

$$\delta_0(x) = \frac{\rho_2 - \rho_1}{d\rho/dx} \text{ 和 } \delta = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\max(d\rho/dx)}. \quad (7)$$

采用四阶 Range-Kutta 法求解式 (4) 中的一阶常微分方程组, 由于式 (5) 的边界条件为渐近条件, 实际计算时存在一定困难。这里采用打靶法^[15,16]:

1) 先在 $x=0$ 处取 $p(0) = \frac{p(-\infty) + p(+\infty)}{2}$;

2) 再任选 $\rho(0) = \rho_0$ 作为某一初始值, 利用已知的 $p(0)$ 和 $\rho(0)$, 从 $x=0$ 处分别向左右去求解方程 (4) 的初边值问题。根据 n 次得到的结果, 迭代更新 ρ_0 进行 $n+1$ 次的求解, 直到激波上下游区域的计算值满足渐近边界条件式 (5) 为止, 取数值迭代误差为 $\|\rho_n - \rho_0\| \leq 10^{-3}$ 。

2 正激波结构

2.1 激波内部的流动变量分布

图 2(a)-(c)给出了氮气在马赫数 $Ma=1.53, 2.0$ 和 6.1 时, 激波内部密度分布的理论和实验值, 图 2(d)为 $Ma=2.0$ 时激波内部的速度和温度分布。其中, 横坐标 x/λ 表示空间位置与分子平均自由程的比值, 纵坐标为归一化后的密度。

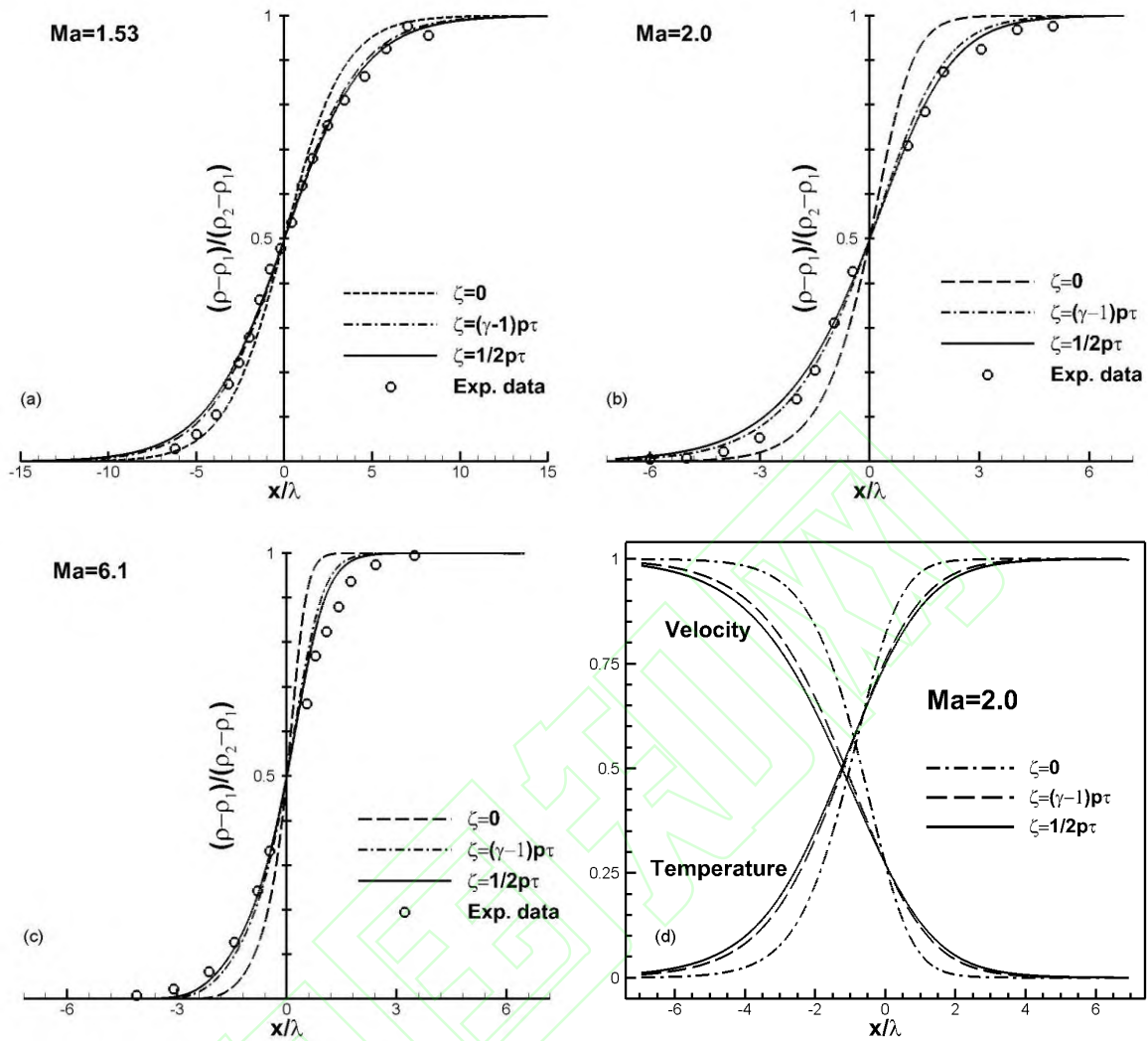


图 2 不同马赫数下激波内部的密度分布: (a) $Ma=1.53$; (b) $Ma=2.0$; (c) $Ma=6.1$; 曲线为理论计算的结果, 符号为实验数据. (d) 为 $Ma=2.0$ 时激波内部速度和温度分布的计算结果

Fig.2 Density distributions for different Mach numbers in the shock: (a) $Ma=1.53$; (b) $Ma=2.0$; (c) $Ma=6.1$; The lines and symbols represent respectively the results of theory and experiment. (d) is the numerical result of velocity and temperature distributions in the shock wave when $Ma=2.0$

从图 2(a)-(c)可以看出: 当忽略第二粘性 (即 $\zeta=0$) 时, 连续流 N-S 方程计算的密度曲线与实验值偏离较远, 如长虚线所示; 当考虑第二粘性时, 基于分子动理论^[6-8] (即 $\zeta=(\gamma-1)p\tau$, 点画线) 和连续介质理论^[9,10] (即 $\zeta=(1/2)p\tau$, 实线) 给出的预测值与实验结果^[29]吻合较好; 当马赫数越大, 激波薄层受到的压缩程度也就越大, 因而密度梯度显著增加。进一步地, 图 2 (d) 也比较了三种粘性理论下激波内部的速度和温度分布, 与密度分布的变化趋势相同: 当第二粘性增加时, 激波层内的速度和温度分布也变得更为平缓。可见, 与忽略第二粘性效应的情形相比, 考虑第二粘性 ζ 的连续流 Navier-Stokes 方程组更能准确地模拟激波的内部结构, 其实质是因为第二粘性增加了激波层内的物理粘性耗散, 导致不可逆的内耗发生, 使得流动量的分布显得更加平缓, 表现出了抹平效应。

2.2 激波内部的耗散输运

激波内部流动是一个非平衡态的过程, 流体微团经过激波层受到强烈压缩, 动能因不可逆内耗而产生机械能损失, 其中对输运耗散起关键作用主要是粘性和热传导。为了考察第二粘性的耗散效应, 现将无量纲后的粘性偏应力 τ_x 、热流 q 、熵流 s 分别写为

$$\tau_x = -\left(\frac{4}{3} + \alpha\right)\mu \frac{du}{dx}, \quad (8)$$

$$q = -\frac{\mu}{(\gamma-1)\text{Pr}Ma^2} \frac{dT}{dx}, \quad (9)$$

$$\frac{s-s_1}{R} = \frac{1}{\gamma-1} \ln \frac{T/T_1}{(\rho/\rho_1)^{\gamma-1}} \text{ 或 } \rho u T ds = -dq + \tau_x du. \quad (10)$$

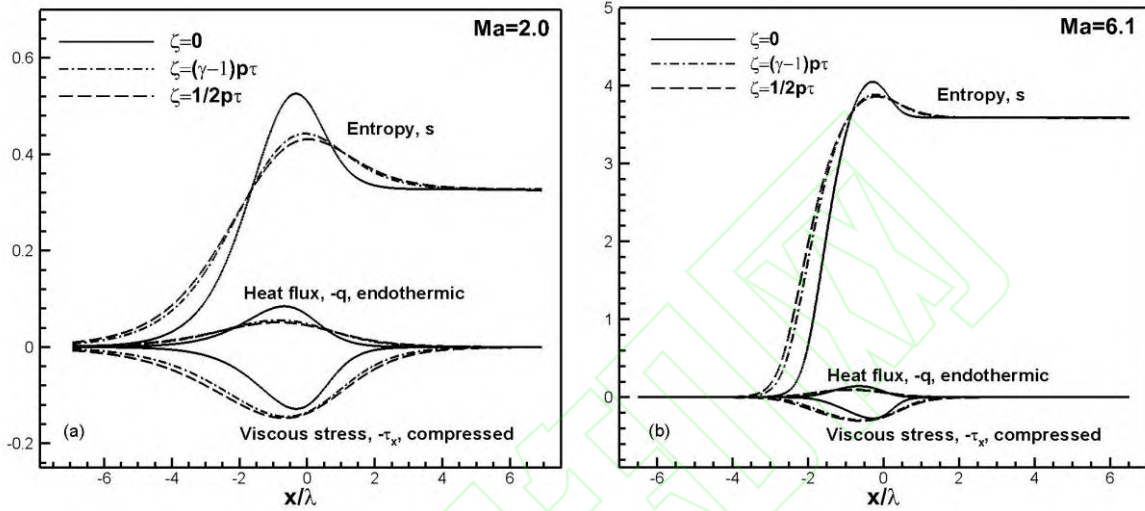


图3 激波内部的耗散输运(熵流、热流和粘性应力): (a) $Ma=2.0$, (b) $Ma=6.1$

Fig.3 Dissipative transfer in the shock (Entropy flow, heat flow and viscous stress): (a) $Ma=2.0$, (b) $Ma=6.1$

图 3(a)-(b)分别给出了 $Ma=2.0$ 和 6.1 时, 激波内部与耗散输运密切相关的粘性应力、热流和熵流值。这里的实线、点画线和虚线分别表示 Stokes 假设理论 ($\zeta=0$)、分子动理论 ($\zeta=(\gamma-1)\rho\tau$) 和连续介质理论 ($\zeta=(1/2)\rho\tau$) 的计算结果。单位质量的流体微团穿过激波层时, 其内部流动存在粘性耗散和热扩散等非平衡输运现象, 如图 3 所示。当忽略第二粘性时(实线所示), 粘性应力(与速度梯度变化相关, $-\tau_x$ 为负表示微团压缩)、热流(与温度梯度变化相关, $-q$ 为正表示微团吸热)和熵流都是先增加后减小, 在激波内部出现了一个极大值; 当考虑第二粘性时, 随着 ζ 的增加, 粘性应力 τ_x 的峰值也相应增加, 热流 q 峰值和熵流峰值均有所减小, 二者的曲线分布显得更加平缓。也就是说, 当气体微团经过激波层时, 受到强烈压缩并开始吸热升温, 粘性应力、热流和熵流随之增加至极大值; 随着非平衡输运过程逐渐趋于平衡态, 速度梯度和温度梯度也逐渐减小, 气体微团的粘性应力和热流通量的增速减缓并逐渐趋于零, 最后在激波后的平衡态处, 粘性应力 τ_x 和热流 q 降为零, 而熵流 s 增加至某一常数。对比图 3(a)和 3(b)可知, 马赫数越大或者压缩越强烈, 粘性应力 τ_x 和热流 q 的非平衡区域就越小(即激波厚度越窄), 熵流 s 却显著增大。

现在进一步分析激波内部熵流的极值问题。熵是一个状态量, 只与系统所处的热力学状态有关, 与过程无关。我们知道热力学系统的熵由两部分组成, 即 $ds = \delta s_f + \delta s_g$, $\delta s_f = \delta q/T$ 为熵流, 表示换热对系统熵变的贡献, 系统吸热为正, 系统放热为负。熵产 $\delta s_g \geq 0$ 是不可逆性对系统熵变化的贡献, 当且仅当热力学系统为可逆过程时才有 $\delta s_g = 0$ 。也就是说, 图 3 给出的熵值就是指激波内流动的熵流 δs_f , 由等式 (10) (通过热力学第一、二定律或 Navier-Stokes 方程组的能量方程可等价导

出)可知,熵流与吸热量相关,由于激波层内热流率 q 先增加后减小,因而熵流 δs_f 也随之先增后减小,于是出现了极大值^[5,30]。

2.3 激波内部的能量变化

在第 2.2 节耗散输运分析的基础上,为了考察激波内部的能量变化规律,设静焓 h 、动能 K 和总焓 H 分别为

$$h = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}, \quad K = \frac{u^2}{2}, \quad H = h + K = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}. \quad (11)$$

在激波的内部流动中,总焓 H 还应满足等式(3)中的能量方程,整理后有

$$\begin{aligned} H &= H_1 - u\tau_x - q \\ &= \frac{(\gamma-1)Ma_1^2 + 2}{2(\gamma-1)Ma_1^2} + \left(\frac{4}{3} + \alpha\right) \mu u \frac{du}{dx} + \frac{\mu}{(\gamma-1)Pr Ma^2} \frac{dT}{dx}. \end{aligned} \quad (12)$$

右端的 H_1 为来流总焓,减去粘性应力做功 $u\tau_x$ 和热传导 q ,这就是所谓的热力学第一定律。

图 4(a)和(b)分别给出了 $Ma=2.0$ 和 6.1 时激波内部的能量变化规律。当 $Ma=2.0$ 时,流体微团的动能小于静焓值,穿过激波阵面后,动能减小、焓值增加,而总焓与波前保持一致;当 $Ma=6.1$ 时,也有类似的变化趋势,只不过流体微团的动能要远大于静焓,而在激波后的平衡态处,动能转化为焓值,二者相加得到的总焓依然与波前保持不变。

当考虑第二粘性时,由于激波内部的粘性应力增大,使得气体微团的不可逆内耗增加、动能 K 减小,因而由第二粘性造成损失的那部分机械能转换为内能以增加焓值 h ;当流体微团穿过激波阵面后,波后处于平衡状态,动能和焓值最终保持稳定。从分布曲线可以看出,体积粘性越大,激波层内的能量曲线分布显得更加平缓,动能 K 的减小幅度和焓值 h 的增加幅度均有所上升。

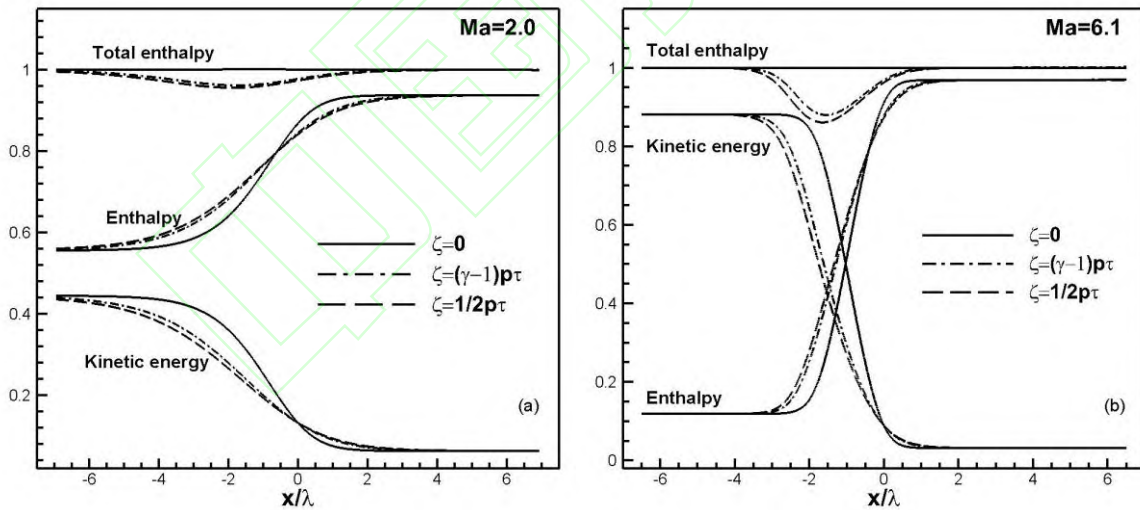


图 4 激波内部的能量变化(总焓、静焓和动能): (a) $Ma=2.0$, (b) $Ma=6.1$

Fig.4 The change of energy in the shock (Total enthalpy, static enthalpy and kinetic energy): (a) $Ma=2.0$, (b) $Ma=6.1$

2.4 激波厚度

现在来考察激波厚度 δ ,通常取密度梯度变化最大的位置作为激波厚度的定义。从图 5(a)可以看出,随着 $Ma=2.0$ 增加到 $Ma=10$,激波层内的密度梯度是逐渐增大的,根据式(7)的定义,激波厚度函数 $\delta_0(x)$ 的极大值是不断减小的,如图 5(b)所示,而这个极大值可以通过关系式 $\delta = \max[\delta_0(x)]$ 来确定激波的真实厚度。

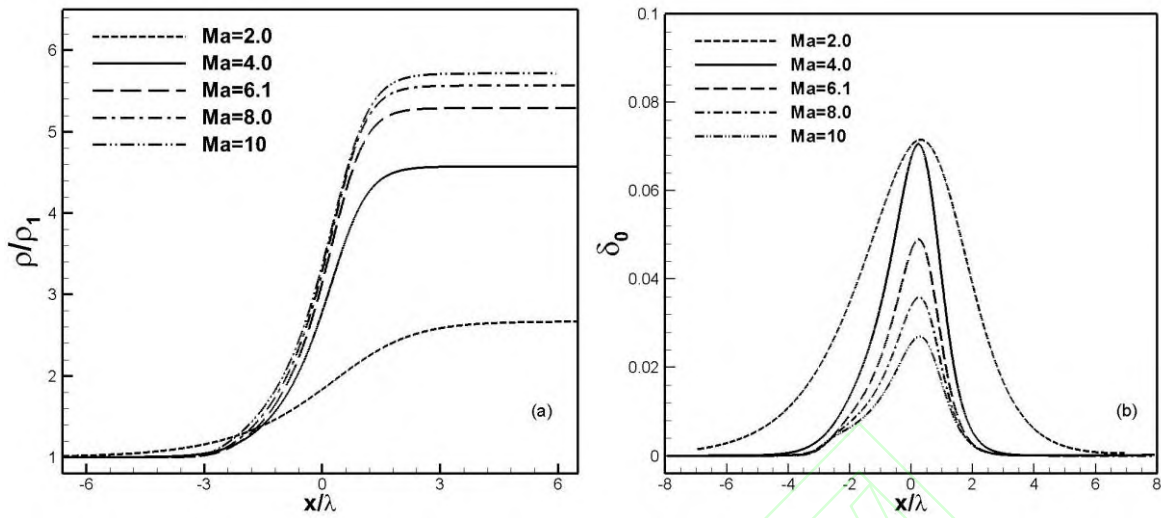


图 5 激波厚度随马赫数的变化: (a) 密度梯度变陡; (b) 激波厚度函数减小

Fig.5 Change of the shock wave thickness with Mach numbers: (a) Density gradient steepening; (b) Thickness function of shock wave decreasing

现将激波厚度 δ 与等式(6)定义的分子自由程 λ 进行比较分析。表 1 给出了不同马赫数下理论计算的 δ/λ : 当考虑第二粘性 ζ 时, 激波厚度大约增加了一倍; 在 $Ma \leq 10$ 时, 激波厚度 δ 只有几个分子自由程的宽度, 尤其在 $4 \leq Ma \leq 10$ 的范围内, 激波厚度 δ 约相当于 2λ 。随着 Ma 数增加, δ/λ 先减小后增加。实际上, 由分子动理论可知, 分子自由程 λ 与温度的平方根成反比, 即 $\lambda \sim 1/\sqrt{T}$, 当 Ma 数增大时, 压缩越剧烈, 不仅激波厚度 δ 减小, 也引起温度升高而导致分子自由程 λ 减小, 当二者均减小时, λ/δ 就可能呈现先增加后减小的变化趋势。

表 1 不同马赫数下理论计算的激波厚度
Table 1 Theoretical results of the normal shock thickness in different Mach numbers

	δ/λ					
Ma	1.53	2.0	4.0	6.1	8.0	10.0
$\zeta = 0$	4.52	2.51	1.19	1.12	1.16	1.23
$\zeta = (\gamma - 1)p\tau$	7.67	4.21	2.13	2.01	2.09	2.22
$\zeta = 1/2 p\tau$	8.44	4.63	2.35	2.22	2.31	2.45

最后比较激波厚度倒数 λ/δ 的理论结果与实验数据。从图 6 可以清楚地看到: 当忽略第二粘性的影响时, 即粘性耗散只有第一粘性, Navier-Stokes 方程组所计算的 λ/δ 与实验值相差甚远, 如点画线所示, 这与以往激波结构的研究结论^[25-28]是一致的。然而, 当把第二粘性考虑进来后, 理论计算的 λ/δ 大为改善, 与实验数据很接近, 尤其是当 $Ma \leq 4$ 时理论与实验结果吻合得很好; 而当 $4 \leq Ma \leq 10$ 时, 分子动理论和连续介质理论的计算结果比实验值偏高些, 原因可能是目前计算的碰撞函数 Z_{rot} 采用了常数, 如果采用随温度变化的碰撞函数可能会好些。进一步比较可知, 与分子动理论的预测结果 (长虚线所示) 相比, 连续介质理论的预测结果 (实线所示) 与实验数据符合得略好些。

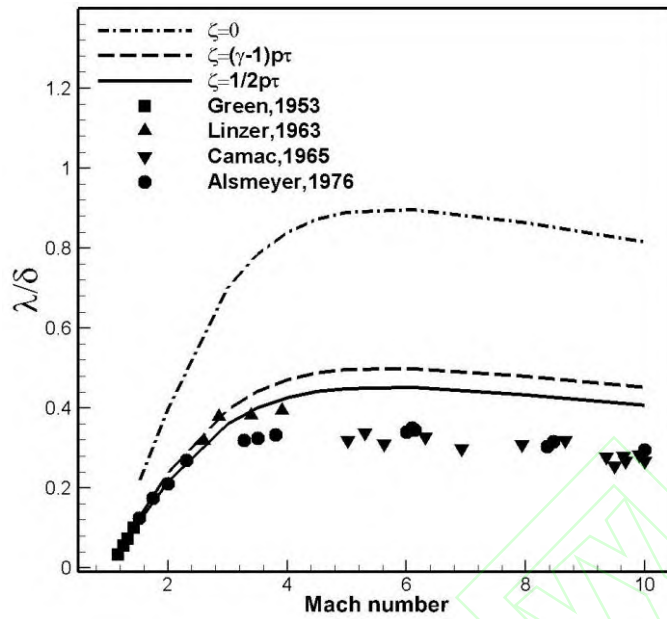


图 6 正激波厚度倒数的理论计算和实验结果
Fig.6 Reciprocals of the normal shock thickness for the theoretical calculation and experimental data

2.5 Knudsen 数的讨论

在 2.1 节和 2.4 节已表明，考虑第二粘性 ζ 的 Navier-Stokes 方程所计算的正激波结构与实验结果吻合得较好，但是激波只有几个分子自由程的宽度，此时连续介质假设的适用性就需要进一步讨论了。判断流动区域的无量纲参数为 Kn 数，其定义为 $Kn = \lambda/L$ ， L 为特征长度，不同区域的 Kn 数^[31,32]如图 7 所示。连续流的 Navier-Stokes 方程适用于 $Kn < 0.2$ 的区域，当 $Kn > 0.03$ 时，计算壁面流动时还需考虑滑移效应； $0.03 < Kn < 1.0$ 为过渡区； $Kn > 1.0$ 为自由分子流区。

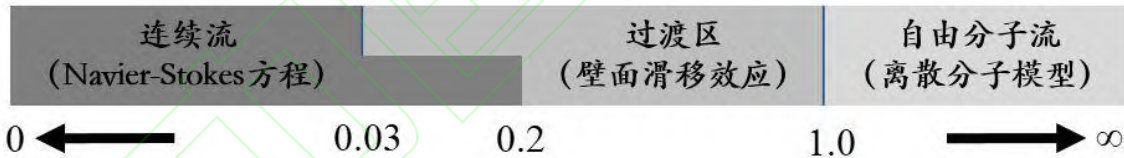


图 7 不同流动区域的 Knudsen 数
Fig. 7 Knudsen number for different flow regions

对于开放域中的激波内部流动来说，选取激波厚度 δ 作为特征长度是合理的，即在激波内部有 $Kn = \lambda/\delta$ 。由表 1 和图 6 的理论与实验结果可知：在 $1.2 \leq Ma \leq 10$ 范围内，正激波内部流动的 Knudsen 数满足 $0.12 \leq Kn \leq 0.4$ ；根据图 7 的流动判据可知，激波内部流动的 Kn 数一部分落在连续区域，一部分落在靠近连续域的过渡区，但激波内部结构不涉及壁面作用，因而在过渡区不存在所谓的壁面滑移效应。综合来看，我们可以认为：当把第二粘性考虑进 Navier-Stokes 方程组时，连续流模型计算的激波结构与实验结果吻合较好，这是基本符合 Knudsen 判据数的。

3 结论

通过求解含第二粘性（即体积粘性 ζ ）的一维 Navier-Stokes 方程组，详细分析了正激波内部流动的密度分布、耗散输运、能量变化、激波厚度和 Knudsen 判据数等几个方面，研究结果表明：（1）第二粘性会使激波层内的密度、热流、熵流、动能和焓的曲线分布变得更为平缓，粘性应力的峰值增大、热流和熵流的峰值减小、激波厚度增加，同时第二粘性耗散的增加导致了一部分动能转换为

内能。(2)与忽略第二粘性的情形相比,含 ζ 的连续流 Navier-Stokes 方程计算得到的激波密度和激波厚度大为改善,与实验数据吻合较好。(3)马赫数在 $1.2 \leq Ma \leq 10$ 范围时,正激波内部流动的 Knudsen 数满足 $0.12 \leq Kn \leq 0.4$ 。因此,采用 Navier-Stokes 方程组模拟激波内部流动时,需要谨慎采用“Stokes 假设”,应将流体的第二粘性正确合理地考虑进来。

参 考 文 献

- [1] 武际可. 力学史 [M]. 上海: 上海辞书出版社, 2010.
- [2] STOKES G G. On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids [J]. Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 1845, 8(22): 287-342.
- [3] 吴望一. 流体力学 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1982.
- [4] R B 泽尔泽尔道维奇, IO P. 莱依捷尔(著), 张树才(译). 激波与高温流体动力学现象物理学 [M], 北京: 科学出版社, 1985.
- [5] LANDAU L D, LIFSHITZ E M. Fluid Mechanics [M]. Beijing: Pergamon, 1959.
- [6] WANG C, UHLENBECK G E. Transport phenomena in polyatomic gases [R]. Report No. CM-681, 1951.
- [7] MONCHICK L., YUN K S, MASON E A. Formal kinetic theory of transport phenomena in polyatomic gas mixtures [J]. The Journal of Chemical Physics, 1963, 39(3): 654-669.
- [8] CHAPMAN S, COWLING T G. The mathematical theory of non-uniform gases. [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1970.
- [9] 李馨东, 胡宗民, 姜宗林. 可压缩流体体积黏性的连续介质理论 [J]. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2016, 46(3): 034701.
- [10] LI X D, HU Z M, JIANG Z. Continuum perspective of bulk viscosity in compressible fluids [J]. Journal of Fluid Mechanics, 2017, 812: 966-990.
- [11] SHERMAN D S. A low-density wind-tunnel study of shock-wave structure and relaxation phenomena in gases [R]. NACA TN-3298, 1955.
- [12] PRANGSMA G J, ALBERGA A H, BEENAKKER J J M. Ultrasonic determination of the volume viscosity of N₂, CO, CH₄ and CD₄ between 77 and 300 K [J]. Physics, 1973, 64(2): 278-288.
- [13] ASH R L, ZUKERWAR A J, ZHENG Z Q. Second coefficient of viscosity in air [R]. NASA CR-187783, 1991.
- [14] GRAVES R E, ARGROW B M. Bulk viscosity: past to present [J]. Journal of Thermophysics and Heat Transfer, 1999, 13(3): 337-342.
- [15] ELIZAROVA T G, KHOKHLOV A A, MONTERO S. Numerical simulation of shock wave structure in nitrogen [J]. Physics of Fluids, 2007, 19, 068102.
- [16] CHIKITKIN A V, ROGOV B V, RIRSKY G A, et al. Effect of bulk viscosity in supersonic flow past spacecraft [J]. Applied Numerical Mathematics, 2015, 93: 47-60.
- [17] EMANUEL G. Effect of bulk viscosity on a hypersonic boundary layer [J]. Physics of Fluids, 1992, 4: 491-495
- [18] GONZALEZ H, EMANUEL G. Effect of bulk viscosity on Couette flow [J]. Physics of Fluids, 1993, 5: 1267-1268
- [19] CRAMER M S, BAHMANI F. Effect of large bulk viscosity on large-Reynolds- number flows [J]. Journal of Fluid Mechanics, 2014, 751: 142-163.
- [20] BAHMANI F, CRAMER M S. Suppression of shock-induced separation in fluids having large bulk viscosities [J]. Journal of Fluid Mechanics, 2014, 756: 1-10.
- [21] BILLET G, GIOVANGIGLI V, GASSOWSKI G D. Impact of volume viscosity on a shock/hydrogen bubble interaction. Ecole Polytechnique Centre de Mathématiques Appliquées [R], 2007, UMR CNRS-7641.
- [22] FRU G, JANIGA G, THEVENIN D. Impact of volume viscosity on the structure of turbulent premixed flames in the thin reaction zone regime [J]. Flow Turbulence Combust, 2012, 88:451-478.
- [23] PAN S W, JOHNSEN E. The role of bulk viscosity on the decay of compressible, homogeneous, isotropic turbulence [J]. Journal of Fluid Mechanics, 2017, 833:717-744.
- [24] LI X D, ZHAO Y K, OUYANG B Y, HU Z M, JIANG Z L. Numerical investigation of bulk viscosity effect on two-dimensional toroidal shock wave focusing [J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2017, 34(4): 394-402.
- [25] 李志辉, 张涵信. 激波结构内流动问题的气体运动论描述 [J]. 空气动力学学报, 2007, 25(4): 411-436.
- [26] 沈青, 胡振华, 徐晓燕等. 正激波结构与反射的蒙特卡罗模拟 [J]. 空气动力学学报, 1991, 9(4): 435-441.
- [27] KOGAN M N. Rarefied gas dynamics [M]. New York: Plenum, 1969.
- [28] BIRD G A. Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows [M]. Oxford: Clarendon, 1998.
- [29] ALSMEYER H. Density profiles in argon and nitrogen shock waves measured by the absorption of an electron beam [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1976, 74(3): 497-513.
- [30] 李维新. 一维不定常流与冲击波 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2003.
- [31] ANDERSON J D. Hypersonic and high-temperature gas dynamics [M]. AIAA, 2006
- [32] 卞阴贵, 徐立功. 气动热力学 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2011.