

## 软化塑性带对材料宏观断裂强度及韧性影响的理论分析

曾霞光<sup>a\*</sup> 魏宇杰<sup>b,c</sup>

a 机电工程学院, 佛山科学技术学院, 广东 528000, 中国

b 非线性力学实验室, 力学研究所, 中国科学院, 北京 100190, 中国

c 工学院, 中国科学院大学, 北京 100049, 中国

**摘要:** 裂纹尖端的非弹性局部化变形将消耗能量从而增加材料的断裂韧性。这种局部变形通常通过局部塑性流动发生在一些固体材料中, 比如在包含异质层复合材料的滑移界面处, 或金属玻璃的剪切带里。局部变形机制及其发生范围对这些材料的宏观断裂性质至关重要。尽管对裂纹尖端的弱面或塑性带的增韧机制及效果的研究取得了巨大进展, 人们仍然需要一个简洁有力的理论来预测上述情况下材料的宏观断裂强度和韧性。通过一个改进的裂纹屈服带模型(Barenblatt, 1962; Dugdale, 1960), 我们研究了含塑性剪切带或滑移界面固体平板的有效断裂强度和韧性, 推导了含共面理想软化弹塑性带情况的断裂强度和韧性的理论解, 也给出了含这种对称分叉塑性带情况的近似计算公式, 并对这些理论结果进行了有限元计算验证。上述结果是以塑性带的分叉角、厚度、屈服应力、强度软化率和断裂韧性等为变量的函数, 定量描述了这些因素对材料宏观断裂性质的影响。它们表明:

(1) 此类材料的有效断裂韧性主要取决于 5 个无量纲量: 塑性带的分叉角 $\theta$ 、无量纲厚度 $\frac{t}{a}$ 、屈服强度 $\frac{\sigma_{y0}}{E}$ 、断裂韧性 $\frac{J_{Ic}}{aE}$ 和软化率 $\gamma$ ;

(2) 分叉脆性弱界面按与 $(\sec \frac{\theta}{2})^4$ 成比例的关系增加材料的宏观断裂韧性, 而理想软化弹塑性分叉带按与 $(\sec \frac{\theta}{2})^{2.6}$ 成比例的关系增加宏观断裂韧性, 而塑性带厚度既可能增加也可能减少材料的宏观断裂韧性, 具体影响取决于塑性带的强度软化率、无量纲屈服强度和韧性等;

(3) 屈服强度和软化率在一定范围内时, 含塑性带材料的宏观断裂韧性可最大化, 我们的结果可方便地给出这个范围和对应最大值。

我们建立的上述联系局部塑性带的几何和力学性质等与材料宏观断裂性质的理论能为此类材料的强韧化设计提供指导。

**关键词:** 塑性局部化, 软化率, 断裂强度, 韧性, 屈服带模型

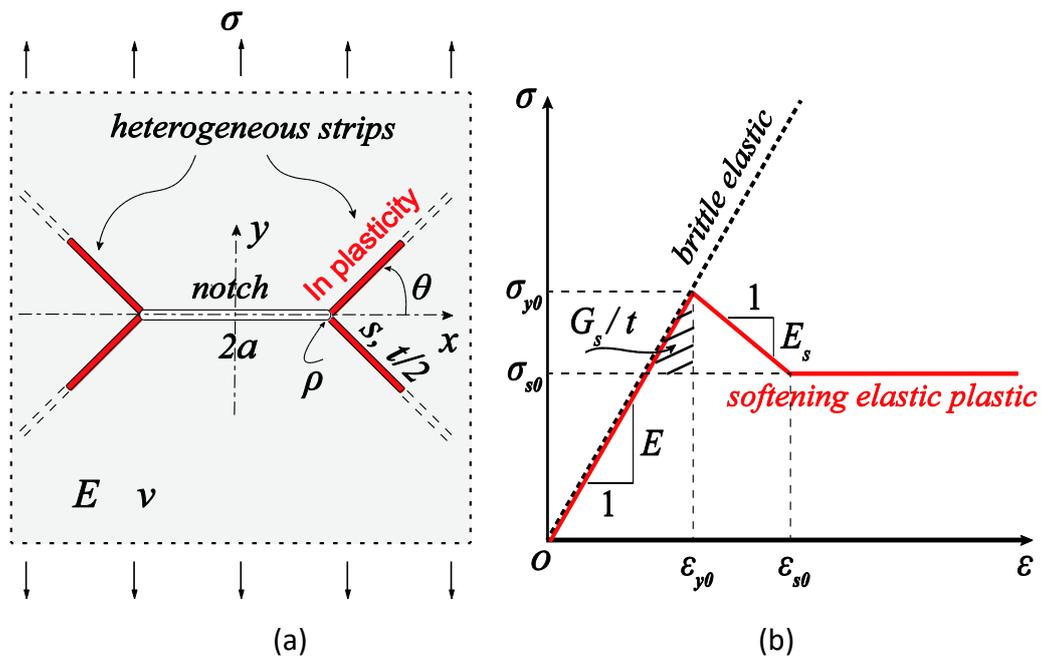
## 1. 引言

裂纹尖端的非弹性局部化变形将消耗能量从而增加材料的断裂韧性(Erdogan, 2000; Irwin, 1957), 局部变形机制及其发生范围对这些材料的宏观断裂性质至关重要。这种局部变形通常通过局部塑性流动发生在一些固体材料中, 比如在包含异质层复合材料的滑移界面处(Barthelat, 2014; Gupta et al., 2005), 或金属玻璃的剪切带里(Das et al., 2005; Hofmann et al., 2008; Schroers and Johnson, 2004)。尽管对裂纹尖端的弱面或塑性带的增韧机制及效果的研究取得了巨大进展(Anand et al., 2012; Barenblatt, 1962; Bilby et al., 1963; Budiansky and Hutchinson, 1978; Burdekin and Stone, 1966; Dugdale, 1960;

Tvergaard and Hutchinson, 1992), 人们仍然需要一个简洁有力的理论来预测上述情况下材料的宏观断裂强度和韧性。

## 2. 理论模型

我们考虑一个如图 1(a)所示的中心含狭窄缺口和对称屈服带的受拉平板模型, 研究其中所含塑性带对该平板有效断裂强度和韧性的影响。塑性带的力学性质采用如图 1(b)所示的理想软化弹塑性材料模型。当对称屈服带的夹角为 0 时, 模型变成如图 1(c)所示的特殊的共面塑性带情况。此时, 可通过如图 1(d)所示的改进的裂纹屈服带模型(Barenblatt, 1962; Dugdale, 1960)得到此问题的理论解。



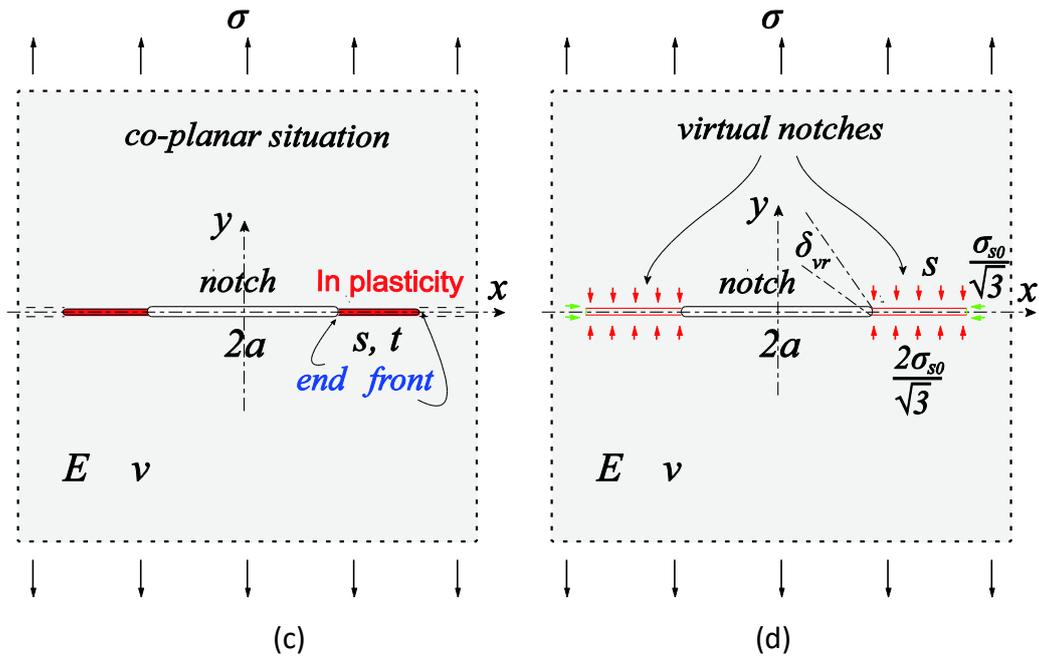


图 1. 中心狭长缺口前端含弱异质带平板的断裂性质分析模型：(a) 中心缺口前端含对称分叉塑性带的受拉平板模型，其中缺口长度为 $2a$ ，其尖端半径是 $\rho$ ，塑性带长度是 $s$ ，其厚度为 $t/2$ ，夹角是 $\theta$ ，它们满足关系 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ， $\rho \ll a$ 和 $t \ll a$ ；(b) 塑性带材料的应力应变关系，其中 $\sigma_{y0}$ 和 $\sigma_{s0}$ 分别代表其屈服应力和流动应力， $\varepsilon_{y0}$ 和 $\varepsilon_{s0}$ 表示对应应变， $E_s$ 表示其软化模量；(c) 中心缺口前端含共面塑性带的受拉平板模型，对应(a)中 $\theta = 0$ 的情况；(d) 中心缺口前端含共面塑性带受拉平板的“屈服带模型”。

### 3. 理论解

这里，我们给出含共面理想软化弹塑性带情况的断裂强度和韧性的理论解，也给出含这种对称分叉塑性带情况的近似计算公式。为清楚起见，我们分别用 $\sigma_f$ ， $\sigma_f^b$ ， $\sigma_f^\theta$ 来表示含共面塑性带、对称分叉脆性界面和对称分叉塑性带平板的有效断裂强度，用 $J_f$ ， $J_f^b$ ， $J_f^\theta$ 来表示它们对应的有效断裂韧性。

#### 3.1. 共面塑性带情况

基于图 1(d)所示的理论模型，我们通过推导得到了含共面理想软化弹塑性带平板的断裂强度 $\sigma_f$ 的理论解：

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{EG_s}{\pi(a+s_f)} + \frac{4\sigma_{s0}}{\sqrt{3\pi}} \operatorname{acos} \frac{a}{a+s_f}}, \quad (1a)$$

$$\text{或者} \sigma_f = \frac{\sqrt{3E}(J_{Ic}-G_{Ic})}{8\sigma_{s0}\sqrt{s_f(2a+s_f)}} + \frac{4\sigma_{s0}}{\sqrt{3\pi}} \operatorname{acos} \frac{a}{a+s_f} + \frac{4a\sigma_{s0}}{\pi\sqrt{3s_f(2a+s_f)}} \ln \frac{a}{a+s_f}. \quad (1b)$$

其中的塑性带长度 $s_f$ 可利用以下两个公式中任意一个进行数值求解，

$$G_{Ic} + 8\sigma_{s0} \sqrt{\frac{s_f G_s(2a+s_f)}{3\pi E(a+s_f)}} - \frac{32a\sigma_{s0}^2}{3\pi E} \ln \frac{a}{a+s_f} = J_{Ic}, \quad (2a)$$

$$\frac{(a+s_f) \left[ 3\pi E(J_{Ic}-G_{Ic}) + 32a\sigma_{s0}^2 \ln \frac{a}{a+s_f} \right]^2}{192\pi s_f(2a+s_f)E\sigma_{s0}^2} = G_s. \quad (2b)$$

我们得到含共面理想软化弹塑性带平板的断裂韧性 $J_f$ 的理论解是

$$J_f = \frac{aG_s}{a+s_f} + 8a\sigma_{s0} \operatorname{acos} \frac{a}{a+s_f} \left[ \sqrt{\frac{G_s}{3\pi(a+s_f)E}} + \frac{2\sigma_{s0}}{3\pi E} \operatorname{acos} \frac{a}{a+s_f} \right], \quad (3a)$$

$$\text{或者} J_f = \frac{a \left\{ 3\pi E(J_{Ic}-G_{Ic}) + 32\sigma_{s0}^2 \left[ \sqrt{s_f(2a+s_f)} \operatorname{acos} \frac{a}{a+s_f} + a \ln \frac{a}{a+s_f} \right] \right\}^2}{192\pi s_f \sigma_{s0}^2 (2a+s_f)E}. \quad (3b)$$

假设缺口前端塑性带扩展单位面积消耗的能量 $G_s$ 为 $G_s = \frac{t\sigma_{y0}^2(1-\gamma)^2}{2E} =$

$G_{Ic}(1-\gamma)^2$ ，上述结果可重写为：

$$1 = \frac{t\sigma_{y0}^2}{2EJ_{Ic}} - \frac{32a\gamma^2\sigma_{y0}^2}{3\pi EJ_{Ic}} \ln \frac{a}{a+s_f} + \frac{8\gamma(1-\gamma)\sigma_{y0}^2}{EJ_{Ic}} \sqrt{\frac{ts_f(2a+s_f)}{6\pi(a+s_f)}}, \quad (4a)$$

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_{y0}} = (1-\gamma) \sqrt{\frac{t}{2\pi(a+s_f)}} + \frac{4\gamma}{\sqrt{3\pi}} \operatorname{acos} \frac{a}{a+s_f}, \quad (4b)$$

$$\frac{J_f}{a\sigma_{y0}} = \sigma_{y0} \left\{ \frac{t(1-\gamma)^2}{2E(a+s_f)} + \operatorname{acos} \frac{a}{a+s_f} \left[ \frac{8(\gamma-\gamma^2)}{E} \sqrt{\frac{t}{6\pi(a+s_f)}} + \frac{16\gamma^2}{3\pi E} \operatorname{acos} \frac{a}{a+s_f} \right] \right\}. \quad (4c)$$

采用理想弹塑性模型时， $G_s = 0$ ，我们能求出 $s_f$ 和 $\sigma_f$ 的显式解：

$$s_f = ae^{\frac{3\pi E(J_{Ic}-G_{Ic})}{32a\sigma_{y0}^2}} \left[ 1 - e^{\frac{3\pi E(G_{Ic}-J_{Ic})}{32a\sigma_{y0}^2}} \right] = ae^{\frac{3\pi E(J_{Ic}-G_{Ic})}{32a\sigma_{y0}^2}} \left[ 1 - e^{\frac{3\pi E(G_{Ic}-J_{Ic})}{32a\sigma_{y0}^2}} \right], \quad (5a)$$

$$\sigma_f = \frac{4\sigma_{y0}}{\sqrt{3\pi}} \operatorname{acos} \left[ e^{\frac{3\pi E(G_{Ic}-J_{Ic})}{32a\sigma_{y0}^2}} \right] = \frac{4\sigma_{y0}}{\sqrt{3\pi}} \operatorname{acos} \left[ e^{\frac{3\pi E(J_{Ic}-G_{Ic})}{32a\sigma_{y0}^2}} \right]. \quad (5b)$$

对应的有效断裂韧性为

$$J_f = \frac{16a\sigma_{y0}^2}{3\pi E} \operatorname{acos}^2 \left[ e^{\frac{3\pi E(G_{Ic}-J_{Ic})}{32a\sigma_{y0}^2}} \right] = \frac{16a\sigma_{y0}^2}{3\pi E} \operatorname{acos}^2 \left[ e^{\frac{3\pi E(J_{Ic}-G_{Ic})}{32a\sigma_{y0}^2}} \right]. \quad (5c)$$

另外，理想刚塑性带情况时有 $G_s = G_{Ic} = 0$ ，上述结果进一步简化为

$$s_f = a(e^{\frac{3\pi EJ_{Ic}}{32a\sigma_{y0}^2}} - 1), \quad (6a)$$

$$\sigma_f = \frac{4\sigma_{y0}}{\sqrt{3\pi}} \operatorname{acos} \left( e^{\frac{3\pi EJ_{Ic}}{32a\sigma_{y0}^2}} \right), \quad (6b)$$

$$J_f = \frac{16a\sigma_{y0}^2}{3\pi E} \operatorname{acos}^2\left(e^{-\frac{3\pi EJ_{Ic}}{32a\sigma_{y0}^2}}\right). \quad (6c)$$

### 3.2. 分叉塑性带情况

如果塑性带是线性脆弹性材料，其断裂韧性为 $J_{Ic}$ ，我们能求出图 1(a)所示含对称分叉弱面平板的有效断裂强度和断裂韧性的理论解，即：

$$\sigma_f^b = \sqrt{\frac{EJ_{Ic}}{\pi a}} \left(\sec\frac{\theta}{2}\right)^2, \quad (7a)$$

$$J_f^b = J_{Ic} \left(\sec\frac{\theta}{2}\right)^4. \quad (7b)$$

参考上述结果，我们进一步构造出含对称分叉塑性带平板的有效断裂强度和断裂韧性的计算公式，其中的参数 $m$ 是一个可用有限元模拟结果得出的拟合参数：

$$\sigma_f^\theta = \sigma_f \left(\sec\frac{\theta}{2}\right)^{m/2}, \quad (8a)$$

$$J_f^\theta = J_f \left(\sec\frac{\theta}{2}\right)^m. \quad (8b)$$

## 4. 有限元计算

我们进行了对应的有限元数值计算，并将它们与理论结果进行对比，其中屈服带长度及断裂强度结果的对比情况如下：

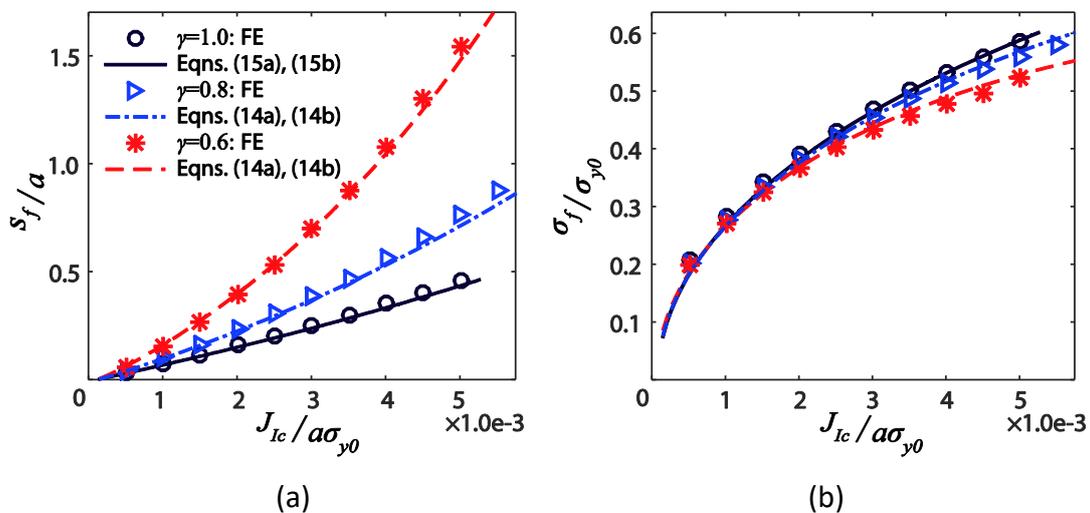


图 2. 理论预测和有限元计算结果的对比情况：(a) 共面屈服带正则化长度随其正则化断裂韧性的变化规律，其中 $a = 5\text{mm}$ ， $t = 0.036a$ ， $E = 100\text{GPa}$ ， $\sigma_{y0} = 400\text{MPa}$ ， $J_{Ic} = 0.2 \sim 11.0\text{kN/m}$ ， $E_s = 2E$ 、 $E$ 对应 $\gamma = 0.8$ 、 $0.6$ ；(b) 对应的正则化断裂强度结果的对比。

塑性带软化率 $\gamma$ 对其长度和平板断裂强度的影响的有限元结果和理论结果的对比如下:

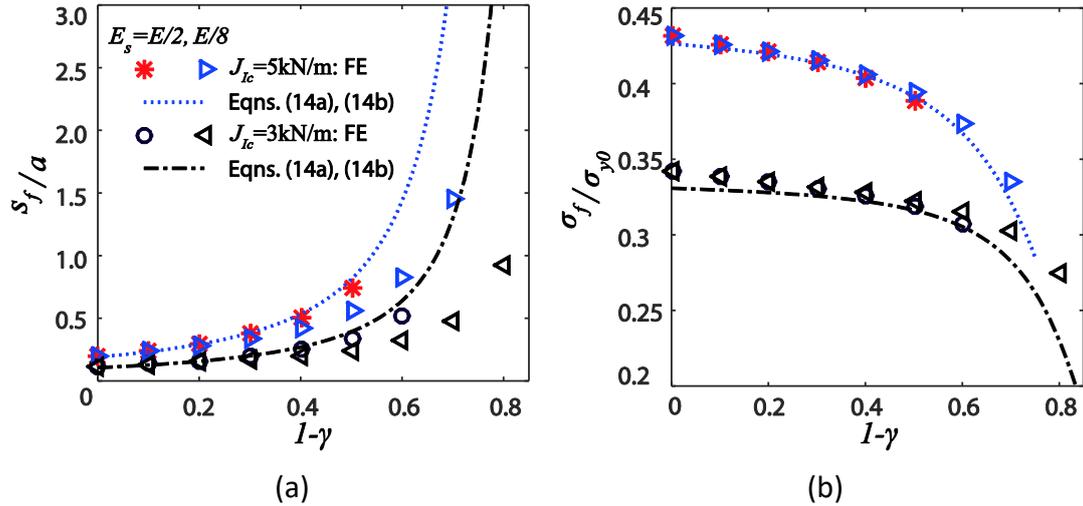


图 3. 塑性带软化率对平板断裂性质影响的有限元计算和理论预测结果对比: (a) 共面屈服带正则化长度随其软化率的变化规律, 其中 $a = 5 \text{ mm}$ ,  $t = 0.036a$ ,  $E = 100 \text{ GPa}$ ,  $\sigma_{y0} = 400 \text{ MPa}$ ; (b) 对应的正则化断裂强度结果的对比。

塑性带软化模量 $E_s$ 对其长度和平板断裂强度的影响的结果对比如下:

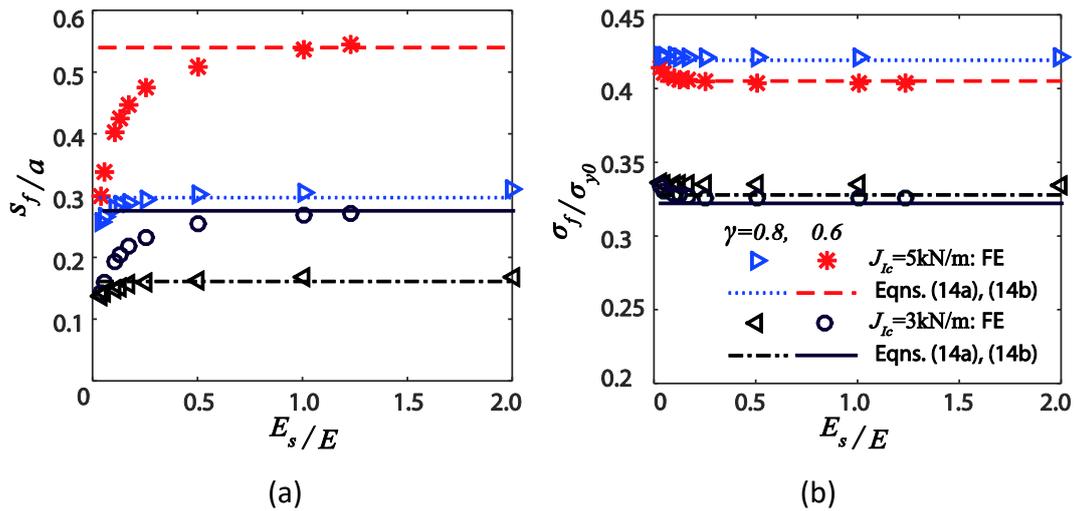


图 4. 塑性带软化模量对平板断裂性质影响的有限元计算和理论预测结果对比: (a) 共面屈服带正则化长度随其正则软化模量的变化规律, 其中 $a = 5 \text{ mm}$ ,  $t = 0.036a$ ,  $E = 100 \text{ GPa}$ ,  $\sigma_{y0} = 400 \text{ MPa}$ ; (b) 对应的正则化断裂强度结果的对比。

分叉塑性带情况理论公式中系数 $m$ 的有限元结果拟合如下:

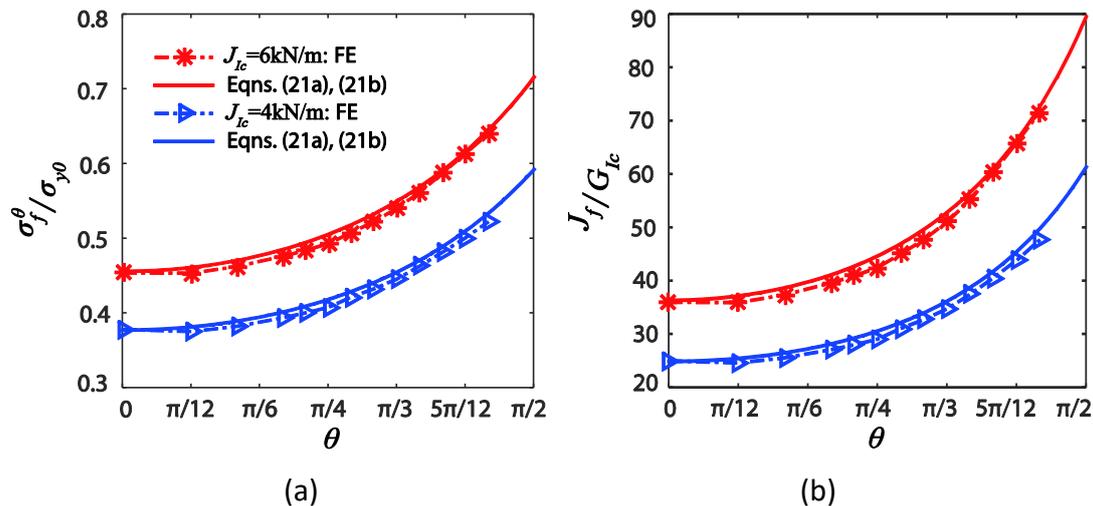


图 5. 含分叉塑性带平板模型的理论公式(8)中系数 $m$ 的有限元结果拟合情况: (a) 拟合有效断裂强度, 其中 $m = 2.6$ ,  $a = 5\text{mm}$ ,  $t = 0.036a$ ,  $E = 100\text{GPa}$ ,  $E_s = E/2$ ,  $\sigma_{y0} = 400\text{MPa}$ ,  $\gamma = 0.8$ ; (b) 拟合有效断裂韧性。

## 5. 平板的有效断裂韧性

利用量纲分析定义以下三个无量纲量: 塑性带厚度 $\frac{t}{a}$ 、屈服强度 $\frac{\sigma_{y0}}{E}$ 和韧性 $\frac{J_{Ic}}{aE}$ 。

### 5.1. 塑性带几何参数的影响

如图 6 所示, 我们考察塑性带几何参数分叉角 $\theta$ 和无量纲厚度 $\frac{t}{a}$ 对平板有效断裂韧性的影响。

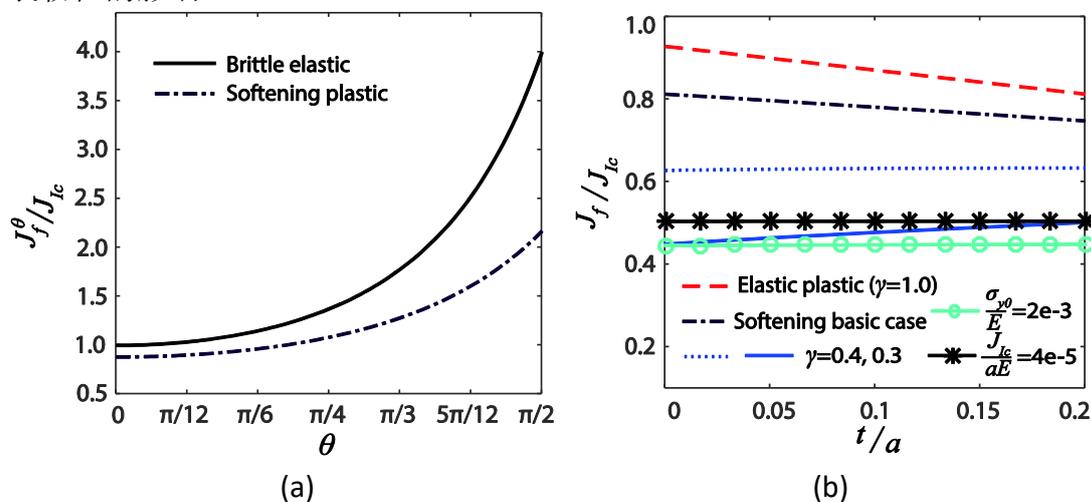


图 6. 塑性带几何参数对平板有效断裂韧性的影响: (a) 塑性带分叉角的影响, 其中 $a = 5\text{mm}$ ,  $t = 0.036a$ ,  $E = 100\text{GPa}$ ,  $\sigma_{y0} = 400\text{MPa}$ ,  $\gamma = 0.8$ ,  $J_{Ic} = 6\text{kN/m}$ ; (b) 塑性带厚度的影响, 其中 $a = 5\text{mm}$ ,  $E = 100\text{GPa}$ ,  $\sigma_{y0} = 400\text{MPa}$ ,  $\gamma = 0.6$ ,  $J_{Ic} = 6\text{kN/m}$ 。

### 5.2. 塑性带塑性的影响

塑性带塑性参数 $\frac{\sigma_{y0}}{E}$ 和软化率 $\gamma$ 对平板有效断裂韧性的影响如图 7 所示：

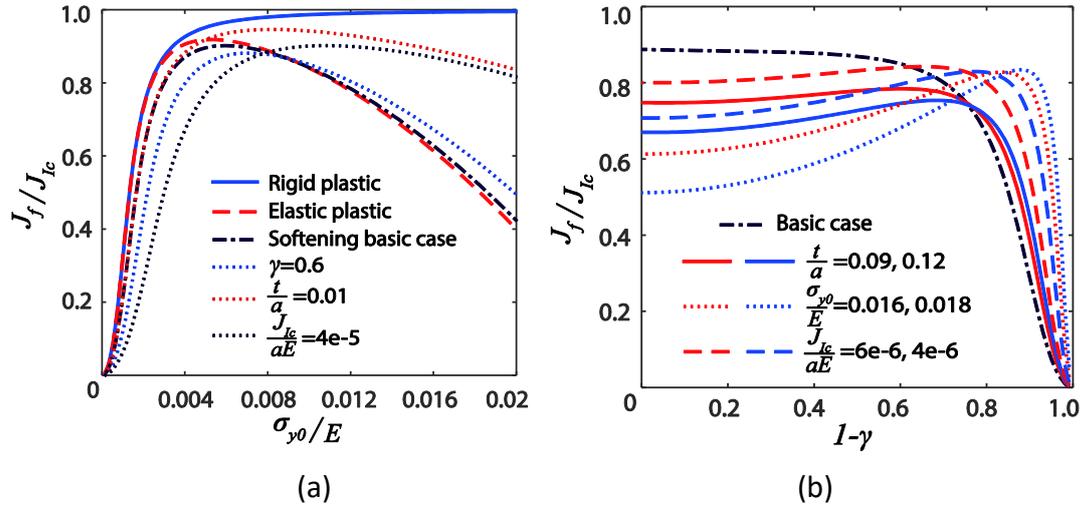


图 7. 塑性带塑性参数对平板有效断裂韧性的影响：(a) 塑性带屈服强度的影响，其中  $a = 5\text{mm}$ ,  $t = 0.036a$ ,  $E = 100\text{GPa}$ ,  $\gamma = 0.8$ ,  $J_{Ic} = 6\text{kN/m}$ ; (b) 塑性带软化率的影响，其中  $a = 5\text{mm}$ ,  $E = 100\text{GPa}$ ,  $\sigma_{y0} = 800\text{MPa}$ ,  $J_{Ic} = 6\text{kN/m}$ 。

### 5.3. 塑性带韧性的影响

塑性带断裂韧性对平板有效断裂韧性的影响如图 8 所示：

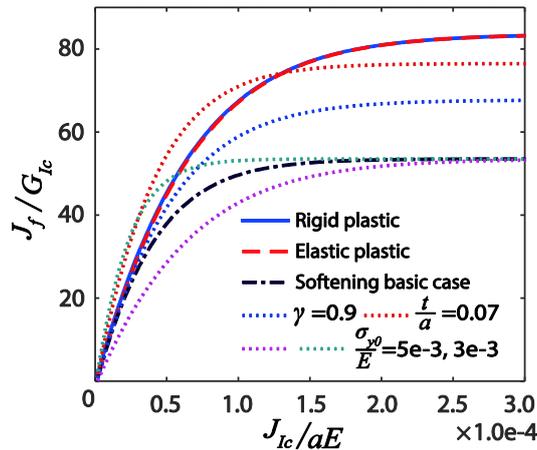


图 8. 塑性带的断裂韧性对平板有效断裂韧性的影响，其中  $a = 5\text{mm}$ ,  $t = 0.1a$ ,  $E = 100\text{GPa}$ ,  $\gamma = 0.8$ 。

## 6. 讨论及结论

现在，我们比较本文的缺口塑性带模型的结果和经典裂缝屈服带模型

(Barenblatt, 1962; Dugdale, 1960)导出的结果。根据经典的裂缝理想刚性屈服带模型可得:

$$s'_f = a(e^{\frac{\pi EJ_{Ic}}{8a\sigma_{y0}^2}} - 1), \quad (22a)$$

$$\sigma'_f = \frac{2\sigma_{y0}}{\pi} \arccos(e^{-\frac{\pi EJ_{Ic}}{8a\sigma_{y0}^2}}), \quad (22b)$$

$$J'_f = \frac{4a\sigma_{y0}^2}{\pi E} \arccos^2(e^{-\frac{\pi EJ_{Ic}}{8a\sigma_{y0}^2}}). \quad (22c)$$

它们与本文缺口模型的结果的差异如图 9 所示:

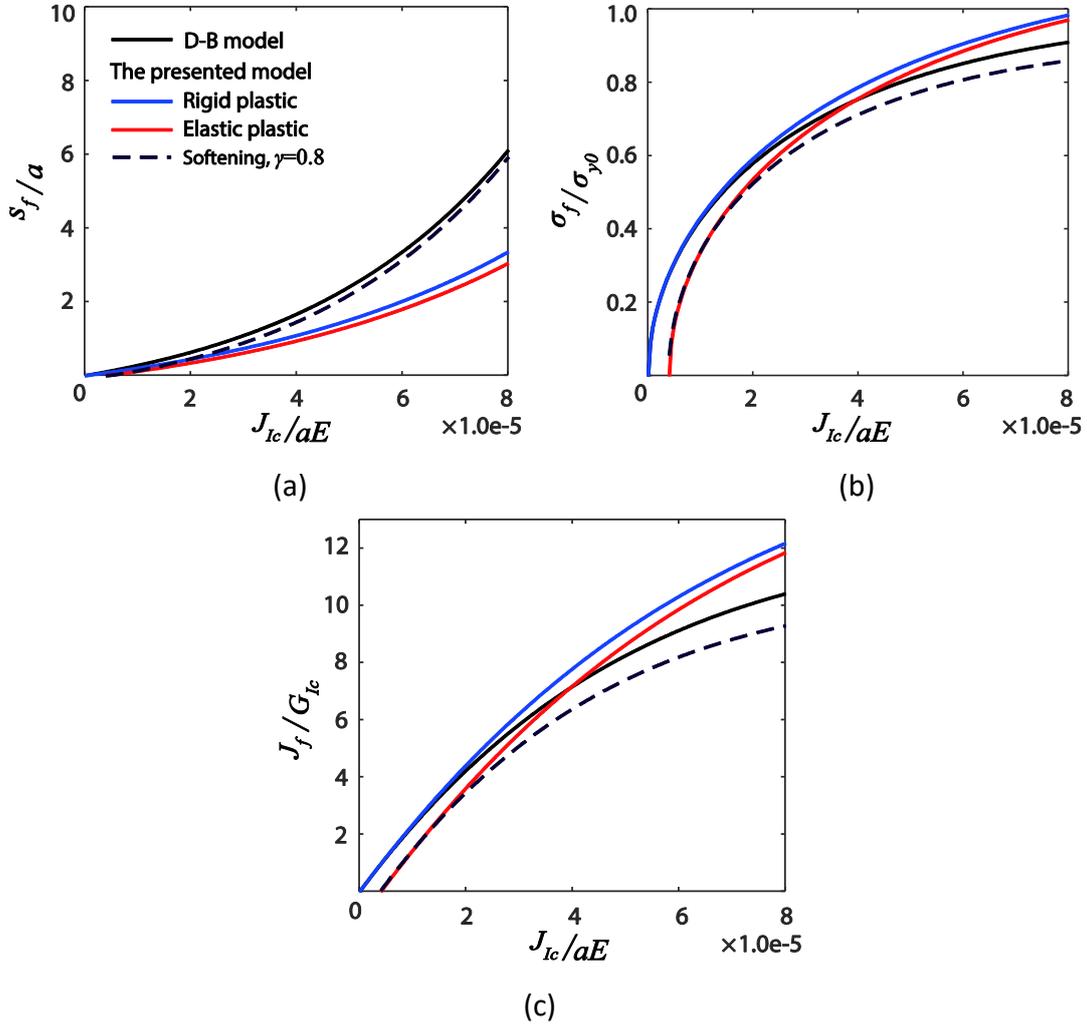


图 9. 经典的“裂缝屈服带模型”和我们的“缺口屈服带模型”的结果对比, 其中  $a = 0.005\text{m}$ ,  $E = 100\text{GPa}$ ,  $\sigma_{y0} = 400\text{MPa}$ ,  $G_{Ic} = 2000\text{N/m}$ ,  $J_{Ic} = 0 \sim 40000\text{N/m}$ : (a) 塑性带长度结果的对比; (b) 平板有效断裂强度结果的对比; (c) 平板有效断裂韧性结果的对比。

另外, 如图 10 所示, 我们考虑非对称单一塑性带的影响:

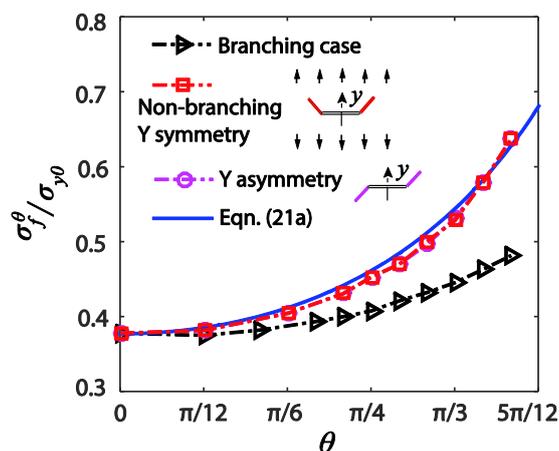


图 10. 对称分叉塑性带情况和非分叉单塑性带情况的有效断裂强度的对比, 其中  $a = 5\text{mm}$ ,

$$t = 0.036a, E = 100\text{GPa}, E_s = E/2, \sigma_{y0} = 400\text{MPa}, \gamma = 0.8, m = 5.1.$$

本文相关结果是以塑性带的分叉角、厚度、屈服应力、强度软化率和断裂韧性等为变量的函数, 定量描述了这些因素对材料宏观断裂性质的影响。他们表明:

(1) 此类材料的有效断裂韧性主要取决于 5 个无量纲量: 塑性带的分叉角  $\theta$ 、无量纲厚度  $\frac{t}{a}$ 、屈服强度  $\frac{\sigma_{y0}}{E}$ 、断裂韧性  $\frac{J_{Ic}}{aE}$  和软化率  $\gamma$ ;

(2) 分叉脆性弱界面按与  $(\sec \frac{\theta}{2})^4$  成比例的关系增加材料的宏观断裂韧性, 而理想软化弹塑性分叉带按与  $(\sec \frac{\theta}{2})^{2.6}$  成比例的关系增加宏观断裂韧性, 而塑性带厚度既可能增加也可能减少材料的宏观断裂韧性, 具体影响取决于塑性带的强度软化率、无量纲屈服强度和韧性等;

(3) 屈服强度和软化率在一定范围内时, 含塑性带材料的宏观断裂韧性可最大化, 我们的结果可方便地给出这个范围和对应最大值。

我们建立的上述联系局部塑性带的几何和力学性质等与材料宏观断裂性质的理论能为此类材料的强韧化设计提供指导。

## 说明

更详细情况请参考近期发表在 International Journal of Plasticity 上的论文 The effective fracture strength and fracture toughness of solids with energy dissipation confined to localized strips, <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2019.03.006>。

## 参考文献

Anand, L., Aslan, O., Chester, S.A., 2012. A large-deformation gradient theory for elastic-plastic materials: Strain softening and regularization of shear bands. International Journal of Plasticity 30-31, 116-143.

Barenblatt, G.I., 1962. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. Advances in Applied Mechanics 7, 55-129.

Barthelat, F., 2014. Designing nacre-like materials for simultaneous stiffness, strength and

toughness: Optimum materials, composition, microstructure and size. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 73, 22-37.

Bilby, B., Cottrell, A., Swinden, K., 1963. The spread of plastic yield from a notch. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society, pp. 304-314.

Budiansky, B., Hutchinson, J.W., 1978. Analysis of closure in fatigue crack growth. *Journal of Applied Mechanics* 45, 267-276.

Burdekin, F.M., Stone, D.E.W., 1966. The crack opening displacement approach to fracture mechanics in yielding materials. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 1, 145-153.

Das, J., Tang, M.B., Kim, K.B., Theissmann, R., Baier, F., Wang, W.H., Eckert, J., 2005. "Work-hardenable" ductile bulk metallic glass. *Physical Review Letters* 94, 205501.

Dugdale, D.S., 1960. Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 8, 100-104.

Erdogan, F., 2000. Fracture mechanics. *International Journal of Solids and Structures* 37, 171-183.

Gupta, H.S., Wagermaier, W., Zickler, G.A., Aroush, D.R., Funari, S.S., Roschger, P., Wagner, H.D., Fratzl, P., 2005. Nanoscale deformation mechanisms in bone. *Nano Letters* 5, 2108-2111.

Irwin, G., 1957. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics* 24, 361-364.

Hofmann, D.C., Suh, J., Wiest, A., Duan, G., Lind, M., Demetriou, M.D., Johnson, W.L., 2008. Designing metallic glass matrix composites with high toughness and tensile ductility. *Nature* 451, 1085-1089.

Schroers, J., Johnson, W.L., 2004. Ductile bulk metallic glass. *Physical Review Letters* 93, 255506-255700.

Tvergaard, V., Hutchinson, J.W., 1992. The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 40, 1377-1397.