

导航波流体力学 *

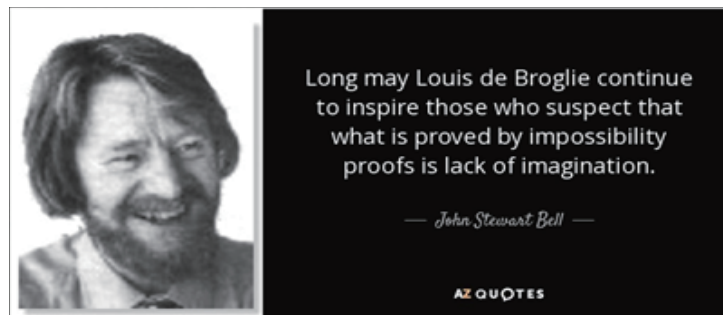
John W. M. Bush **

麻省理工学院数学系, 马萨诸塞州剑桥 02139

摘 要 Yves Couder, Emmanuel Fort 和同事们最近发现能够维持在振荡液体表面的毫米液滴可以通过与自身诱导波场的共振作用自我推进. 这篇文章针对实验结果进行了综述, 发现行走的液滴呈现出某些以往被认为只属于微观量子领域的特征. 文章接着回顾了这种流体动力导航波系统的理论描述, 从而深入了解其类量子行为的起源. 量子化源于导波场施加在液滴上的动态约束, 而多模态统计似乎是混沌导航波动力学的一个特征. 在此, 尝试评估此流体力学系统作为量子比拟的可能性和局限性. 该流体力学系统与量子导航波理论比较表明, 他明显不同于玻姆力学, 而与德布罗意 (de Broglie) 最初的量子动力学概念密切相关, 这包括德布罗意的双解理论及其后研究者在随机电动力学领域的拓展.

关键词 行走的液滴, 法拉第波, 量子比拟

中图分类号: O35 文献标识码: A DOI: 10.6052/1000-0992-21-011



本文于 2021-03-02 收到.

* *Annual Review of Fluid Mechanics* 惠允版权翻译此文. © 2015 by Annual Reviews.

** E-mail: bush@math.mit.edu

引用方式: John W. M. Bush. 王展译, 韦小丁校. 导航波流体力学. *力学进展*, 2021, 51(1): 155-177

John W. M. Bush. Wang Z trans., Wei X D proof. Pilot-wave hydrodynamics. *Advances in Mechanics*, 2021, 51(1): 155-177

© 2021 《力学进展》版权所有

1 引 言

流体力学和量子力学均致力于描述连续介质中粒子和波的运动,但是两者所关心的尺度迥然相异. 鉴于对流体系统的相对熟悉性和可达性,当人们试图理解量子力学的反常现象时,很自然的会与流体力学进行类比. Newton (1979) 描述光子在乙醚中的跳跃就像石头在池塘表面的跳跃. Young (1804) 通过与波纹水槽实验的类比证明光的波动性. Berry 等 (1980) 研究了横扫旋涡的平面波,作为 Aharonov-Bohm 效应的流体力学比拟 (Coste 等 1999). 最近对卡西米尔 (Casimir) 效应的流体力学比拟表明,法拉第波可以模拟真空波动在相邻物体间产生力的作用 (Denardo et al. 2009). 流体和量子力学的理论在超流体 (Donnelly 1993) 和玻色爱因斯坦凝聚态 (Pitaevskii & Stringari 2003) 领域中汇合. 在过去的十年里,第一个单粒子量子系统的流体动力学比拟出现在 Yves Couder 的巴黎实验室中.

当毫米尺寸的液滴被放置于振荡液槽上时,他可与液体表面相互作用,在由其自身引发的液体表面波动的引导下,以 1 cm/s 的特征速度平稳地穿行于液体表面 (Couder et al. 2005b, Protiere et al. 2006) (图 1(c)). 由此导致的行走液滴是液滴与波的空间延伸物 (Eddi et al. 2011b). 凭借空间离域性,他们表现出一些以前被认为是微观量子领域所独有的特征 (Bush 2010). 具体而言,行走液滴表现出类似于单粒子衍射 (Couder & Fort 2006)、量子隧穿 (Eddi et al. 2009b)、量子化轨道 (Fort et al. 2010, Harris & Bush 2014a; Perrard et al. 2014a, 2014b)、轨道能级分裂 (Eddi et al. 2012, Oza et al. 2014a) 和自旋态 (Oza et al. 2014a) 的行为. 已经观察到在单粒子衍射 (Couder & Fort 2006)、受限体系中的运动 (Harris et al. 2013)、旋转系统中的轨道运动 (Harris & Bush 2014a)、有心力下的轨道运动 (Perrard et al. 2014a, 2014b) 中出现相干的多模态统计. 第二节回顾行走液滴系统的基础力学和类量子特性. 合理描述行走液滴动力学的理论模型则在第三节中进行综述.

第四节探讨了流体系统与量子系统的现实主义描述之间的关系,其中大多数都根植于量子力学的流体力学表达 (Madelung 1926). 行走液滴系统与相对论量子动力学的早期概念,即德布罗意 (Louis de Broglie 1926, 1930, 1956, 1987) 的双解导航波理论,具有显著的相似性. 根据这一理论,微观粒子在与其自身波场共振的情况下运动. 德布罗意的力学通过随机电动力学 (SED) 研究者的扩展 (Kracklauer 1992, de la Pena & Cetto 1996, Haisch & Rueda 2000) 也得以提及,并讨论了他们与行走液滴系统的关系. 虽然这篇综述是以流体力学家的角度和语言来写的,但我希望他能激发流体力学界及其他领域的工作者重新审视和评估现实主义量子理论的兴趣.

2 行走的液滴

当毫米尺度的液滴悬浮在振荡液槽表面时会出现有趣的现象 (Walker 1978) (图 1), 要理解这一现象需要熟悉非聚结现象 (Neitzel & Dell'Aversana 2002) 和法拉第波 (Miles & Henderson 1990).

2.1 法拉第悬浮

不经意的观察表明水滴可能会跳跃穿过水面 (Jayaratne & Mason 1964). 如果碰撞时间小于排挤液滴和液槽间的空气层至范德华力引发聚结厚度所花费的时间,则液滴就会反弹. 尽管临界厚度通常取决于液相和气相的性质以及系统清洁度,但通常约为 100 nm (Couder et al. 2005a;

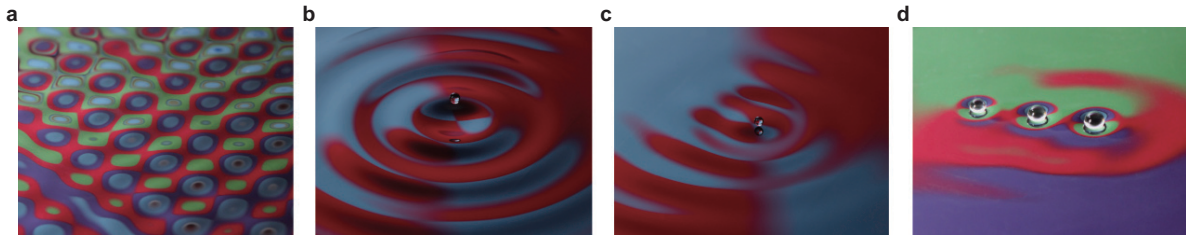


图 1

(a) 法拉第波, 略高于临界值; (b) 跳跃的液滴; (c) 行走的液滴; (d) 三个跳跃的液滴. 照片由 Dan Harris 提供

Terwagne et al. 2007, 2009). 在回弹的情况下, 空气层在液滴和液槽之间传递润滑应力 (Reynolds 1886), 从而导致液滴变形、减速和反转 (Gilet et al. 2007, Gilet & Bush 2012).

考虑一种密度为 ρ 、运动黏度为 ν 、表面张力为 σ 的液体, 在高度为 H 的水槽中被振幅为 A_0 及频率为 $f = \omega/(2\pi)$ 的垂直振动所驱动. 在液槽参考系中有效重力为 $g + \gamma \sin \omega t$, 其中 g 为重力加速度, $\gamma = A_0 \omega^2$. 液体在较小的 γ 下保持静止; 然而当 γ 超过法拉第波阈值 γ_F 时, 液层变为不稳定的法拉第波场 (Faraday 1831) (图 1(a)). 所引发的波的频率为驱动频率一半的整数倍 (Benjamin & Ursell 1954). 尽管高次谐波有可能被激发, 但对于行走液滴系统中所使用的硅油, 最不稳定的波为分谐波, 其频率为外加驱动频率的一半 (Benjamin & Ursell 1954), $\omega_F = \omega/2$ (Douady 1990, Edwards & Fauve 1994, Kumar & Tuckerman 1994, Kumar 1996). 因此, 当振动频率由小到大通过 γ_F 时首先出现分谐波, 其波长 $\lambda_F = 2\pi/k_F$ 满足水波色散关系 $\omega_F^2 = (gk_F + \sigma k_F^3/\rho) \tanh k_F H$. 实验系统包括一个受到垂直振荡 ($f \approx 20 \sim 150$ Hz, $A_0 \approx 0.1 \sim 1$ mm) 的硅油池 ($\nu \approx 1 \sim 10$ cS, $H \approx 4 \sim 10$ mm), 该振荡可产生振动加速度 $\gamma \leq 5g$ 及波长 $\lambda_F \approx 3 \sim 10$ mm. 当 $f \geq 80$ Hz 和 $H \geq 7$ mm, 法拉第波实际上为满足色散关系 $\omega_F^2 = \sigma k_F^3/\rho$ 的深水毛细波.

行走液滴实验在 $\gamma < \gamma_F$ 下开展, 因此在没有液滴的情况下液体表面将保持平静状态; 然而法拉第力是至关重要的. 首先, 他为系统提供动力, 为液滴运动及产生的波场提供能量; 其次, 他为液槽预先准备了一个单频波场. Eddi 等 (2011b) 利用自由表面合成纹影技术表征了粒子撞击振动液槽 ($\gamma < \gamma_F$) 产生的波场形式 (Moisy et al. 2009). 碰撞后, 瞬态波以约 6 cm/s 的速度离开撞击点向外传播, 尾迹中有一个法拉第驻波场, 他的存在时间取决于振动频率与法拉第阈值的接近程度. 行走液滴的演示可以简化为将培养皿粘合在扬声器的低音喇叭上. 用牙签破坏液体界面产生所需尺寸 (直径 $D \approx 0.6 \sim 1.0$ mm) 的液滴, 然后用闪光灯照明进行充分展示.

精细的实验需要仔细地调平和控制振动力 (Goldman 2002, Harris & Bush 2014b). 任何水平变化、非均匀振动或虚假共振都会导致法拉第阈值的空间依赖性. 步行系统的动力和统计特性对所有系统参数、液滴大小、流体性质以及作用力都高度敏感; 因此, 可重复的实验需要同时控制和记录每一个参数. 对于行走液滴系统统计性质的研究通常在略低于法拉第阈值的情况下进行 (Couder & Fort 2006; Harris et al. 2013; Harris & Bush 2014a; Perrard et al. 2014a, 2014b). 因此, 实验的持续时间受到实验室温度恒定性的制约, 温度变化通过与之同时发生的黏度变化改变法拉第阈值 (Bechhoeffer et al. 1995). 液槽应加盖固定的盖子来消除气流, 气流的特征表现为弯曲而非笔

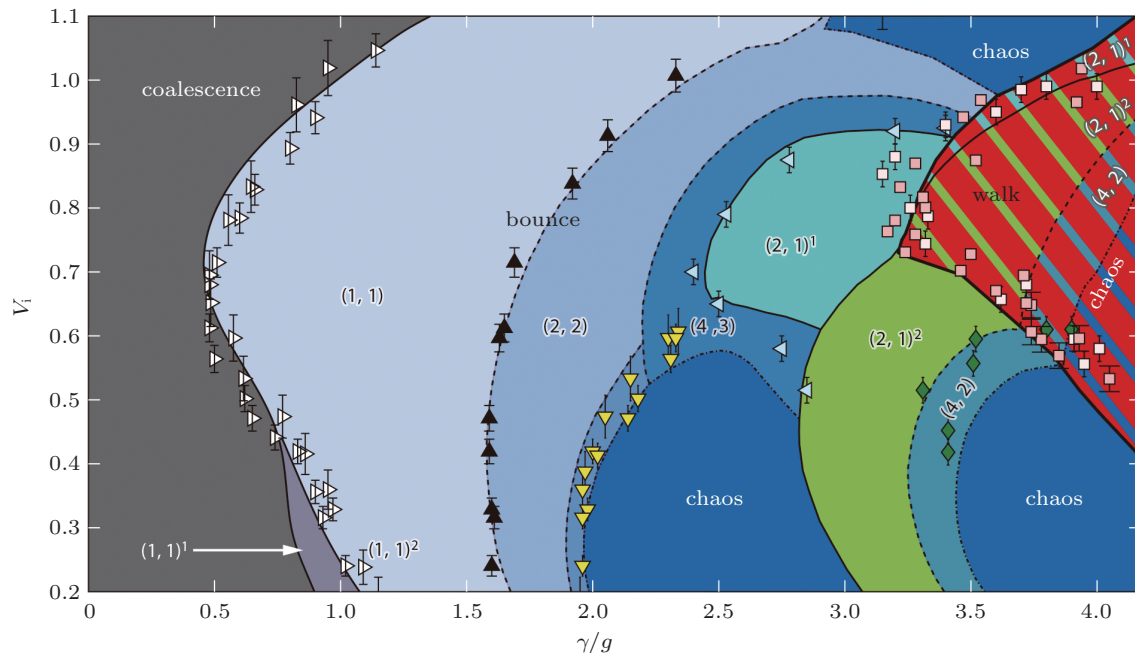


图 2

液滴弹跳形态与激励加速度 γ/g 及振动数 $V_i = \omega\sqrt{\rho a^3/\sigma}$ 之间关系的图谱. 液槽为 20 cS 的硅油, 被频率为 $f = \omega/2\pi = 80$ Hz 的振动所激励. 相关的法拉第阈值为 $\gamma_F/g = 4.2$. 液滴处于 (m, n) 模态时, m 个激励周期内弹跳 n 次, 根据总机械能, 整数上标 i 用于对多个 (m, n) 态进行排序, 其中 $i = 1$ 是最低的. 颜色表示预测的反弹和行走模式; 数据表示他们之间的测量阈值 (Moláček & Bush 2013b, Wind-Willassen et al. 2013)

直的液滴轨迹. 收集可靠统计数据的一个问题是液滴的寿命 (Terwagne et al. 2007). 即使在受控环境中也会发生不规则的聚结事件, 时间大约为一小时, 这可能是由于杂质在液槽中沉淀所致. 这种中断清楚地表明了按需生成相同液滴机制的价值 (Yang et al. 1997, Terwagne 2012).

Couder 的课题组针对液滴直径为 $D = 2a$ 、无量纲驱动加速度为 γ/g (Protière et al. 2005)、黏度 - 频率组合为 50 cS ~ 50 Hz (Protière et al. 2006) 及 20 cS ~ 80 Hz (Eddi et al. 2008) 表征液滴的弹跳行为. Moláček 和 Bush (2013a, 2013b) 和 Wind-Willassen 等 (2013) 推广了这些研究以指导他们的理论发展. 他们引入了振动数 $V_i = \omega\sqrt{\rho a^3/\sigma}$, 即激励频率与液滴固有振荡频率的相对大小, 在 $V_i - \gamma/g$ 平面内表征了不同黏性 - 频率组合下的液滴行为. 图 2 综合了 20 cS ~ 80 Hz 组合下的结果, 显示了最广泛的行走模式. 图中显示出了该系统的一个关键特性: 当 $V_i \approx 0.65$ 时, 液滴在其固有频率下更容易弹跳或行走. 不同的弹跳状态用 (m, n) 表示, 其中 m/f 表示弹跳模式的周期, 在此期间液滴接触自由表面 n 次.

当 γ 小于弹跳阈值时, 液滴会与槽中液体融合. 而稍大于阈值时, 弹跳以 $(1, 1)$ 模态发生: 每个驱动周期液滴碰撞液槽一次. 提高加速度会导致 $(2, 2)$ 弹跳模态, 在这种情况下液滴重复两次弹跳, 但跳跃的高度不同. 对于相对较小和较大的液滴, 可能会出现倍周期级联, 最终导致混乱的跳跃或行走. 对于液滴在有限尺寸范围内, 通常为 $0.6 \text{ mm} < D < 1.0 \text{ mm}$, 出现一个倍周期的 $(2, 1)$

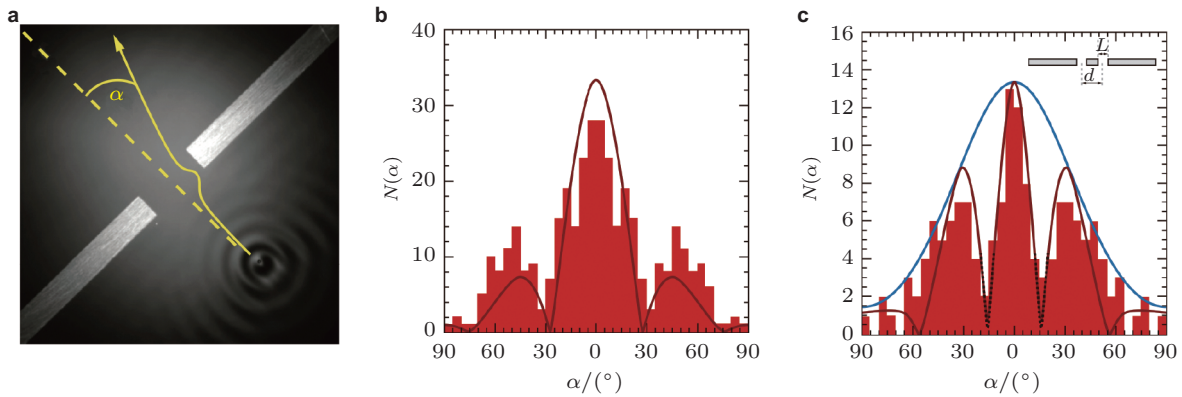


图 3

单粒子衍射. (a) 行走液滴穿过单缝, (b) 单缝实验中偏转角度 α 的直方图, (c) 双缝实验中偏转角度 α 的直方图. 图由 Yves Couder 提供, 经 Couder 和 Fort (2006) 的许可修订

跳跃模式, 然后在行走阈值 γ_w 处失稳为 (2, 1) 行走模式. 这些 (2, 1) 模式的行走液滴与他们的单频法拉第波场同步反弹, 在共振时下面的流体表现得像一个阻尼振荡器. 然而, 更复杂的模态也可能出现在步行模式中, 包括模式切换和混沌行走 (Wind Willassen et al. 2013). 第 3 节将综述这种行为的理论基础.

2.2 新古典行为

行走液滴系统的一个关键特性是路径记忆 (Edd et al. 2011b). 行走液滴在撞击液面时受到的侧向力取决于界面的局部倾斜度 (Protière et al. 2006), 而界面的状态取决于先前的撞击 (Eddi et al. 2011b). 在低记忆极限下, 波浪很快被耗散掉, 液滴只能感觉到最近撞击产生的波浪. 在高记忆下, 波浪相对持久, 液滴的轨迹取决于他遥远的过去. 虽然此物理图景由第 3 节中描述的理论发展得以量化, 但现在可以说, 行走液滴的类量子特征在高记忆下出现, 就像接近法拉第阈值时出现的现象.

2.2.1 单粒子衍射

Couder 和 Fort (2006) 通过对行走液滴狭缝衍射的研究为其类量子行为提供了第一个证据. 在他们的单缝研究中, 行走液滴被逐个引导至障碍物的缝隙处 (图 3). 当液滴通过狭缝时, 由于导航波场和障碍物的相互作用, 他们偏离了原来的路径. 他们将 125 个液滴引导至在垂直入射时具有均匀空间密度的狭缝, 提供了入射平面波的最佳近似值. 行走液滴的衍射由远场偏转角 α 来量化. α 的直方图呈波浪状, 有三个峰值, 与所预期的波长为 λ_F 的单频波干涉振幅大致一致 (图 3(b)). 他们的模拟得到了定性相似的分布. 这个系统代表了 Taylor (1909) 博士论文中单光子衍射实验的流体力学比拟.

Couder 和 Fort (2006) 第二项研究探究了光子或电子双缝实验的流体力学比拟 (Davisson & Germer 1927, Bach et al. 2013), 其不可测性被广泛接受 (Feynman et al. 1964). α 的波型直方图, 与波长为 λ_F 的单频波经双缝衍射后的振幅基本一致. 我们建议如下机制. 当行走液滴通过某一个狭

缝时, 其导航波同时通过两个狭缝. 因此, 液滴通过导航波有效地感知第二条狭缝. 通过比较导航波的衰减时间和液滴的平移时间可以很容易地检验这种依赖于行走液滴空间离域性的相互作用的可行性.

Couder 和 Fort (2006) 指出, 如果不能直接观察行走液滴, 可以借助导航波的衍射推断位置和动量的不确定性原理. 因此, 如果观察者不能确定交叉点, 他(她)将无法预测液滴的最终轨迹, 从而导致动量的不确定性. 如果不能解析液滴的弹跳相位, 特别是当液滴与液槽接触和自由飞行时, 可能会推断出另一个不确定性. 考虑到行走液滴穿过狭缝时与波场的复杂相互作用, 人们期望他的路径取决于反弹相位. α 对交叉点的明显无关性表明了这种依赖性. Couder 和 Fort (2006) 的实验表明狭缝内的导航波动力学足够复杂, 甚至是混沌的, 偏转角 α 对交叉点和反弹相位都很敏感.

2.2.2 隧穿

Eddi 等 (2009b) 研究了行走液滴与由薄流体层覆盖的势垒的相互作用. 导航波场入射到势垒上会产生部分反射和穿过势垒衰减的倏逝尾波. 反射波通常会引起接近势垒的液滴的反射; 但是, 液滴与波障的相互作用偶尔会允许液滴穿过隧道. 隧穿概率随势垒宽度呈现指数下降, 但随着 γ 接近法拉第阈值而逐渐增大. 再次强调, 类量子行为 (Gamow 1928) 源于导航波动力学, 不可预测性的根源在于液滴与其空间扩展导航波的复杂相互作用.

2.2.3 受限几何中的运动

第二种实验安排是针对受限几何 (特别是圆形腔) 中的行走液滴, 研究表明具有一致的相干统计行为 (Harris & Bush 2013, Harris et al. 2013) (见补充视频 1; 可搜索《流体力学年鉴》主页 <http://www.annualreviews.org> 上的补充材料链接). 在低记忆情形, 行走液滴会在圆腔内绕圈循环. 当路径记忆增大时, 逐渐出现复杂的轨道: 摆动的圆形轨道、漂移的椭圆轨道或周转圆. 在非常高的记忆下, 由于边界反射引起的波场的复杂性, 轨迹变得复杂并且可能是混沌的 (图 4(a)).

图 4(b) 中所示的直方图表明在这种混沌的导航波动中出现了一致的统计行为. 行走液滴在腔中的特定位置出现的概率大致由腔内预置激励频率产生法拉第波模态的振幅所决定. 与单粒子衍射 (Couder & Fort 2006) 的情况一样, 直方图中的波长与导航波大致相同, 但其形式由系统几何形状决定. 由于腔已调整为适合单个法拉第模态, 因此除了导航波波长 λ_F 和腔的几何形状之外, 在不了解任何动力学的情况下可以预测统计信息. 因此, 观察到的统计行为大致类似于量子围栏实验 (Crommie et al. 1993a, 1993b), 量子围栏实验表明在铜基底上捕获的电子密度是具有德布罗意波长 λ_{dB} 的波状图案, 其形式由腔形状所规定 (Fiete & Heller 2003).

2.2.4 旋转系统中的运动

在绕垂直轴以角频率 Ω 旋转的坐标系下, 在水平方向上以速度 u_0 匀速运动的物体执行半径为 $r_i = u_0/2\Omega$ 的惯性轨道, 此时惯性力 mu_0^2/r_i 由科氏力 $2m\Omega u_0$ 所平衡. Fort 等 (2010) 研究了旋转振动液槽上的行走液滴, 表征了轨道半径 r_0 对 Ω 的依赖关系. 在低记忆区, 行走液滴的轨道半径随旋转速率单调减小, 满足关系式 $r_0 = c_0 r_i$, 其中 $c_0 \approx 1.3$ 是一个拟合参数. 在高记忆区, r_0 不再随着 Ω 连续变化: 相反, 某些轨道半径是被禁止的. 然后, 轨道的量子化通过行走液滴与其自身尾迹的相互作用而出现 (图 5).

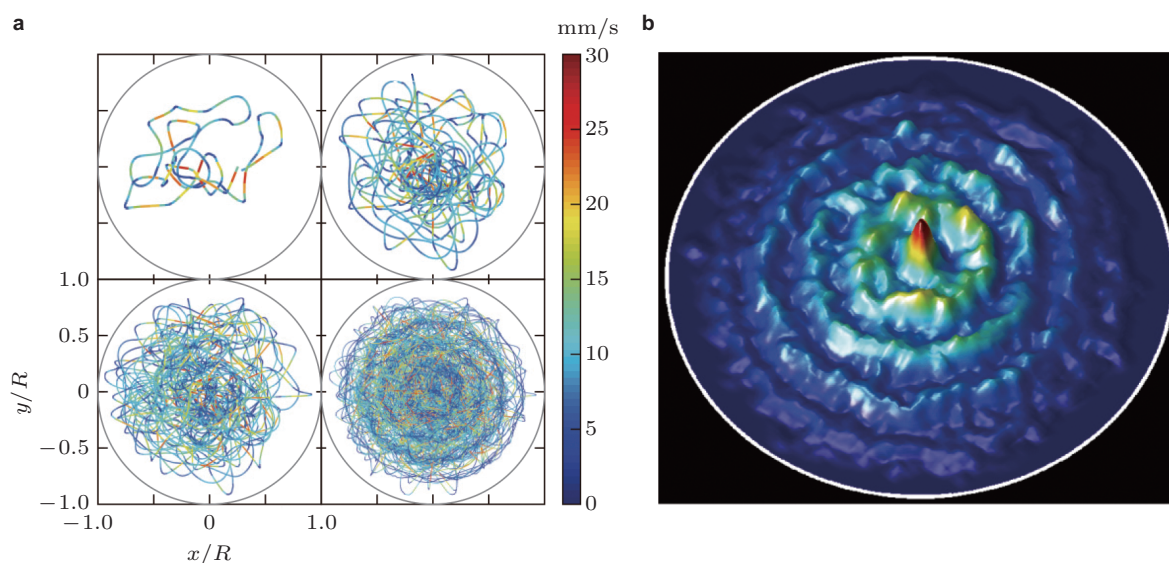


图 4

半径为 $R = 14.3\text{mm}$ 的圆形腔内的行走液滴. (a) 根据液滴的速度, 对高记忆区中的增长轨迹进行颜色编码. (b) 行走液滴的位置对应于腔内法拉第波模式的振幅直方图. 图经 Harris 等 (2013) 许可修订. 版权所有 2013, AIP Publishing LLC

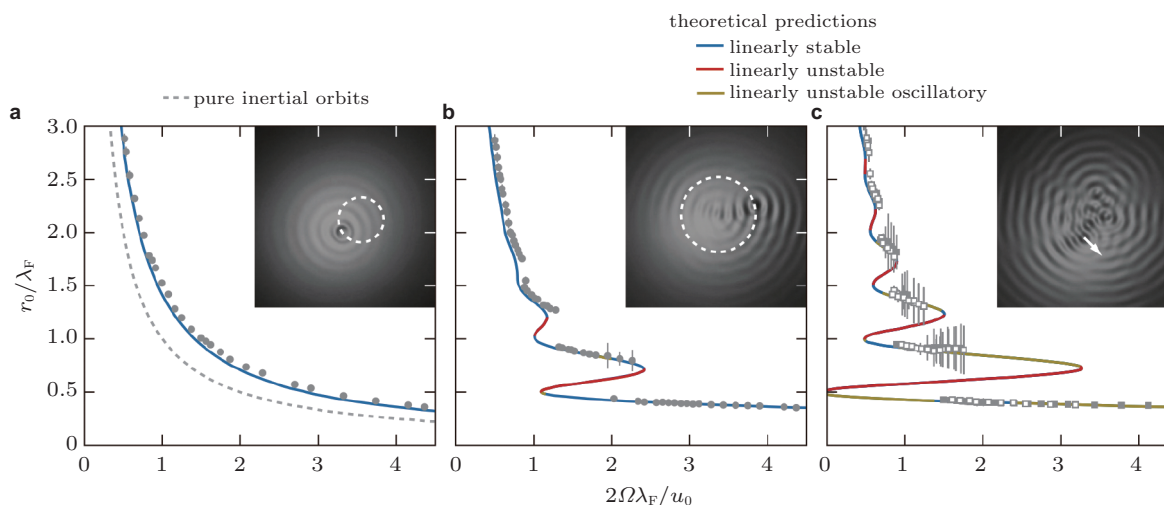


图 5

测量的轨道半径 r_0 与旋转速率 Ω 的函数关系 (Harris & Bush 2014a). (a) 低记忆 ($\gamma/\gamma_F = 0.822$), (b) 中间记忆 ($\gamma/\gamma_F = 0.954$), (c) 高记忆 ($\gamma/\gamma_F = 0.971$). 图 a 中的虚线表示纯惯性轨道, $r_i = u_0/2\Omega$, 其偏移量由液滴的水动力增强因子所决定: $r_0 = \gamma_B r_i$ (Bush et al. 2014). 实线代表 Oza 等 (2014a) 的理论预测值. 蓝色部分线性稳定, 红色部分线性不稳定, 暗黄色部分是线性不稳定的振荡分支. 不稳定暗黄色分支的数据表明了摆动状态的非线性稳定性. 误差线代表摆动幅度. 图经 Oza 等 (2014a) 的许可修订

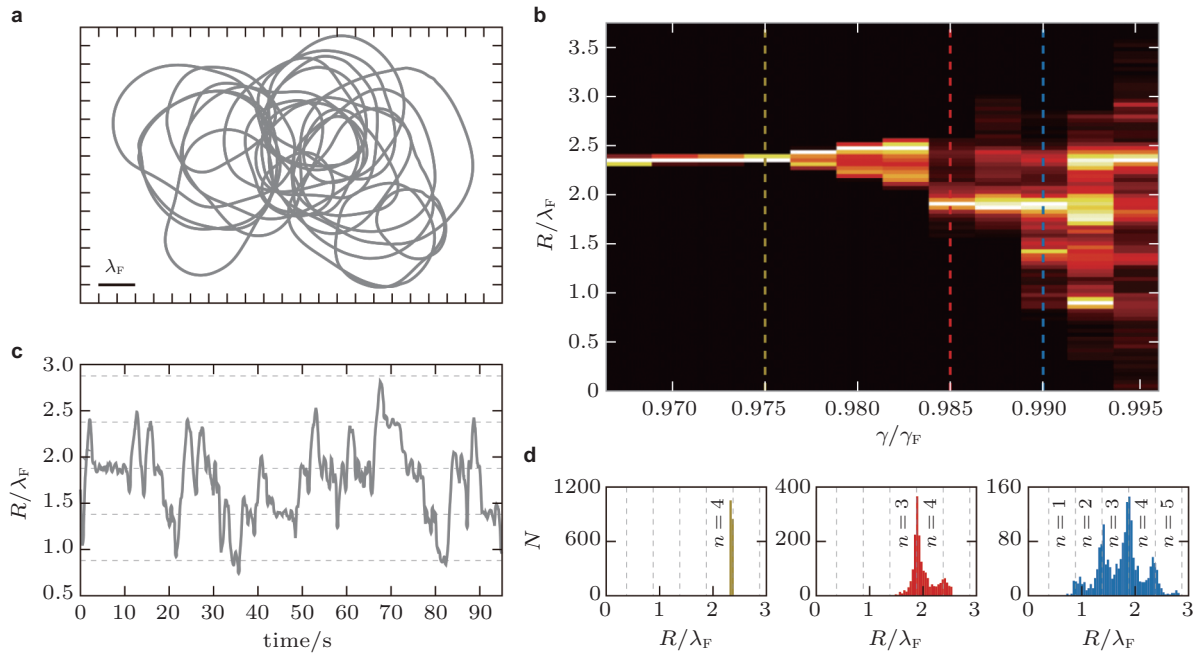


图 6

在 $\Omega = 0.79 \text{ rad/s}$ 旋转下的混沌行走. (a) 在高记忆区的混沌轨迹, $\gamma/\gamma_F = 0.971$. (b) 图 (a) 所示轨迹曲率半径 R 随时间的变化. (c) 曲率半径 R 与激励 γ/γ_F 之间的函数关系. 亮度对应于单列内的相对概率. (d) 对应于图 (c) 中三条垂直线的局部曲率半径直方图, $\gamma/\gamma_F = 0.975$ (暗黄色), 0.985 (红色) 和 0.990 (蓝色). 灰色的垂直虚线表示贝塞尔函数 $J_0(k_F r)$ 的零点. 图经 Harris 和 Bush (2014a) 的许可修订

由于作用在旋转坐标系中质量 m 上的科氏力 $2m\dot{\mathbf{x}}_p \times \boldsymbol{\Omega}$ 等同于与匀强电场 \mathbf{B} 中作用于电荷 q 上的洛伦兹力 $q\dot{\mathbf{x}}_p \times \mathbf{B}$ (Weinstein & Pounder 1945), Fort 等 (2010) 提出了行走液滴量子化惯性轨道与电子朗道能级之间的对应关系. 在高记忆区, 轨道半径大致以法拉第波长量子化, 就像朗道能级是在德布罗意 (de Broglie) 波长上量子化一样. Eddi 等 (2012) 通过研究旋转对一对绕行液滴的影响进一步探究了这种对应关系. 他们发现, 轨道半径增加或减小取决于这对液滴相对于液槽的旋转方向是相同还是相反, 这与原子能级的塞曼分裂类似.

Harris 和 Bush (2014a) 再次讨论了旋转系统, 他们证明了轨道量子化仅在有限的激励加速度范围内出现. 他们详细描述了轨道量子化的出现 (图 5) 以及在高记忆下相对丰富的行为. 随着记忆的逐渐增加, 轨道状态变得不稳定, 先是让位于摆动轨道运动, 然后是更复杂的周期性或非周期性轨道. 在高记忆极限下, 随着行走液滴在不稳定轨道之间的漂移, 出现了不规则的混沌轨迹 (图 6). 轨道曲率半径直方图的特征为多模态形式, 峰值对应于不稳定轨道的半径, 这表明他们具有持久的动力学影响.

2.2.5 中心力作用下的运动

Couder 的团队成功地用硅油封装了铁磁流体. 所得的双组分液滴可以像同类液滴一样行走. 通过施加具有径向梯度的垂直磁场, Perrard 等 (2014a, 2014b) 研究了由谐波势引起的中心力场中

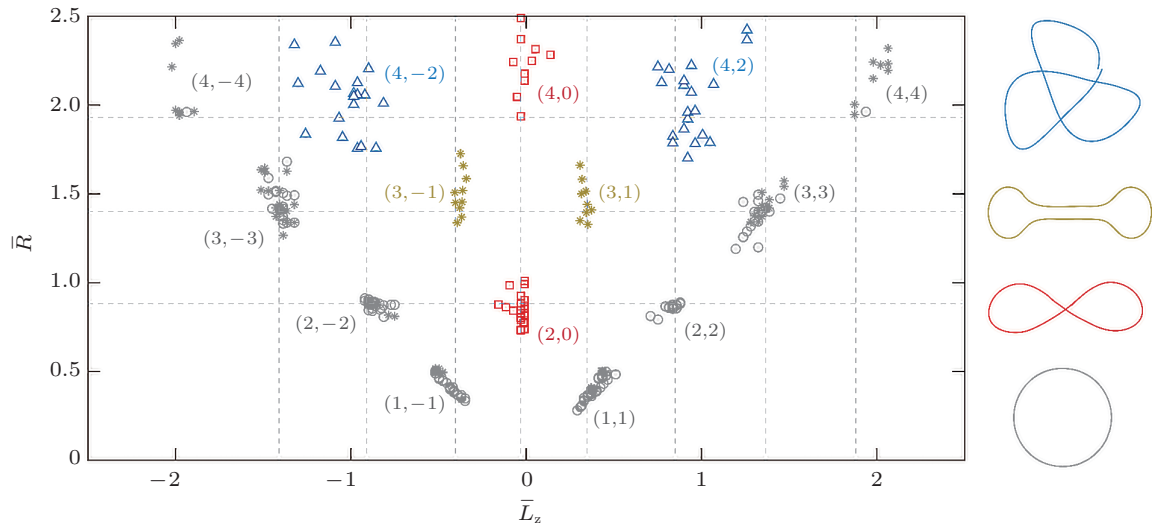


图 7

中心力场中行走液滴的双重量子化。得到的轨道包括圆形、双纽形和三叶草形。轨道依据平均半径 $\bar{R} = \sqrt{\langle R^2 \rangle} / \lambda_F$ 和角动量 $\bar{L}_z = \langle L_z \rangle / (m\lambda_F u)$ 进行分类。图片经 Perrard 等 (2014b) 的许可修订

的行走液滴动力学。除了圆形轨道，还出现了更复杂的轨道状态，包括椭圆形、双纽线形和三叶草形，所有这些都可能是固定的或方位进动的。他们用平均半径 \bar{R} 和角动量 \bar{L}_z 描述了由此产生的复杂轨道族 (图 7)。结果表明导航波场对行走液滴施加的动态约束使其轨道状态在平均能量和角动量上具有双重量子化。

Perrard 等 (2014b) 根据能量分布提出了量子轨道态 (或本征态) 的理论基础，尤其是轨道行走液滴产生的波场 (见 M. Labousse, S. Perrard, Y. Couder & E. Fort, 论文已投稿)。当行走液滴未进入到一个纯本征态时，会在相邻的本征态之间振荡，例如椭圆形和双纽线形。因此，就如旋转行走液滴系统中的情况一样 (Harris & Bush 2014a)，高记忆极限下出现了复杂的轨迹：行走液滴在系统的不稳定本征状态之间漂移，导致多模态统计 (Perrard et al. 2014a)。

2.2.6 束缚态和其他反常现象

成对的反弹液滴可以通过波场相互作用形成束缚态 (Protière et al. 2005)。同样的，晶状结构可以由几乎相同的弹跳液滴聚集形成 (图 1(d))。Lieber 等 (2007) 报道了稳定和自发旋转的晶格。Eddi 等 (2009a) 通过一排弹跳液滴实现了 11 个阿基米德平面平铺中的 8 个，并对其稳定性进行了研究 (Eddi et al. 2011a)。对于不同大小的弹跳液滴对，产生波场的不对称性可导致自推进的棘轮状态 (Eddi et al. 2008)。动态束缚态也可能来自行走液滴的相互作用，其形态取决于液滴的大小和弹跳的相位 (Protière et al. 2005)。Protière 等 (2008) 探索了由不同尺寸行走液滴相互作用而产生的反常轨道。相同的液滴对可以分散、锁定在轨道上，或者在漫步模式下并排移动，在此情况下他们之间的距离呈周期性波动 (C. Borghesi, J. Moukhtar, M. Labousse, A. Eddi, Y. Couder & E. Fort, 已投稿文章)。

Gilet 等 (2008) 和 Dorbolo 等 (2008) 研究了相对较大的油滴 ($D \approx 1.5 \text{ mm}$, $\nu < 100 \text{ cS}$) 在高黏

度液槽 ($\nu = 1000 \text{ cS}$) 上的弹跳; 推导了悬浮判据, 并激发了液滴振动的非轴对称模态, 从而通过翻滚导致推进; 还探索了更复杂的流体拓扑结构. Terwagne 等 (2010) 研究了两相液滴的弹跳, 阐明了乳化的标准. Gier 等 (2012) 研究了聚合物液滴的悬浮. Pucci 等 (2011, 2013) 研究了酒精的浮动晶状体在相对黏稠的振动油槽上的动力学. 当晶状体对法拉第波变得不稳定时, 所产生的辐射压力可能会使晶状体变形, 从而导致引人注目的静态和动态形式.

3 理论发展: 暴露变量理论

流体力学导航波系统的魅力在于其可达性: 行走液滴的所有特征 (包括液滴及其导航波场) 都是可见的. 这并不是意味着该系统是可以被简单描述的: 行走液滴系统非常微妙, 其动力学和统计特性强烈依赖于所有的系统参数.

3.1 弹跳力学

大量的研究工作致力于高雷诺数 ($Re = Ua/\nu$) 下毫米液滴对固体的影响, 在小邦德数 $Bo = \rho ga^2/\sigma$ 下, 表面张力与重力相比占主导作用, 因此液滴会保持近似球形, 除非受到冲击产生形变. 对于低韦伯数撞击, $We = \rho U^2 a^3/\sigma \ll 1$, 变形很弱, 跌落行为大致类似于线性弹簧, 其弹簧常数与 σ 成比例 (Okumura et al. 2003). 在撞击过程中, 动能转化为表面能, 然后又转化为动能, 当 $Re \gg 1$ 时转化时只有很小的黏性损失. Moláček 和 Bush (2012) 证明对于行走液滴的参数状态 ($Re \approx 20$, $Bo \approx 0.1$, $We \approx 0.1$), 对刚性基底撞击产生的变形可用准静态形式族来描述, 而碰撞动力学可用对数弹簧来描述.

行走液滴系统是毫米量级的, 在撞击液槽时施加给他们的主要作用力与曲率有关, 而非与静水压力相关. 因此, 冲击的主要物理现象是通过考虑液滴对肥皂膜的影响来获得的; Gilet 和 Bush (2009a, 2009b) 检验了这一构型, 证明肥皂膜像线性弹簧一样作用在液滴上, 其弹簧常数与 σ 成正比. 他们对振动膜上液滴的研究揭示许多复杂的弹跳状态, 并使之合理化. 液槽惯性的影响使得液滴对振动液槽的冲击变得复杂 (Prosperetti & Oguz 1993).

为了描述弹跳液滴对振动液槽的影响, Moláček 和 Bush (2013a, 2013b) 在液滴撞击刚性基底模型的基础上 (Moláček & Bush 2012), 发展了考虑液体形变的复杂度递增的系列模型. 对数弹簧模型再次出现, 他们的模型包含了恢复系数 C_R 和接触时间 T_C 对 We 的测量对数依赖性. 虽然是半经验的, 但得到的模型没有自由参数. 该模型正确预测了弹跳阈值, 以及更高能量弹跳状态之间的阈值 (图 2). 弹跳液滴必须满足共振条件. 简而言之, 对于 (1, 1) 型弹跳, 撞击时间加上飞行时间必须等于法拉第周期. 随着 γ 逐渐增加, 冲击的相位会连续变化, 直到液滴不改变弹跳模态便无法满足共振条件为止. 对于低能量弹跳状态的描述, 假设界面在下次撞击之前恢复为水平状态便足够了. 对于更剧烈的弹跳和行走状态的建模需要考虑波场.

Moláček 和 Bush (2013b) 计算了小液滴参数区域产生的波场形式. 由于在倍周期弹跳状态下液滴降落在波峰处, 可能会失稳而进入行走状态. 对由此产生的水平运动进行建模需要切向恢复系数 C_T 对 We 的依赖性, 这也是经验推导的结果. 所得模型成功解释了观察到的行走阈值 (图 2), 以及行走速度对系统参数的依赖性 (Moláček & Bush 2013b). 他们的研究强调了撞击相位对于行走液滴动力学的微妙作用: 随着激励加速度逐渐增加, 碰撞相位发生变化, 液滴可能从一种行走模

式切换到另一种行走模式.

Terwagne 等 (2013) 针对液滴在液槽上弹跳问题开发了一个相对简单的质量 - 弹簧 - 缓冲器模型. 基于 Moláček 和 Bush (2013a, 2013b) 的模型, Wind-Willassen 等 (2013) 提出了迄今为止最为完整的研究. 报告了新的复杂弹跳模式和行走区域内的不同步态, 并给出了合理的解释 (图 2). 现在我们已经能够很好地表征和理解行走参数范围内振荡液槽上的液滴动力学. 现有的状态图谱为标准化测试新的实验研究提供了宝贵的资源.

3.2 轨迹方程

Protière 等 (2006) 首次提出了行走液滴的理论模型. 该模型抓住了这个问题的基本物理原理, 具体来说, 液滴的推进是通过与以水滴为中心的单频波场共振作用实现的, 而每次撞击都会产生这种共振波场. 该模型再现了液滴行为的几个定性特征, 包括从弹跳到行走的分岔以及行走速度随强迫加速而增加的现象. 然而, 该模型只包含了最近一次撞击的波场. 类似的低记忆近似方法也被用于圆形腔体中行走液滴的模拟 (Shirikoff 2013). Emmanuel Fort 的数值模型中考虑了可变记忆, 使得该模型可获得行走液滴系统的许多特征, 包括单粒子衍射 (Couder & Fort 2006)、量子化轨道 (Fort et al. 2010) 和双量子化轨道 (Perrard et al. 2014a, 2014b). 该模型为阐明记忆在行走液滴系统动力学中的关键作用提供了一个有价值的探索工具; 然而, 他无法捕获到系统对流体参数的详细依赖关系.

Moláček 和 Bush (2013b) 发展了一个与流体力学相容的运动方程, 用来描述位于 $\mathbf{x}_p(t)$ 处质量为 m 的液滴在波场 $h(\mathbf{x}_p, t)$ 下的共振行走. 通过对周期弹跳取时间平均可以消去垂直方向的运动, 从而推导出以下轨迹方程

$$m\ddot{\mathbf{x}}_p + D\dot{\mathbf{x}}_p = -mg\nabla h(\mathbf{x}_p, t) \quad (1)$$

其中, 第二项表示飞行和撞击产生的时间平均的阻力, D 为依赖于系统参数的阻力系数 (Moláček & Bush 2013b). 第三项是倾斜液面对落在其上的液滴产生的波浪力. 由于 $h(\mathbf{x}_p, t)$ 依赖于液滴的历程, 因此波浪力亦是如此. 单次撞击产生的表面波可以近似为第一类单频径向贝塞尔函数 $J_0(k_F r)$ (Eddi et al. 2011b, Moláček & Bush 2013a, Oza et al. 2013), 因此该时间平均模型需要所有先前弹跳产生的界面高度, 即

$$h(\mathbf{x}_p, t) = A \sum_{n=-\infty}^{\lfloor t/T_F \rfloor} J_0(k_F |\mathbf{x} - \mathbf{x}_p(nT_F)|) e^{-(t-nT_F)/(T_F M)} \quad (2)$$

无量纲的记忆参数 $M = T_d/[T_F(1 - \gamma/\gamma_F)]$ 取决于法拉第周期 T_F 、非强迫波的衰减时间 T_d 及其与法拉第阈值的接近程度 γ_F (Eddi et al. 2011b). 波幅值 A 同样依赖于系统参数, 包括撞击相位 (Moláček & Bush 2013b). 当波相对持久时, 在高记忆区 (即当 $\gamma \rightarrow \gamma_F$), 波浪力变得越来越重要.

对于离散求和形式的波场 (方程 (2)), 很难对方程 (1) 所示的轨迹方程进行分析. Oza 等 (2013) 证明, 由于垂直方向的运动相对于水平方向变化更快, 因此可以通过积分来近似求和. 由此得到频闪近似下的无量纲轨迹方程

$$\kappa_0(1 - \Gamma)\ddot{\mathbf{x}}_p + \dot{\mathbf{x}}_p = \frac{2}{(1 - \Gamma)^2} \int_{-\infty}^t \frac{J_1(|\mathbf{x}_p(t) - \mathbf{x}_p(s)|)}{|\mathbf{x}_p(t) - \mathbf{x}_p(s)|} (\mathbf{x}_p(t) - \mathbf{x}_p(s)) e^{-(t-s)} ds \quad (3)$$

该公式包含 2 个无量纲参数. 第 1 个无量纲数 $\Gamma = (\gamma - \gamma_w) / (\gamma_F - \gamma_w)$ 表明力的活力, 即与行走态阈值 ($\Gamma = 0$) 和法拉第阈值 ($\Gamma = 1$) 的相对距离. 第 2 个无量纲数 $\kappa_0 = (m/D)^{3/2} k_F \sqrt{gA/2T_F}$, 包含方程 1 和 2 中所有的流体参数. 动力学的非局部形式是显而易见的: 作用在行走液滴上的波浪力是其过去历程的函数, 具体指沿着他的路径产生的法拉第波场.

方程 (3) 中所示的轨迹方程式描述了当系统在 ω_F 处频闪时, 跳跃液滴被其导航波场连续推动时的动力学行为 (Harris & Bush 2013) (见补充视频 1). 由于忽略了垂直方向运动和撞击相位, 因此相对而言比较容易分析. Oza 等 (2013) 证明, 在达到行走阈值 γ_F 之前平稳的跳跃状态 $\dot{x}_p = 0$ 是稳定的, 超过阈值后出现平稳的行走态解. 模型对行走阈值 γ_w 和行走液滴速度对 γ ($\gamma > \gamma_w$) 的依赖性的理论预测足以描述现有数据. 此频闪模型中唯一的拟合参数是撞击相位, 其合理界限可以从实验中得到 (Moláček & Bush 2013b).

式 (3) 中所示的轨迹方程也可以帮助我们深入理解行走状态的稳定性, 考虑到液滴骑乘在其波场的波峰上, 其鲁棒性并不明显. 线性稳定性分析表明, 行走液滴系统对于共线摄动是稳定的, 但对横向摄动是中性稳定的: 若直线运动受到横向扰动, 液滴将简单地改变路线并朝着新的方向前进 (Oza et al. 2013). 这一结果与行走液滴的活泼性、路径对于扰动的敏感性, 以及液滴在复杂几何 (包含圆形腔和狭缝) 中明显的混沌运动是一致的.

3.3 轨道动力学

Oza 等 (2013) 的频闪模型也可用来评估旋转系统中量子化轨道的稳定性 (Fort et al. 2010, Harris & Bush 2014a). 为了描述此问题, 方程 (3) 所示的轨迹方程引入科氏力进行扩充. 他们寻找具有恒定半径 r_0 和频率 ω_0 的圆形轨道解, 并评估其线性稳定性 (Oza et al. 2014a). 对于 3 个记忆值, 图 5 揭示了轨道半径对旋转速率的预测依赖性. 沿着解曲线所预测的轨道稳定性由其颜色表征. 在低记忆区 (图 5(a)), 所有的圆形轨道都是稳定的, 且轨道半径随 Ω 单调递减. 在中间记忆区 (图 5(b)) 会出现两个不稳定的解分支, 对应于不被允许的半径, 即轨道量子化的起点. 在高记忆区 (图 5(c)), 解曲线具有线性稳定、线性不稳定和线性不稳定振荡三种分支.

轨迹方程的数值模拟揭示了行走液滴在线性不稳定区域中的行为 (Oza et al. 2014b). 图 8 总结了轨道运动对 γ/γ_F 和初始轨道半径 r_0 的依赖关系. 随着 γ/γ_F 的逐渐增加, 稳定的圆形轨道通常被具有静止和平移的轨道中心的摆动轨道所取代. 在高记忆极限下, 除了最小的轨道外, 所有的轨道都变得不稳定, 从而产生混沌轨道. 虽然轨迹是不规则的, 但他们显示出相干统计特性. 在 Harris 和 Bush (2014a) 的实验中 (图 6), 行走液滴有沿曲率半径对应于不稳定轨道态的圆弧运动的趋势; 因此, 曲率半径的直方图在这些半径处显示出峰值, 其数量和相对大小取决于系统记忆. 由于不稳定轨道状态的持续动力学影响, 出现了相干多模态统计量. 这些最新研究阐明了轨道导航波动力学中两个关键的类量子行为的起源: 量子化和多模态统计 (Fort et al. 2010; Harris & Bush 2014a; Oza et al. 2014a, 2014b; Perrard et al. 2014a, 2014b; M. Labousse, S. Perrard, Y. Couder & E. Fort, 已投稿).

Oza 等 (2014a) 的分析揭示了旋转系统的另一个有趣的特征 —— 流体动力自旋态的可能性. 随着记忆的增加, 解曲线与 $\Omega = 0$ 轴相交 (图 5(c)), 表明即使在没有旋转的情况下也存在轨道解. 行进液滴产生的波浪力足以平衡径向惯性力并借此维持圆周运动, 这一物理图像令人回想起经典

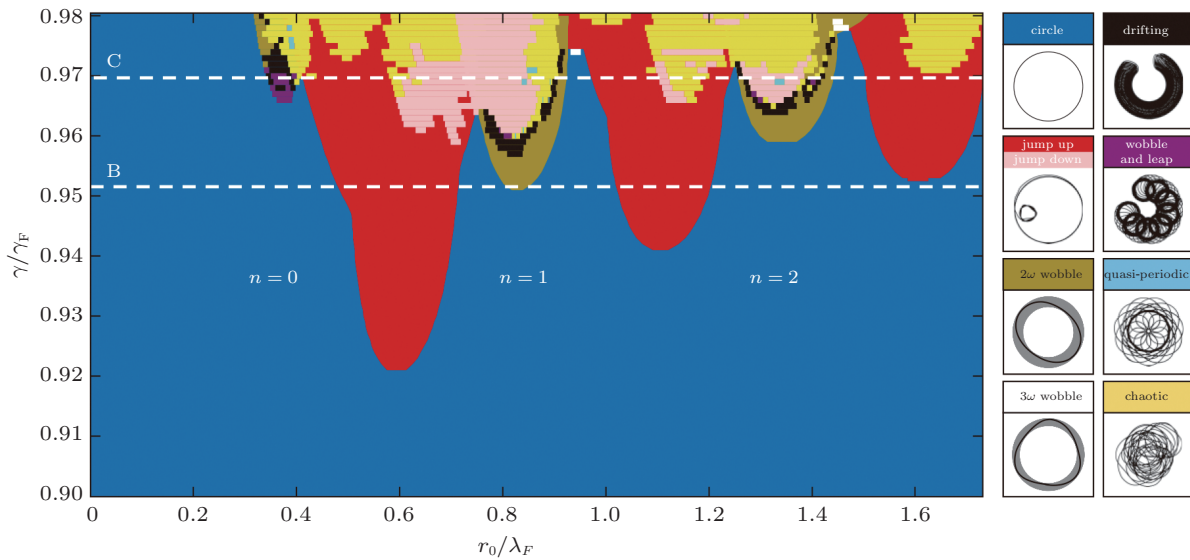


图 8

旋转系统中液滴运动轨迹的数值模拟结果表明, 其形式与振动力 γ/γ_F 和初始轨道半径 r_0 有关. 蓝色区域表示稳定轨道区域, 其边界由 Oza 等 (2014a) 的线性稳定性分析所确定. 横线 B 和 C 对应于图 5(b)和图 5(c)所示的解曲线. 轨迹根据图标进行颜色编码. 注意混沌区域内的周期窗口. 图经 Oza 等 (2014b) 许可修订, 版权所有 2014, AIP Publishing LLC

的电子模型 (Schrödinger 1930, Burinskii 2008). 在施加旋转时, 如 Eddi 等 (2012) 的双液滴轨道, 出现了流体力学的塞曼分裂比拟. 虽然这种流体动力自旋态在实验探索的参数范围内是不稳定的, 但他们在 (κ_0, Γ) 参数空间的其他区域中是稳定的, 这些区域可以在更一般的导航波理论框架中获得 (方程 (3)).

Harris 和 Bush (2014a) 得出的一个重要结论是, 统计数据对所有流体参数都非常敏感, 当 γ/γ_F 仅变化 1% 时, 其形式也会发生剧烈变化 (图 6(d)). 尽管对单粒子衍射 (Couder & Fort 2006) 和圆形腔实验 (Harris et al. 2013) 的研究表明, 在高记忆极限中出现了一种独特的类薛定谔波函数 (图 3 和图 4), 但这项相对系统的研究对我们有其他启示. 更准确地说, 对于衍射和圆形腔实验进行系统的重新检查将揭示强烈依赖于系统参数的多模态统计, 是可以预期的.

3.4 未来的发展方向

频闪模型 (Oza et al. 2013) 成功地描述了单个行走液滴在无界域中的运动. 该模型通过 Harris 和 Bush (2014a) 的基准实验测试, 目前被用于描述中心力场 (包括调和势和库仑势) 中行走液滴的运动. 一个突出的问题是, 为什么双量子化在调和势中明显存在 (Perrard et al. 2014a, 2014b; M. Labousse, S. Perrard, Y. Couder & E. Fort 在投文章), 而在旋转系统中却不明显 (Harris & Bush 2014a; Oza et al. 2014a, 2014b). 频闪模型的主要缺点是, 波场 (方程 (2)) 未包含撞击过程中触发的瞬态波 (Eddi et al. 2011b), 因此无法可靠地获得行走液滴与障碍物之间的相互作用 (Eddi et al. 2009b, Harris et al. 2013, Carmigniani et al. 2014) 及不同行走液滴间相互作用 (Protière et al. 2005, 2008; C. Borghesi, J. Moukhtar, M. Labousse, A. Eddi, Y. Couder & E. Fort 在投论文). 新一代的导航

波模型正试图解决这一缺陷 (P. Milewski, C. Galeano-Rios, A. Nachbin & J. W. M. Bush 在投论文).

理论的发展为导航波动力学的研究提供了一个更为一般的框架. 在频闪模型 (方程 (3)) 中仅有两个无量纲参数. 我们已经看到某些类似量子的特征 (如自旋态), 在这个流体动力导航波系统的参数范围内是不稳定的, 但在其他情况下则是稳定的. 于是产生了一个问题: 当 (κ, Γ) 为何值时, 这个广义的导航波系统表现出最类似于量子力学的行为?

Fort 和 Couder (2013) 从这种流体力学导航波系统出发迈出了有趣的一步, 他们引入了惯性行走液滴的概念. 真实的行走液滴在其路径上产生了一个波场, 而惯性行走液滴的波场以液滴发射时的速度继续前行. 对一族离散轨道, 会激发非辐射共振波模态; 当这些轨道为圆形时, 他们满足玻尔-索姆菲尔德量子化条件.

除此之外, 如果在不知道强迫振动、弹跳或波场的情况下从上方观察系统, 如何描述行走液滴的运动也是一个有趣的问题. Labousse 和 Perrard (2014) 强调了行走液滴的非哈密顿特性, 并用瑞利振子描述了液滴在低记忆区的运动. 对于某一类运动, Bush 等 (2014) 证明了推进波场和耗散效应的首阶项相互抵消, 液滴的运动可以用质量依赖速度的无粘动力学来描述. 因此, 他们根据系统参数计算了行走液滴的流体动力放大因子 γ_B : 行走液滴的有效惯性质量为 $\gamma_B m$. 这一观点合理解释了图 5(a) 中异常大的轨道半径, 即行走液滴所诱导的波引起附加质量. 该理论在更一般的场景下的价值目前正在探索当中.

4 与量子力学的关系

量子力学的现实主义解释认为, 标准量子理论提供的统计描述背后存在真实的动力学; 因此, 微观粒子与经典粒子一样遵循轨迹 (Bohr 1935, Einstein et al. 1935). von Neumann (1932) 发表的证明错误地否定了这种动力学的可能性, 使这种观点遭受了早期的挫折. 三十年后 Bell (1966) 推翻了 von Neumann 及随后的不可能性证明. 在这件事上, 我倾向于给贝尔 (1987) 一个最后的结论, 以探讨建立在完善的统计理论基础上的真实量子动力学的可能性. 因此我们自然会问, 这个流体力学系统与现有的量子力学的现实主义模型是否存在某种关联?

4.1 Madelung 变换

Madelung (1926) 变换允许线性薛定谔方程 (LSE) 以流体力学形式重构. 在存在势函数 $V(\mathbf{x})$ 的情况下, 我们考虑限制在平面上质量为 m 的粒子的标准量子力学描述. 以极形式表示概率函数, $\Psi(\mathbf{x}, t) = R(\mathbf{x}, t) e^{-iS(\mathbf{x}, t)/\hbar}$, 然后代入 LSE 方程得到

$$\frac{D\rho_q}{Dt} + \rho_q \nabla \cdot \mathbf{v}_q = 0 \quad (4a)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} m \mathbf{v}_q^2 + Q + V = 0 \quad (4b)$$

其中 $\mathbf{v}_q(\mathbf{x}, t) = \nabla S(\mathbf{x}, t)$ 是概率的量子速度, $S(\mathbf{x}, t)$ 是作用量, $\rho_q(\mathbf{x}, t) = R^2$ 是概率密度, 以及 $Q(\mathbf{x}, t) = -(\hbar^2/2m)\nabla^2 R/R$ 是量子势. 式 (4a) 表示概率守恒, 而式 (4b) 对应于量子 Hamilton-Jacobi 方程. 取后者的梯度得到 \mathbf{v}_q 的演化方程

$$Q(\mathbf{x}, t) = -(\hbar^2/2m)\nabla^2 R/R \quad (5)$$

从流体力学的角度来看, Madelung 公式 (方程 (4)) 有两个吸引人的点 (Spiegel 1980). 首先, 普朗克常数仅出现一次, 即作为量子势的系数. 第二, 如果将 ρ_q 与流体的深度联系起来, 将 v_q 与沿深度平均的流体速度相关联, 这个方程组就相当于描述无粘浅水流动的系统. 当 Q 关于一致 ρ_q 的状态线性化时, 他呈现为浅水动力学中的曲率压力形式 (Bühler 2010). 由此可以看出量子统计中的 \hbar 与浅水动力学中的表面张力 σ 之间的关系.

Madelung 变换简单地表明, 我们可以用流体动力学进行量子统计建模. 例如, 对量子围栏实验的统计 (Crommie et al. 1993a, 1993b) 原则上可以用法拉第波系统进行建模 (参见补充视频 1) (Harris et al. 2013, Harris & Bush 2013). 具体来说, 假设圆腔可以调谐到适合单一模态, 给定粒子能量 $E = \hbar\omega$, 可以从量子色散关系 $\omega = \hbar k^2/2m$ 推断出德布罗意 (de Broglie) 波长 $\lambda_{dB} = 2\pi/k$, 从中可以预测概率分布. 同样地, 给定驱动频率, 我们可以从水波的色散关系知道法拉第波长 (例如, 对于深水毛细波, $\omega_F = \sqrt{\sigma/\rho}k_F^{3/2}$), 在此基础上可以推断出圆腔的法拉第波模态 (图 4(b)). 然而, 围栏实验 (Harris et al. 2013) 表明我们还可以预测行走液滴的流体动力学统计信息; 具体而言, 圆形空腔中行走液滴的直方图由空腔的法拉第波模态所规定. 因此, 在某些参数区域内, 行走液滴和量子粒子显示出相似的统计行为, 其中流体性质 (σ, ρ) 代替 (\hbar, m). 那么, 我们该如何理解行走液滴的运动与量子动力学之间的关系呢?

4.2 导航波理论

第一个导航波理论是由 de Broglie (1923) 提出的, 他设想微观粒子由伴随的波场引导, 被推动着沿垂直于恒定相位表面的方向前进 (de Broglie 1926, 1930; Bacchiagaluppi & Valentini 2009). 他最初的构想, 即双解理论 (de Broglie 1956), 涉及到两个波, 一个是以粒子为中心的真实导航波, 另一个则是由标准量子理论预测的统计波. 他断言量子力学本质上是相对论的, 并提出导航波来源于康普顿频率 $\omega = mc^2/\hbar$ 下的内部粒子振荡, 在该频率下静止质量能与波能交换. 他认为导航波场是按照 Klein-Gordon 方程演化的, 由粒子参考系中的单频波组成. 而德布罗意关系式 $p = \hbar k$ 则将粒子动量与德布罗意波长 $\lambda_{dB} = 2\pi/k$ 联系起来. 最后, 他强调了相位协调的重要性, 即粒子内部的振动 (被视为时钟的振动) 与其导航波保持相同的相位 (de Broglie 1930, 1987). 因此, 根据他的构想, 波和粒子始终保持共振状态.

玻姆 (Bohm 1952a, 1952b) 提出了单波导航波理论, 根据该理论, 导波精确地等价于薛定谔方程的解, 而粒子速度与概率 v_q 的量子速度相同. 假设给一个与 LSE 的解相一致的初值条件的集合, 那么玻姆力学的预测与标准量子力学的预测是相同的 (Keller 1953). 这一结果是对当时占据主导地位 von Neumann (1932) 和其他人的不可能性证明提供了一个非常重要的反例. 此后, 玻姆力学得到了实质性的发展 (Holland 1993, Towler 2009, Durr et al. 2012), 并且随着时间的推移, 他与德布罗意的理论相融合, 形成了现在通常所说的德布罗意 - 玻姆理论. 行走液滴系统表明了理清这两个导航波理论的潜在价值.

相比于玻姆力学, 行走液滴系统更接近于德布罗意的双解理论. 在双解理论中, 就像在这个流体力学系统中一样, 统计波必须由真实的导航波来增强, 标准波粒二象性必须扩展到“波 - 粒子 - 导航波”三位一体. 这种区别在圆腔几何中尤为明显. 根据玻姆力学, 导航波就是统计波. 相反地, 在行走液滴系统中, 液滴是由腔内的瞬时波场所引导的, 其形式相对复杂 (Harris et al. 2013).

尽管真实波和统计波都以法拉第波长为特征波长,但前者有效地集中于粒子上,而后者则由腔体几何决定(图 4(b)).在衍射实验中,行走液滴系统与玻姆力学的区别也很明显(Couder & Fort 2006).在量子单粒子衍射中,由对称统计波引导的玻姆轨迹必然是对称的:没有粒子穿过中心线(Philippidis et al. 1979).相反地,行走液滴系统是由其进入缝隙时产生的复杂导航波引导的.他的轨迹复杂、混沌,而且绝对不对称:液滴经常穿过中心线.尽管在统计基础上可以为行走液滴得到玻姆轨迹的比拟,但他们只代表真实混沌轨迹的整体平均.

表 1 比较了德布罗意 (de Broglie) 双解理论和行走液滴系统.两个系统都具有三个时间尺度:与高频振荡相关的短时间尺度、与导航波动力学相关的中等时间尺度、相干统计出现的长时间尺度(Harris & Bush 2013)(见补充视频 1).这两个系统的特点是均存在单一的长度尺度同时出现在动力学与统计中.行走液滴的衍射和围栏实验提供了第一个证据,证明以粒子为中心的导航波动力学可以产生具有相同波长的统计波,但其形式由边界几何所规定.

表 1 行走液滴系统与德布罗意双解导航波理论的比较 (de Broglie 1956, 1987), 及其在随机电动力学 (SED) 上的推广 (Kracklauer 1992, de la Penã & Cetto 1996, Haisch & Rueda 2000)

	Walkers	德布罗意 (de Broglie)	SED pilot wave
Pilot wave	Faraday capillary	Unspecified	Electromagnetic (EM)
Driving	Bath vibration	Internal clock	Vacuum fluctuations
Spectrum	Monochromatic	Monochromatic	Broad
Trigger	Bouncing	Zitterbewegung	Zitterbewegung
Trigger frequency	ω_F	$\omega_c = mc^2/b$	$\omega_c = mc^2/b$
Energetics	GPE \leftrightarrow wave	$mc^2 \leftrightarrow b\omega$	$mc^2 \leftrightarrow$ EM
Resonance	Droplet—wave	Harmony of phases	Unspecified
Dispersion $\omega(k)$	$\omega_F^2 \approx \sigma k^3/\rho$	$\omega^2 = \omega_c^2 + c^2 k^2$	$\omega = ck$
Carrier λ	λ_F	λ_{dB}	λ_c
Statistical λ	λ_F	λ_{dB}	λ_{dB}

在行走液滴系统中,液滴的势能与毛细法拉第波场在 ω_F 处进行能量交换. Zitterbewegung 代表康普顿频率 ω_c 下的粒子振荡.

德布罗意 (de Broglie 1956) 对于导航波既没有说明物理起源,也没有说明几何形式.他提出导航波与远场的统计波是线性相关的,但在粒子附近是非线性的(以一种不确定的方式)(de Broglie 1987).当他将粒子看作场的源头时,就在该粒子位置处引入了一个奇点.德布罗意的概念中缺乏行走液滴系统的 3 个关键特征.首先液滴会与已有的场(界面)相互作用,因此不需要奇点.其次,他的单频导航波场是由参数强迫产生的.最后,真实波与统计波之间的联系是通过混沌导航波动力学建立的.

4.3 随机电动力学

玻姆力学 (Bohm 1952a, 1952b) 在创立不久便被推广至将随机亚量子领域的影响考虑在内

(Bohm & Vigier 1954). 根据此物理图像, 随机粒子运动构成了概率量子速度 v_q 的基础 (即 Madelung 流), 就像布朗运动是流体流动中流线的基础一样. 德布罗意 (de Broglie) (1964) 在晚年也推崇这一观点, 促进了与此相关的大量研究 (Goldstein 1987, Chebotarev 2000). 其中特别令人感兴趣的是 Nelson (1966) 的结果, 他通过考虑一个随机经典系统 (即扩散系数为 $\hbar/(2m)$ 的质量 m 的布朗运动) 导出了 LSE. Nelson (2012) 最近在综述中回顾了量子力学随机解释的成功与失败.

随机电动力学 (SED) 假设一个零点场 (ZPF), 电磁真空涨落的能谱形式为: $U(\omega) = \hbar\omega/2$ (Boyer 2011). 需要强调的是, 这些波动代表了将普朗克常数 \hbar 引入到经典理论的自然方法. 随机电动力学理论为卡西米尔 (Casimir) 效应、氢原子的稳定基态 (Cole & Zhou 2003) 和黑体辐射光谱 (Boyer 2010) 提供了理论依据. Surdin (1974) 提出零点场作为亚量子域中随机性的来源. 由此产生的物理图像正在推进: Grossing 等 (2012a, 2012b) 从跳跃液滴中获得灵感, 将微观粒子也视为弹跳物.

De la Pena 和 Cetto (1996) 提出真空波动可能会产生量子粒子的颤动 (Schrodinger 1930, Hestenes 1990), 尤其是以康普顿频率 $\omega_c = mc^2/\hbar$ 振荡. 他们进一步提出, 当粒子平移时, 这种振荡运动会与周围真空场中的波选择性地发生相互作用, 这种共振相互作用会放大电磁导航波. 根据此物理图像, 载波的康普顿波长为 $\lambda_c = 2\pi\hbar/mc$, 而德布罗意 (de Broglie) 波长则规定了其调制 (Kracklauer 1992, 1999). Haisch & Rueda (2000) 进一步探索了将粒子视为在 ω_c 处共振的 ZPF 驱动振荡电荷这一概念, 他们认为此概念可以帮助我们理解惯性质量的起源, 从而将零点场与物质的量子波性质和相对论力学联系起来 (Haisch et al. 2001, Rueda & Haisch 2005). 由此得到的物理图像与行走液滴系统之间的相似之处令人着迷: 真空波动将起到如振动液槽为系统提供动力的作用, 而粒子的颤振运动与触发导航波的液滴弹跳相同. 基于随机电动力学的物理图像也包含在表 1 中.

5 结论

Yves Couder, Emmanuel Fort 及其同事发现的流体动力导航波系统是一个引人入胜的新型动力系统. 在这个系统中, 液滴通过与自身波场的共振作用而实现自我推进. 这是德布罗意在其双解理论中所设想的导航波系统的首个宏观实现, 并且扩展了经典系统可描述行为的范围. 他表现出来的特点让人联想到量子单粒子衍射、隧穿效应、单量子化和双量子化轨道、轨道能级分裂、自旋和多模态统计, 所有这些都可用导航波动力学来解释. 基于侵入性测量或受损观测的故意曲解可能导致不确定性关系和流体动力推动因子的推断. 同样地, 可以推断出排他性原理; 例如, 某些包含多个行走液滴的轨道状态是不被允许的, 因为液滴必须共享同一个波场.

哪些特征对于类量子行为至关重要? 量子化源于单频导航波场对行走液滴施加的动态约束. 例如, 量子化轨道可以通过行走液滴与其自身尾迹之间的相互作用来理解: 量子化仅当波场的持续时间大于轨道周期时才会出现. 波场的色散关系并不重要. 重要的是波是单频的, 因此法拉第力和跳跃液滴与其导航波之间的共振至关重要. 对轨道运动的研究表明, 多模态统计是混沌导航波动力学的本质特征: 不稳定的本征态作为吸引子, 在统计量上留下印记. 这一观点的普遍有效性需要通过进一步检验圆形腔体中的行走液滴 (T. Gilet, 已投稿论文)、单粒子衍射和全新的几何构形来探索. 描述这种新的导波系统向混沌的转变对动力系统界提出了一个令人兴奋的挑战. 随机强迫对这种混沌导航波动力学的影响也是相当有趣的. 这种强迫可能在实验室中通过气流的影响或当液滴处于混沌行走状态时自然产生, 也可能通过强迫振动中的噪声以受控的方式施加.

流体力学系统作为一种量子力学比拟有许多局限性;然而有些限制是可以规避的. 虽然实验只能捕捉到二维的导航波动力学,但随之而来的理论发展可以推广到三维. 行走液滴导航波的波长由振动频率决定而与行走速度无关;相反,在量子力学中德布罗意关系 $p = \hbar k$ 决定了与速度相关的德布罗意 (de Broglie) 波长. 这种依赖性可以纳入现有的导航波模型中. 最后,我们已经看到,侵入性测量作为量子力学的一个决定性特征,可以被人为地加入行走液滴系统中. 然而,关于侵入性测量和混沌导航波动力学结合时是否会产生量子纠缠的流体力学比拟,仍是一个悬而未决的问题.

Bell (1987) 赞成德布罗意 - 玻姆导航波理论,理由是他为机械论地理解量子动力学提供了一个概念框架,而纯粹的统计理论不可能提供这种框架. 不管他的缺点和局限性是什么,行走液滴所建议的新物理图像,即相对复杂的混沌导航波动力学,也有着令人着迷的特点. 这一理论的雏形最早可以追溯到德布罗意和爱因斯坦的一系列文献中,他们都试图通过考虑物质的波动本质来调和量子力学和相对论 (Bohm & Hiley 1982, Chebotarev 2000). 这个物理图像、量子混沌 (Gutzwiller 1990) 和量子场论 (Weinberg 1995) 之间的关系留给感兴趣的读者.

为了避免量子悖论的长期存在被误认为是不可克服的,需要介绍一个流体力学的故事. 1749年,达朗贝尔悖论指出物体在无黏流体中运动时不会受到阻力,这一预测显然与高雷诺数气体流动的实验不符. 结果导致了实验主义者和理论家之间长期存在分歧 — 在 19 世纪的大部分时间里,前者关注无法解释的现象,而后者研究无法观察到的现象 (Lighthill 1956). 达朗贝尔悖论存在了 150 多年,直到普朗特的工作 (Anderson 2005) 能够在隐藏的黏性边界层尺度上解决动力学问题.

最后,关于我对量子力学诠释的看法,我依然是坚定的不可知论者;然而,如果一定要选择的话,我倾向于支持多世界诠释 (Everett 1957) 的逻辑拓展 — 无限多的多世界诠释,因为其所具备的包容性. 在这样的诠释里,过往的每一种量子力学诠释都能在无限多元宇宙的某些版本中实现,其中甚至存在一个仅包含一个世界的版本,在这个世界里量子统计是基于混沌导航波动力学的,在大小世界之间不存在哲学上的割裂.

声明 作者未意识到可能会影响本综述客观性的任何偏见.

致谢 非常感谢国家自然科学基金项目 CBET-0966452 和 CMMI-1333242、麻省理工学院 - 法国项目、麻省理工学院 - 巴西项目以及 CNPq - 科学无国界项目的经费支持. 与 Yves Couder, Emmanuel Fort 和 Ruben Rosales 的交谈使我受益匪浅. 我还要感谢 Dan Harris, Jan Moláček, Anand Oza 和 Leo Zhou 对本文的宝贵意见和帮助.

参 考 文 献

- Anderson J D. 2005. Ludwig Prandtl's boundary layer. *Phys. Today*, **58**: 45-48.
- Bacchiagaluppi G, Valentini A. 2009. Quantum Theory at the Crossroads: Reconsidering the 1927 Solvay Conference. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press.
- Bach R, Pope D, Liou S, Batelaan H. 2013. Controlled double-slit electron diffraction. *New J. Phys.*, **15**: 033018.
- Bechhoeffer J, Ego V, Manneville S, Johnson B. 1995. An experimental study of the onset of parametrically pumped surface waves in viscous fluids. *J. Fluid Mech.*, **288**: 325-350.

- Bell J S. 1966. On the problem of hidden variables in quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, **38**: 447-452.
- Bell J S. 1982. On the impossible pilot wave. *Found. Phys.*, **12**: 989-999.
- Bell J S. 1987. *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press.
- Benjamin T B, Ursell F. 1954. The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **225**: 505-515.
- Berry M V, Chambers R G, Large M D, Upstill C, Walmsley J C. 1980. Wave front dislocations in the Aharonov-Bohm effect and its water wave analogue. *Eur. J. Phys.*, **1**: 154-162.
- Bohm D. 1952a. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of hidden variables, I. *Phys. Rev.*, **85**: 166-179.
- Bohm D. 1952b. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of hidden variables. II. *Phys. Rev.*, **85**: 180-193.
- Bohm D, Vigier J P. 1954. Model of the causal interpretation of quantum theory in terms of a fluid with irregular fluctuations. *Phys. Rev.*, **96**: 208-216.
- Bohm D, Hiley B J. 1982. The de Broglie pilot wave theory and the further development of new insights arising out of it. *Found. Phys.*, **12**: 1001-1016.
- Bohr N. 1935. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, **48**: 696-702.
- Boyer T H. 2010. Derivation of the Planck spectrum for relativistic classical scalar radiation from thermal equilibrium in an accelerating frame. *Phys. Rev. D*, **81**: 105024.
- Boyer T H. 2011. Any classical description of nature requires classical electromagnetic zero-point radiation. *Am. J. Phys.*, **79**: 1163-1167.
- Buhler O. 2010. Wave-vortex interactions in fluids and superfluids. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **42**: 205-228.
- Burinskii A. 2008. The Dirac-Kerr-Newman electron. *Gravit. Cosmol.*, **14**: 109-122.
- Bush J W M. 2010. Quantum mechanics writ large. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **107**: 17455-17456.
- Bush J W M, Oza A, Moláček J. 2014. The wave-induced addedmass of walking droplets. *J. Fluid Mech.*, **755**: R7. doi: 10.1017/jfm.2014.459.
- Carmigniani R, Lapointe S, Symon S, McKeon B J. 2014. Influence of a local change of depth on the behavior of walking oil drops. *Exp. Thermal Fluid Sci.*, **54**: 237-246.
- Chebotarev L. 2000. Introduction: The de Broglie-Bohm-Vigier approach in quantum mechanics//Jean-Pierre Vigier and the Stochastic Interpretation of Quantum Mechanics. Jeffers S, Lehnert B, Abramson N, Chebotarev L, eds. pp. 118. Montreal: Apeiron.
- Cole D C, Zhou Y. 2003. Quantum mechanical ground state of hydrogen obtained from classical electrodynamics. *Phys. Lett. A*, **317**: 1420.
- Coste C, Lund F, Umeki M. 1999. Scattering of dislocated wave fronts by vertical vorticity and the Aharonov-Bohm effect. I. Shallow water. *Phys. Rev. E*, **60**: 4908-4916.
- Couder Y, Fort E. 2006. Single particle diffraction and interference at a macroscopic scale. *Phys. Rev. Lett.*, **97**: 154101.
- Couder Y, Fort E. 2012. Probabilities and trajectories in a classical wave-particle duality. *J. Phys. Conf. Ser.*, **361**: 012001.
- Couder Y, Fort E, Gautier C H, Boudaoud A. 2005a. From bouncing to floating: Noncoalescence of drops on a fluid bath. *Phys. Rev. Lett.*, **94**: 177801.
- Couder Y, Protière S, Fort E, Boudaoud A. 2005b. Walking and orbiting droplets. *Nature*, **437**: 208.
- Crommie M F, Lutz C P, Eigler D M. 1993a. Confinement of electrons to quantum corrals on a metal surface. *Science*, **262**: 218-220.
- Crommie M F, Lutz C P, Eigler D M. 1993b. Imaging standing waves in a two-dimensional electron gas. *Nature*, **363**: 524-527.
- Davisson C, Germer L H. 1927. The scattering of electrons by a single crystal of nickel. *Nature*, **119**: 558-560.

- de Broglie L. 1923. Ondes et quanta. *C. R.* **177**: 507-510.
- de Broglie L. 1926. Ondes et mouvements. Paris: Gautier-Villars.
- de Broglie L. 1930. An Introduction to the Study of Wave Mechanics. London: Methuen & Co.
- de Broglie L. 1956. Une interprétation causale et nonlinéaire de la Mécanique ondulatoire: la théorie de la double solution. Paris: Gautier-Villars.
- de Broglie L. 1964. La thermodynamique cachée des particules. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **1**: 1-19.
- de Broglie L. 1987. Interpretation of quantum mechanics by the double solution theory. *Ann. Fond. Louis Broglie*, **12**: 1-23.
- de Gennes P G, Brochard-Wyart F, Quéré D. 2002. Gouttes, bulles, perles et ondes. Paris: Belin.
- de la Pena L, Cetto A M. 1996. The Quantum Dice: An Introduction to Stochastic Electrodynamics. Dordrecht: Kluwer Acad.
- Denardo B C, Puda J J, Larraza A. 2009. A water wave analog of the Casimir effect. *Am. J. Phys.*, **77**: 1095-1101.
- Donnelly R J. 1993. Quantized vortices and turbulence in helium II. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **25**: 327-371.
- Dorbolo S, Terwagne D, Vandewalle N, Gilet T. 2008. Resonant and rolling droplets. *New J. Phys.*, **10**: 113021.
- Douady S. 1990. Experimental study of the Faraday instability. *J. Fluid Mech.*, **221**: 383-409.
- Durr D, Goldstein S, Zanghi N. 2012. Quantum Physics Without Quantum Philosophy. New York: Springer.
- Eddi A, Boudaoud A, Couder Y. 2011a. Oscillating instability in bouncing drop crystals. *Europhys. Lett.*, **94**: 20004.
- Eddi A, Decelle A, Fort E, Couder Y. 2009a. Archimedean lattices in the bound states of wave interacting particles. *Europhys. Lett.*, **87**: 56002.
- Eddi A, Fort E, Moisy F, Couder Y. 2009b. Unpredictable tunneling of a classical wave-particle association. *Phys. Rev. Lett.*, **102**: 240401.
- Eddi A, Moukhtar J, Perrard J, Fort E, Couder Y. 2012. Level splitting at a macroscopic scale. *Phys. Rev. Lett.*, **108**: 264503.
- Eddi A, Sultan E, Moukhtar J, Fort E, Rossi M, Couder Y. 2011b. Information stored in Faraday waves: The origin of path memory. *J. Fluid Mech.*, **674**: 433-463.
- Eddi A, Terwagne D, Fort E, Couder Y. 2008. Wave propelled ratchets and drifting rafts. *Europhys. Lett.*, **82**: 44001.
- Edwards W S, Fauve S. 1994. Patterns and quasi-patterns in the Faraday experiment. *J. Fluid Mech.*, **278**: 123-148.
- Einstein A, Podolsky B, Rosen N. 1935. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, **47**: 777-780.
- Everett H. 1957. Relative state formulation of quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, **29**: 454-462.
- Faraday M. 1831. On the forms and states of fluids on vibrating elastic surfaces. *Philos. Trans. R. Soc. Lond.*, **121**: 319-340.
- Feynman R P, Leighton R B, Sands M. 1964. The Feynman Lectures on Physics. New York: Addison-Wesley.
- Fiete G A, Heller E J. 2003. Theory of quantum corrals and quantum mirages. *Rev. Mod. Phys.*, **75**: 933-948.
- Fort E, Couder Y. 2013. Trajectory eigenmodes of an orbiting wave source. *Europhys. Lett.*, **102**: 16005.
- Fort E, Eddi A, Boudaoud A, Moukhtar J, Couder Y. 2010. Path-memory induced quantization of classical orbits. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **107**: 17515-17520.
- Gamow G. 1928. The theory of nuclear disintegration. *Nature*, **122**: 805-807.
- Gier S, Dorbolo S, Terwagne D, Vandewalle N, Wagner C. 2012. Bouncing of polymeric droplets on liquid interfaces. *Phys. Rev. E*, **86**: 066314.
- Gilet T, Bush J W M. 2009a. Chaotic bouncing of a drop on a soap film. *Phys. Rev. Lett.*, **102**: 014501.
- Gilet T, Bush J W M. 2009b. The fluid trampoline: Droplets bouncing on a soap film. *J. Fluid Mech.*, **625**: 167-203.
- Gilet T, Bush J W M. 2012. Droplets bouncing on a wet, inclined surface. *Phys. Fluids*, **24**: 122103.

- Gilet T, Terwagne D, Vandewalle N, Dorbolo S. 2008. Dynamics of a bouncing droplet onto a vertically vibrated interface. *Phys. Rev. Lett.*, **100**: 167802.
- Gilet T, Vandewalle N, Dorbolo S. 2007. Controlling the partial coalescence of a droplet on a vertically vibrated bath. *Phys. Rev. E*, **76**: 035302.
- Goldman D I. 2002. Pattern formation and fluidization in vibrated granular layers, and grain dynamics and jamming in a water fluidized bed. [PhD Thesis]. Univ. Tex., Austin.
- Goldstein S. 1987. Stochastic mechanics and quantum theory. *J. Stat. Phys.*, **47**: 645-667.
- Grossing G, Fussy S, Mesa Pascasio J, Schwabl H. 2012a. An explanation of interference effects in the double slit experiment: Classical trajectories plus ballistic diffusion caused by zero-point fluctuations. *Ann. Phys.*, **327**: 421-427.
- Grossing G, Fussy S, Mesa Pascasio J, Schwabl H. 2012b. The quantum as an emergent system. *J. Phys. Conf. Ser.*, **361**: 021008.
- Gutzwiller M C. 1990. Chaos in Classical and Quantum Mechanics. Berlin: Springer-Verlag.
- Haisch B, Rueda A. 2000. On the relation between a zero-point-field-induced inertial effect and the Einstein de Broglie formula. *Phys. Rev. A*, **268**: 224-227.
- Haisch B, Rueda A, Dobyns Y. 2001. Inertial mass and the quantum vacuum fields. *Ann. Phys.*, **10**: 393-414.
- Harris D M, Bush J W M. 2013. The pilot-wave dynamics of walking droplets. *Phys. Fluids*, **25**: 091112.
- Harris D M, Bush J W M. 2014a. Droplets walking in a rotating frame: from quantized orbits to multimodal statistics. *J. Fluid Mech.*, **739**: 444-464.
- Harris D M, Bush J W M. 2014b. Generating uniaxial vibration with an electrodynamic shaker and external air bearing. *J. Sound Vib.*, in press.
- Harris D M, Moukhtar J, Fort E, Couder Y, Bush J W M. 2013. Wavelike statistics from pilot-wave dynamics in a circular corral. *Phys. Rev. E*, **88**: 011001.
- Hestenes D. 1990. The zitterbewegung interpretation of quantum mechanics. *Found. Phys.*, **20**: 1213-1232.
- Holland P R. 1993. The Quantum Theory of Motion: An Account of the De Broglie-Bohm Causal Interpretation of Quantum Mechanics. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press.
- Jayaratne O W, Mason B J. 1964. The coalescence and bouncing of water drops at an air-water interface. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **280**: 545-565.
- Keller J. 1953. Bohm's interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. *Phys. Rev.*, **89**: 1040-1041.
- Kracklauer A F. 1992. An intuitive paradigm for quantum mechanics. *Phys. Essays*, **5**: 226-234.
- Kracklauer A F. 1999. Pilot wave steering: A mechanism and test. *Found. Phys. Lett.*, **12**: 441-453.
- Kumar K. 1996. Parametric instability of the interface between two fluids. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **452**: 1113-1126.
- Kumar K, Tuckerman L S. 1994. Parametric instability of the interface between two fluids. *J. Fluid Mech.*, **279**: 49-68.
- Labousse M, Perrard S. 2014. Non-Hamiltonian features of a classical pilot-wave dynamics. *Phys. Rev. E*, **90**: 022913.
- Lieber S I, Hendershott M C, Pattanaporkratana A, Maclennan J E. 2007. Self-organization of bouncing oil drops: Two-dimensional lattices and spinning clusters. *Phys. Rev. E*, **75**: 056308.
- Lighthill J. 1956. Physics of gas flow at very high speeds. *Nature*, **178**: 343-345.
- Madelung E. 1926. Quantentheorie in Hydrodynamischen form. *Z. Phys.*, **40**: 322-326.
- Miles J, Henderson D. 1990. Parametrically forced surface waves. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **22**: 143-165.
- Moisy F, Rabaud M, Salsac K. 2009. A synthetic Schlieren method for the measurement of the topography of a liquid interface. *Exp. Fluids*, **46**: 1021-1036.
- Moláček J, Bush J W M. 2012. A quasi-static model of drop impact. *Phys. Fluids*, **24**: 127103.
- Moláček J, Bush J W M. 2013a. Droplets bouncing on a vibrating fluid bath. *J. Fluid Mech.*, **727**: 582-611.
- Moláček J, Bush J W M. 2013b. Droplets walking on a vibrating fluid bath: Towards a hydrodynamic pilot-wave theory.

- J. Fluid Mech.*, **727**: 612-647.
- Neitzel G P, Dell'Aversana P. 2002. Noncoalescence and nonwetting behavior of liquids. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **34**: 267-289.
- Nelson E. 1966. Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics. *Phys. Rev.*, **150**: 1079-1085.
- Nelson E. 2012. Review of stochastic mechanics. *J. Phys. Conf. Ser.*, **361**: 012011.
- Newton I. 1979. Opticks: Or a Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light. Mineola, NY: Dover.
- Okumura K, Chevy F, Richard D, Quéré D, Clanet C. 2003. Water spring: A model for bouncing drops. *Europhys. Lett.*, **62**: 237-243.
- Oza A, Harris D M, Rosales R R, Bush J W M. 2014a. Pilot-wave dynamics in a rotating frame: on the emergence of orbital quantization. *J. Fluid Mech.*, **744**: 404-429.
- Oza A, Rosales R R, Bush J W M. 2013. A trajectory equation for walking droplets: A hydrodynamic pilot-wave theory. *J. Fluid Mech.*, **737**: 552-570.
- Oza A, Wind-Willassen Ø, Harris D M, Rosales R R, Bush J W M. 2014b. Pilot-wave hydrodynamics in a rotating frame: Exotic orbits. *Phys. Fluids*, **26**: 082101.
- Perrard S, Labousse M, Fort E, Couder Y. 2014a. Chaos driven by interfering memory. *Phys. Rev. Lett.*, **113**: 104101.
- Perrard S, Labousse M, Miskin M, Fort E, Couder Y. 2014b. Self-organization into quantized eigenstates of a classical wave-driven particle. *Nat. Commun.*, **5**: 3219.
- Philippidis C, Dewdney C, Hiley B J. 1979. Quantum interference and the quantum potential. *Nuovo Cimento*, **52B**: 15-28.
- Pitaevskii L, Stringari S. 2003. Bose-Einstein Condensation. New York: Oxford Univ. Press.
- Prosperetti A, Oguz H N. 1993. The impact of drops on liquid surfaces and the underwater noise of rain. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **25**: 577-602.
- Protière S, Bohn S, Couder Y. 2008. Exotic orbits of two interacting wave sources. *Phys. Rev. E*, **78**: 036204.
- Protière S, Boudaoud A, Couder Y. 2006. Particle wave association on a fluid interface. *J. Fluid Mech.*, **554**: 85-108.
- Protière S, Couder Y, Fort E, Boudaoud A. 2005. The self-organization of capillary wave sources. *J. Phys. Condens. Matter*, **17**: S3529-S3535.
- Pucci G, Ben Amar M, Couder Y. 2013. Faraday instability in floating liquid lenses: The spontaneous mutual adaptation due to radiation pressure. *J. Fluid Mech.*, **725**: 402-427.
- Pucci G, Fort E, Ben Amar M, Couder Y. 2011. Mutual adaptation of a Faraday instability pattern with its flexible boundaries in floating fluid drops. *Phys. Rev. Lett.*, **106**: 024503.
- Reynolds O. 1886. On the theory of lubrication. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A*, **177**: 157-234.
- Rueda A, Haisch B. 2005. Gravity and the quantum vacuum inertia hypothesis. *Ann. Phys.*, **14**: 479-498.
- Schrödinger E. 1930. Über die kraftfreie Bewegung in der relativistischen Quantenmechanik. *Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl.*, **24**: 418-428.
- Shirikoff D. 2013. Bouncing droplets on a billiard table. *Chaos*, **23**: 013115.
- Spiegel E. 1980. Fluid dynamical form of the linear and nonlinear Schrödinger equations. *Physica D*, **1**: 236-240.
- Surdin M. 1974. L'électrodynamique stochastique et l'interprétation de la Mécanique Quantique. *C. R. Acad. Sci. Paris B*, **278**: 881-883.
- Taylor G I. 1909. Interference fringes with feeble light. *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **15**: 114-115.
- Terwagne D. 2012. Bouncing droplets, the role of deformations. [PhD Thesis]. Univ. Liège.
- Terwagne D, Gilet T, Vandewalle N, Dorbolo S. 2009. Metastable bouncing droplets. *Phys. Fluids*, **21**: 054103.
- Terwagne D, Gilet T, Vandewalle N, Dorbolo S. 2010. From a bouncing compound drop to a double emulsion. *Langmuir*, **26**: 11680-11685.

- Terwagne D, Ludewig F, Vandewalle N, Dorbolo S. 2013. The role of droplet deformations in the bouncing droplet dynamics. *Phys. Fluids*, **25**: 122101.
- Terwagne D, Vandewalle N, Dorbolo S. 2007. Lifetime of a bouncing droplet. *Phys. Rev. E*, **76**: 056311.
- Towler M. 2009. De Broglie-Bohm pilot-wave theory and the foundations of quantum mechanics: A graduate lecture course. Univ. Camb. http://www.tcm.phy.cam.ac.uk/~mdt26/pilot_waves.html.
- von Neumann J. 1932. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Berlin: Springer.
- Walker J. 1978. Drops of liquid can be made to float on the liquid. What enables them to do so? *Sci. Am.*, **238**: 151-158.
- Weinberg S. 1995. *The Quantum Theory of Fields, Vol. I: Foundations*. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press.
- Weinstein A, Pounder J R. 1945. An electromagnetic analogy in mechanics. *Am. Math. Mon.*, **52**: 434-438.
- Wind-Willassen Ø, Moláček J, Harris D M, Bush J W M. 2013. Exotic states of bouncing and walking droplets. *Phys. Fluids*, **25**: 082002.
- Yang A L, Chien W, King M, Grosshandler W L. 1997. A simple piezoelectric droplet generator. *Exp. Fluids*, **23**: 445-447.
- Yarin A L. 2006. Drop impact dynamics: Splashing, spreading, receding, bouncing. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **38**: 159-192
- Young T. 1804. The Bakerian Lecture: Experiments and calculations relative to physical optics. *Philos. Trans. R. Soc. Lond.*, **94**: 1-16.

(中国科学院力学研究所 王展 译自

John W. M. Bush. Pilot-wave hydrodynamics. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2015, 47: 269-292

北京大学 韦小丁 校)

Pilot-wave hydrodynamics *

John W. M. Bush **

Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts 02139

Abstract Yves Couder, Emmanuel Fort, and coworkers recently discovered that a millimetric droplet sustained on the surface of a vibrating fluid bath may self-propel through a resonant interaction with its own wave field. This article reviews experimental evidence indicating that the walking droplets exhibit certain features previously thought to be exclusive to the microscopic, quantum realm. It then reviews theoretical descriptions of this hydrodynamic pilot-wave system that yield insight into the origins of its quantumlike behavior. Quantization arises from the dynamic constraint imposed on the droplet by its pilot-wave field, and multimodal statistics appear to be a feature of chaotic pilot-wave dynamics. I attempt to assess the potential and limitations of this hydrodynamic system as a quantum analog. This fluid system is compared to quantum pilot-wave theories, shown to be markedly different from Bohmian mechanics and more closely related to de Broglie's original conception of quantum dynamics, his double-solution theory, and its relatively recent extensions through researchers in stochastic electrodynamics.

Keywords walking drops, Faraday waves, quantum analogs

Received: 2 March 2021

* Published with kind permission from *Annual Review Fluid Mechanics* © 2015 by Annual Reviews.

** E-mail: bush@math.mit.edu

© 2021 *Advances in Mechanics*.