

DOI: 10.3901/JME.2021.14.223

气动升力下磁浮车辆非线性响应研究*

吴 晗^{1,2} 曾晓辉^{1,2}

(1. 中国科学院力学研究所 北京 100190;
2. 中国科学院大学工程科学学院 北京 100049)

摘要: 磁浮列车在高速运行时受到的气动升力包含定常分量和非定常波动量,而非定常气动升力在某种程度上可以视为周期扰动。建立考虑非线性电磁力的磁浮系统二级悬挂的模型,推导了控制方程。利用增量谐波平衡法求解非线性方程,对考虑定常气动升力和周期性非定常气动升力条件下的磁浮系统非线性响应特性进行分析。开展了线性和非线性模型对比、控制增益参数和气动系数影响规律分析。结果表明,采用 PD 控制器时,周期扰动的气动力会使得车辆振动中心发生偏移,反馈控制参数对振动偏移具有较大影响。

关键词: 磁浮列车; 气动升力; 增量谐波平衡法; 反馈控制; 非线性响应

中图分类号: O322

Nonlinear Dynamics of Maglev Vehicle under Aerodynamic Lift

WU Han^{1,2} ZENG Xiaohui^{1,2}

(1. Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190;
2. School of Engineering Science, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049)

Abstract: The aerodynamic lift force of maglev train at high speed includes the steady component and the unsteady fluctuation component, and the unsteady aerodynamic lift force can be regarded as periodic disturbance. A two-stage suspension model of a maglev system with nonlinear electromagnetic force is established and the governing equation is derived. The nonlinear response characteristics of the maglev system considering steady and periodic unsteady aerodynamic lift are analyzed by the incremental harmonic balance method. The comparison of linear and nonlinear models, the analysis of the influence law of control gain parameters and gas dynamic coefficient are carried out. The results show that when PD controller is used, the aerodynamic force of periodic disturbance will cause the vehicle vibration center to shift, and the feedback control parameters have a great influence on the vibration shift.

Key words: maglev train; aerodynamic lift; incremental harmonic balance method; feedback control; nonlinear response

0 前言

高速磁悬浮列车具有能耗低、环境影响小、噪声低、维护少、爬坡能力强等优势,近年来得到了巨大的发展,中国具备自主知识产权的时速 600 km 高速磁浮列车样车已于 2019 年 5 月下线。

气动载荷与速度的平方成正比,因车速的增大,气动载荷必然急剧增大^[1]。以上海磁浮示范线三编组列车为例,数值计算表明,若以 600 km/h 速度运行,头车升力系数约 0.6,磁浮车迎风面积 11.86 m²,头车气动升力可达车体重量的 40%。此外,贴地飞行的高速磁浮列车尾部流场的涡脱落会导致气动升力的波动,使得气动载荷具有很强的非定常特性。EMS 型高速磁浮车辆是依靠受控垂向电磁力实现稳定悬浮,如此大的定常气动升力以及非定常气动力的波动会对列车的动力稳定性和安全性产生直接影响。KWON 等^[2]对磁浮车

* 国家自然科学基金(51805522, 11672306, 51490673)、国家重点研发计划(2016YFB1200602)和中科院 B 类先导(XDB22020100)资助项目。
20200525 收到初稿, 20201225 收到修改稿

辆通过悬浮桥并受阵风作用时的响应情况进行了数值模拟，结果显示乘坐舒适性会因为桥和湍流风引起的车辆低频振动而降低。YAU^[3]考虑了不稳定气流引起的气动载荷，计算了车辆-导轨耦合系统的响应，研究表明气动载荷可能导致高速磁浮车辆的加速度的显著放大。武建军和史筱红^[4]数值分析磁悬浮车体在风场作用下的动态响应。刘堂红和田红旗^[5]模拟了磁浮车辆明线交会时的横向振动响应。TAKIZAWA^[6]研究了 MLX01 磁悬浮列车 500 km/h 交会时的舒适性。

悬浮电磁力与悬浮间隙的平方成反比，磁浮列车系统是一个多学科耦合的非线性系统。由于高速磁浮列车速度极高，气动升力对列车安全和舒适性的影响是不可避免的，深入开展定常和非定常气动升力条件下的非线性响应特征，对提高磁浮列车在气动升力条件下的运行安全和舒适性，以及为控制系统设计提供理论依据是必不可少的。

磁浮列车在高速运行时受到的气动升力包含定常气动升力和非定常气动升力，由于列车尾部流场的涡脱落具有一定的周期性，因此非定常气动升力在某种程度上可以视为周期扰动。本文考虑定常和周期非定常气动升力，建立了考虑非线性电磁力模型的磁浮系统二级悬挂的模型，推导了控制方程。利用增量谐波平衡法求解非线性方程，对气动升力条件下的磁浮系统非线性响应特性进行了分析。

1 系统模型和动力学方程

为清晰明了地说明气动升力对磁浮系统非线性振动特性的影响机制，并方便获得解析表达式，本文采用图 1 所示的二级悬挂的单点悬浮控制模型开展考虑气动载荷效应的磁悬浮车辆稳定性机理分析。导轨考虑为刚性， F_{lift} 代表气动升力， δ 是电磁铁悬浮间隙， v 代表车速， k_s 和 c_s 是二系悬挂刚度和阻尼， k_f 和 c_f 是一系悬挂刚度和阻尼。

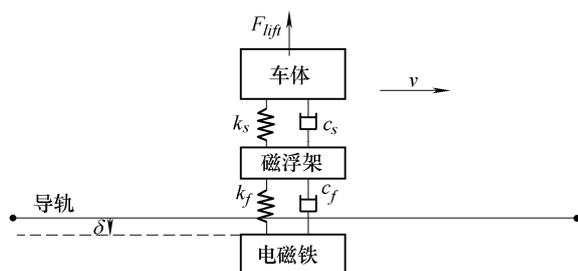


图 1 单点悬浮系统示意图

考虑磁浮列车迎面气流，作用在车体上的非定常气动升力可以表示为

$$\begin{cases} F_L = F_{L0} + F_{L\Delta} \\ F_{L0} = \frac{1}{2} C_L \rho A_v v^2 \\ F_{L\Delta} = A_0 \sin(2\pi f \cdot t) \end{cases} \quad (1)$$

式中， F_{L0} 是定常气动升力， $F_{L\Delta}$ 是气动升力波动， ρ 是空气密度(1.2 kg/m³)， A_v 是车辆的参考面积， C_L 是气动升力系数， v 是迎面风速(即车速)， A_0 是非定常气动升力的波动幅值， f 是周期性非定常气动力的波动频率。

以竖直向下为正方向，磁悬浮系统的垂向运动方程可以写为

$$\begin{cases} m_c \ddot{z}_c + k_s(z_c - z_f) + c_s(\dot{z}_c - \dot{z}_f) = F_{L\Delta} \\ m_f \ddot{z}_f + k_s(z_f - z_c) + c_s(\dot{z}_f - \dot{z}_c) + \\ k_f(z_f - s) + c_f(\dot{z}_f - \dot{s}) = 0 \\ m_e \ddot{z}_e + k_f(s - z_f) + c_f(\dot{s} - \dot{z}_f) = -\Delta F \end{cases} \quad (2)$$

式中， ΔF 是电磁力相对于平衡状态的变化量。

设稳定悬浮的平衡位置为(I_0, δ_0)， I_0 为稳定电流， δ_0 为稳定悬浮间隙。设 i 为平衡位置处的电流扰动， s 为电磁铁相对于稳定悬浮间隙的扰动。电磁力^[7-8]可以写为

$$F = \frac{\mu_0 AN^2 (I_0 + i)^2}{4(\delta_0 + s)^2} \quad (3)$$

式中， μ_0 是空气磁导率， δ 为电磁铁悬浮间隙， A 电磁铁有效磁极面积， N 为线圈匝数。将式(3)利用泰勒级数展开

$$\begin{aligned} F &= \frac{\mu_0 AN^2}{4\delta_0^2} \frac{(I_0 + i)^2}{\left(1 - \left(-\frac{s}{\delta_0}\right)\right)^2} = \\ &= \frac{\mu_0 AN^2}{4\delta_0^2} (I_0 + i)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(-\frac{s}{\delta_0}\right)^n = \\ &= \frac{\mu_0 AN^2}{4\delta_0^2} (I_0^2 + 2I_0i + i^2) \times \\ &\quad \left[1 + 2\left(-\frac{s}{\delta_0}\right) + 3\left(-\frac{s}{\delta_0}\right)^2 + 4\left(-\frac{s}{\delta_0}\right)^3 \dots\right] \end{aligned} \quad (4)$$

采用比例微分控制器对电流进行控制

$$i = k_p \cdot s + k_d \cdot \dot{s} \quad (5)$$

将(5)代入式(4)，并保留到三阶精度，得到非线性电磁力

$$\begin{cases} F = F_0 + \Delta F \\ \Delta F = k_1 \left(k_p - \frac{I_0}{\delta_0} \right) s + k_1 k_d \dot{s} + \\ k_2 \left(k_p^2 - \frac{4I_0 k_p}{\delta_0} + \frac{3I_0^2}{\delta_0^2} \right) s^2 + \\ k_2 \left(2k_p k_d - \frac{4I_0 k_d}{\delta_0} \right) s\dot{s} + k_2 (k_d^2) \dot{s}^2 + \\ k_3 \left(-k_p^2 + \frac{3I_0 k_p}{\delta_0} - \frac{2I_0^2}{\delta_0^2} \right) s^3 + \\ k_3 \left(\frac{3I_0 k_d}{\delta_0} - 2k_p k_d \right) s^2 \dot{s} - k_3 k_d^2 \dot{s}^2 s \end{cases} \quad (6)$$

式中， $F_0 = \frac{\mu_0 AN^2 I_0^2}{4\delta_0^2}$ ， $k_1 = \frac{2\mu_0 AN^2 I_0}{4\delta_0^2}$ ，
 $I_0 = \frac{2\delta_0}{N} \sqrt{\frac{(m_e + m_f + m_c)g + F_{L0}}{\mu_0 A}}$ ， $k_2 = \frac{\mu_0 AN^2}{4\delta_0^2}$ ，
 $k_3 = \frac{2\mu_0 AN^2}{4\delta_0^3}$ 。

磁悬浮系统的垂向运动方程式(6)可以改写为

$$\begin{cases} m_c \ddot{z}_c + k_s (z_c - z_f) + c_s (\dot{z}_c - \dot{z}_f) = \\ A_0 \sin(2\pi ft) \\ m_f \ddot{z}_f + k_s (z_f - z_c) + c_s (\dot{z}_f - \dot{z}_c) + \\ k_f (z_f - s) + c_f (\dot{z}_f - \dot{s}) = 0 \\ m_e \ddot{s} + k_f (s - z_f) + c_f (\dot{s} - \dot{z}_f) + \\ \mu_1 s + \mu_2 \dot{s} + \mu_3 s^2 + \mu_4 s\dot{s} + \\ \mu_5 \dot{s}^2 + \mu_6 s^3 + \mu_7 s^2 \dot{s} + \mu_8 \dot{s}^2 s = 0 \end{cases} \quad (7)$$

式中， $\mu_1 = k_1 \left(k_p - \frac{I_0}{\delta_0} \right)$ ， $\mu_2 = k_1 k_d$ ，
 $\mu_3 = k_2 \left(k_p^2 - \frac{4I_0 k_p}{\delta_0} + \frac{3I_0^2}{\delta_0^2} \right)$ ， $\mu_4 = k_2 \left(2k_p k_d - \frac{4I_0 k_d}{\delta_0} \right)$ ，
 $\mu_5 = k_2 (k_d^2)$ ， $\mu_6 = k_3 \left(-k_p^2 + \frac{3I_0 k_p}{\delta_0} - \frac{2I_0^2}{\delta_0^2} \right)$ ，
 $\mu_7 = k_3 \left(\frac{3I_0 k_d}{\delta_0} - 2k_p k_d \right)$ ， $\mu_8 = -k_3 k_d^2$ 。

式(7)改写为矩阵形式

$$\begin{aligned} \bar{M}\ddot{q} + \bar{C}\dot{q} + \bar{K}q + \bar{K}^{(2)}q + \bar{C}_1^{(2)}\dot{q} + \bar{C}_2^{(2)}\dot{q} + \\ \bar{K}^{(3)}q + \bar{C}_1^{(3)}\dot{q} + \bar{C}_2^{(3)}\dot{q} = \bar{F} \cos(2\pi ft) \end{aligned} \quad (8)$$

式中 $q = (z_c \ z_f \ s)^T$

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} m_c & 0 & 0 \\ 0 & m_f & 0 \\ 0 & 0 & m_e \end{pmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} c_s & -c_s & 0 \\ -c_s & c_s + c_f & -c_f \\ 0 & -c_f & c_f + \mu_2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{K} = \begin{pmatrix} k_s & -k_s & 0 \\ -k_s & k_s + k_f & -k_f \\ 0 & -k_f & k_f + \mu_1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{K}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 s \end{pmatrix}$$

$$\bar{K}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_6 s^2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{C}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_4 s \end{pmatrix}$$

$$\bar{C}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_5 \dot{s} \end{pmatrix}$$

$$\bar{C}_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_7 s^2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{C}_2^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_8 s\dot{s} \end{pmatrix}$$

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} A_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2 增量谐波平衡法

增量谐波平衡法(IHB法)由 LAU 和 CHEUNG^[9]于 1990 年提出。该方法综合了数值数值计算中的增量方法和谐波平衡法，已经被广泛地应用于各类非线性系统的分析^[10-16]。IHB 方法的主要优点是可以应用于强非线性系统，并且该方法实际上是一种半数值方法，可以很容易地应用于高维非线性系统。本文应用 IHB 法计算磁浮车辆系统在气动升力下的非线性响应。

令 $\tau = 2\pi ft = \omega t$, 则式(8)可以写成

$$\begin{cases} \omega^2 \bar{M} \cdot q'' + \omega \bar{C} \cdot q' + \bar{K} \cdot q + \bar{K}^{(2)}(q) \cdot q + \\ \omega \bar{C}_1^{(2)}(q) \cdot q' + \omega \bar{C}_2^{(2)}(\omega q') \cdot q' + \\ \bar{K}^{(3)}(q^2) \cdot q + \omega \bar{C}_1^{(3)}(q^2) \cdot q' + \\ \omega \bar{C}_2^{(3)}(q \cdot \omega q') \cdot q' = \bar{F} \cos(\tau) \end{cases} \quad (9)$$

令 q_0 和 ω_0 表示振动过程中的某一状态, 则其临近的状态可以表示为增量形式

$$q = q_0 + \Delta q \quad (10)$$

$$\bar{F} = \bar{F}_0 + \Delta \bar{F} \quad (11)$$

$$\omega = \omega_0 + \Delta \omega \quad (12)$$

将式(10)~(12)代入式(9), 略去高阶项, 得到矩阵形式的增量方程, 如下

$$\begin{cases} \omega_0^2 \bar{M} \cdot \Delta q'' + \omega_0 \bar{C} \cdot \Delta q' + \bar{K} \cdot \Delta q + 2\bar{K}^{(2)} \cdot \Delta q + \\ 3\bar{K}^{(3)} \cdot \Delta q + \omega_0 \bar{K} C_1^{(2)} \cdot \Delta q + 2\omega_0 \bar{K} C_1^{(3)} \cdot \Delta q + \\ \omega_0^2 \bar{K} C_2^{(3)} \cdot \Delta q + \omega_0 \bar{C}_1^{(2)} \cdot \Delta q' + 2\omega_0^2 \bar{C}_2^{(2)} \cdot \Delta q' + \\ \omega_0 \bar{C}_1^{(3)} \cdot \Delta q' + 2\omega_0^2 \bar{C}_2^{(3)} \cdot \Delta q' = \bar{R} - \\ \left[2\omega_0 \bar{M} \cdot q_0'' + \bar{C} \cdot q_0' + \bar{C}_1^{(2)} \cdot q_0' + 2\omega_0 \bar{C}_2^{(2)} \cdot q_0' + \right. \\ \left. \bar{C}_1^{(3)} \cdot q_0' + 2\omega_0 \bar{C}_2^{(3)} \cdot q_0' \right] \Delta \omega + \Delta \bar{F} \cos(\tau) \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \bar{R} = \bar{F}_0 \cos(\tau) - \left[\omega_0^2 \bar{M} \cdot q_0'' + \omega_0 \bar{C} \cdot q_0' + \right. \\ \left. \bar{K} \cdot q_0 + \bar{K}^{(2)} \cdot q_0 + \bar{K}^{(3)} \cdot q_0 + \omega_0 \bar{C}_1^{(2)} \cdot q_0' + \right. \\ \left. \omega_0^2 \bar{C}_2^{(2)} \cdot q_0' + \omega_0 \bar{C}_1^{(3)} \cdot q_0' + \omega_0^2 \bar{C}_2^{(3)} \cdot q_0' \right] \end{cases} \quad (14)$$

\bar{R} 称为向量误差, 当 q_0, ω_0, \bar{F}_0 是方程的准

确解是, $\bar{R} = 0$ 。式中, $\bar{K} C_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_4 s_0' \end{pmatrix}$,

$$\bar{K} C_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_7 s_0 s_0' \end{pmatrix}, \quad \bar{K} C_2^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_8 s_0' s_0' \end{pmatrix}。$$

设稳态的周期解为

$$\begin{cases} q_{j0} = a_{j0} + \sum_{k=1}^{N_c} a_{jk} \cos k\tau + \sum_{k=1}^{N_s} b_{jk} \sin k\tau = C_s A_j \\ \Delta q_j = \Delta a_{j0} + \sum_{k=1}^{N_c} \Delta a_{jk} \cos k\tau + \sum_{k=1}^{N_s} \Delta b_{jk} \sin k\tau = C_s \Delta A_j \\ j = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (15)$$

$$C_s = [1, \cos \tau, \cos 2\tau, \dots, \cos N_c \tau, \sin \tau, \sin 2\tau, \dots, \sin N_s \tau]$$

$$A_j = [a_{j0}, a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jN_c}, b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{jN_s}]^T$$

$$\Delta A_j = [\Delta a_{j0}, \Delta a_{j1}, \Delta a_{j2}, \dots, \Delta a_{jN_c}, \Delta b_{j1}, \Delta b_{j2}, \dots, \Delta b_{jN_s}]^T \quad (16)$$

记

$$A = (A_1, A_2, A_3)^T, \Delta A = (\Delta A_1, \Delta A_2, \Delta A_3)^T, S = \text{diag}(C_s, C_s, C_s) \quad (17)$$

则

$$q_0 = SA \quad \Delta q = S \Delta A \quad (18)$$

把式(18)代入式(13), 并应用 Galerkin 过程, 整理可以得到以 $\Delta A, \Delta \omega, \Delta F$ 为未知量的代数方程组

$$K_{mc} \Delta A = R + R_{mc} \Delta \omega + R_f \Delta F \quad (19)$$

$$\begin{aligned} K_{mc} = & \omega_0^2 M + \omega_0 C + K + 2K^{(2)} + 3K^{(3)} + \\ & \omega_0 K C_1^{(2)} + 2\omega_0 K C_1^{(3)} + \omega_0^2 K C_2^{(3)} + \\ & \omega_0 C_1^{(2)} + 2\omega_0^2 C_2^{(2)} + \omega_0 C_1^{(3)} + 2\omega_0^2 C_2^{(3)} \end{aligned} \quad (20)$$

$$R = F - \left[\omega_0^2 M + \omega_0 C + K + K^{(2)} + K^{(3)} + \omega_0 C_1^{(2)} + \omega_0^2 C_2^{(2)} + \omega_0 C_1^{(3)} + \omega_0^2 C_2^{(3)} \right] A \quad (21)$$

$$R_{mc} = - \left[2\omega_0 M + C + C_1^{(2)} + 2\omega_0 C_2^{(2)} + C_1^{(3)} + 2\omega_0 C_2^{(3)} \right] A \quad (22)$$

式中, $M, C, K, K^{(2)}, K^{(3)}, C_1^{(2)}, C_2^{(2)}, C_1^{(3)}, C_2^{(3)}, F, R_f, \Delta F$ 的表达式如下为

$$\begin{cases} M = \int_0^{2\pi} S^T \bar{M} S'' d\tau & C = \int_0^{2\pi} S^T \bar{C} S' d\tau \\ K = \int_0^{2\pi} S^T \bar{K} S d\tau & K^{(2)} = \int_0^{2\pi} S^T \bar{K}^{(2)} S d\tau \\ K^{(3)} = \int_0^{2\pi} S^T \bar{K}^{(3)} S d\tau & K C_1^{(2)} = \int_0^{2\pi} S^T \bar{K} C_1^{(2)} S d\tau \\ K C_1^{(3)} = \int_0^{2\pi} S^T \bar{K} C_1^{(3)} S d\tau & K C_2^{(3)} = \int_0^{2\pi} S^T \bar{K} C_2^{(3)} S d\tau \\ C_1^{(2)} = \int_0^{2\pi} S^T \bar{C}_1^{(2)} S' d\tau & C_2^{(2)} = \int_0^{2\pi} S^T \bar{C}_2^{(2)} S' d\tau \\ C_1^{(3)} = \int_0^{2\pi} S^T \bar{C}_1^{(3)} S' d\tau & C_2^{(3)} = \int_0^{2\pi} S^T \bar{C}_2^{(3)} S' d\tau \\ F = \int_0^{2\pi} S^T \bar{F}_0 \cos \tau d\tau & R_f = \int_0^{2\pi} S^T \cos \tau d\tau \\ \Delta F = \Delta \bar{F} \end{cases} \quad (23)$$

如果我们只关心某一固定气动力振幅下的频率-振幅响应曲线, 则 F 取固定值, $\Delta F = 0$, 于是(19)成为

$$K_{mc} \Delta A = R + R_{mc} \Delta \omega \quad (24)$$

式(24)是一个线性方程组，其未知量的数目比方程数目多一个，因此求解时选定其中一个增量作为控制增量。为了高效计算幅频响应曲线，本文中采样弧长增量法自动追踪响应曲线。关于弧长增量法的有关理论，参见 Cheung 的研究^[17]。

3 仿真分析

3.1 参数设置与验证

本文计算分析所采用的参数设置如表 1 和表 2 所示。气动力波动幅值 $A_0=25\ 000\ \text{N}$ 。运行车辆 $v = 600\ \text{km/h}$ ，车辆参考面积 $11.86\ \text{m}^2$ 。表 1 和表 2 中车体、磁浮架以及电磁铁的参数均依照一节车的 1/8 选取，故二级悬挂模型(图 1)中定常气动升力应为整车所受气动升力的 1/8， $F_{L0}=0.5C_L\rho A_v v^2/8$ 。非定常气动升力的波动频率主要在 $0\sim 30\ \text{Hz}$ 范围内^[18]，因此本文计算 $0\sim 30\ \text{Hz}$ 非定常气动升力下的系统响应。

表 1 车辆参数

m_c/kg	m_f/kg	$k_s/(\text{N/m})$	$c_s/(\text{N}\cdot\text{s/m})$	$k_f/(\text{N/m})$	$c_f/(\text{N}\cdot\text{s/m})$
4 875	1 430	2.05×10^5	1.0×10^4	8.0×10^7	2.0×10^4

表 2 电磁铁参数

μ_0	δ_0/m	N_m	R/Ω	A_m/m^2	m_e/kg
$4\pi\times 10^{-7}$	0.01	290	0.61	0.622	1 200

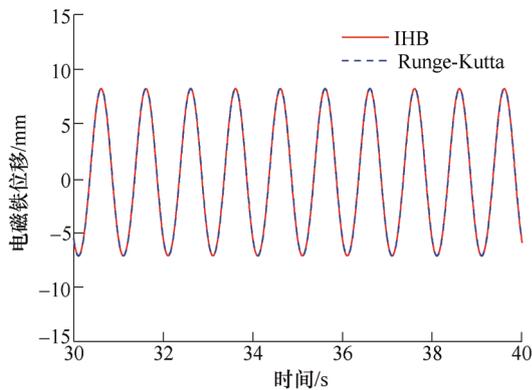


图 2 IHB 方法与 RK 数值积分结果对比

3.2 线性和非线性对比

图 3 和图 4 分别给出了位置反馈控制参数 $k_p=700$ 和 $1\ 000$ 时线性和非线性系统的电磁铁振动曲线及频谱分析。对比结果，线性模型得到的车辆

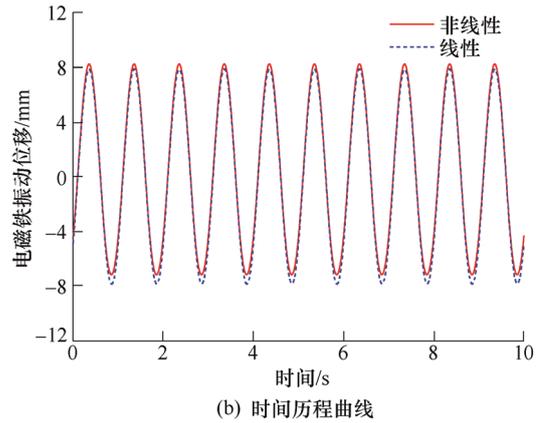
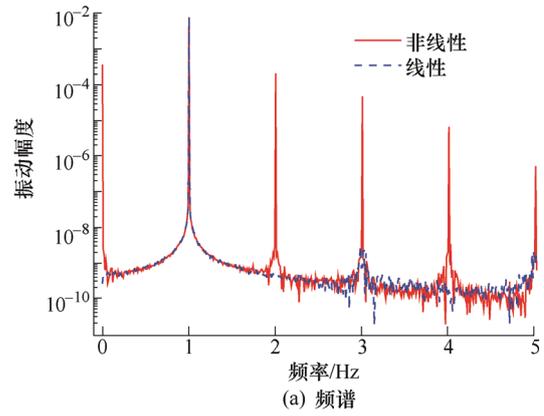


图 3 线性和非线性模型结果对比
($C_L=0, k_p=700, k_d=10, f=1.0$)

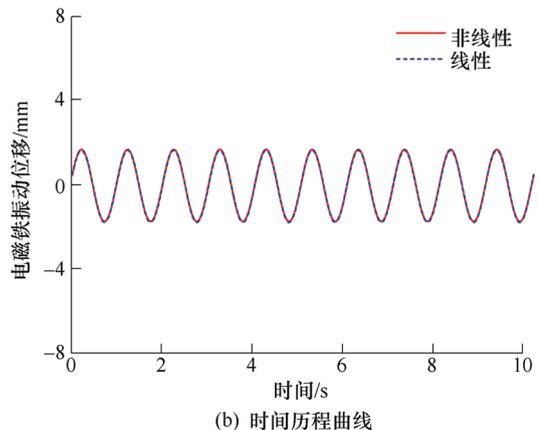
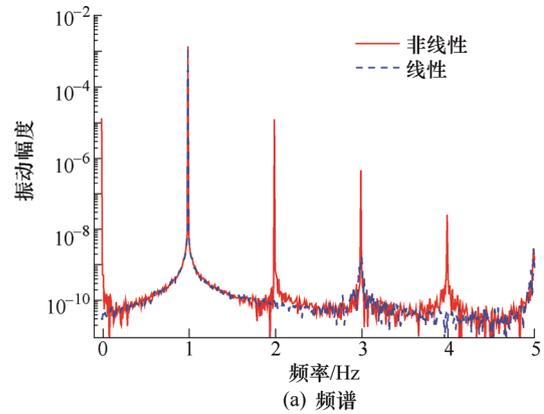


图 4 线性和非线性模型结果对比
($C_L=0, k_p=1\ 000, k_d=10, f=1.0$)

振动频率只有气动升力的激励频率，而采用非线性模型分析时，振动会出现气动升力频率的高倍频，以2倍频和3倍频为主。

另外，如图3和图4中所示，采用非线性电磁力模型计算时，电磁铁振动中存在零阶振动，即振动中心偏离零点，对应的式(15)中谐波展开式的第一项 a_{p0} 不为零，这代表电磁铁偏离稳定悬浮间隙位置；而采用线性电磁力模型，正弦气动升力下，电磁铁和磁浮架的振动中心处于静态平衡位置。结果表明，采用PD控制器，正弦气动升力激励下，求得的谐波展开式的常数项不为零，电磁铁和磁浮架的振动中心偏离静态平衡位置，这是振动方程中二次非线性项产生的影响。要消除因二次非线性引起的静态偏移，在控制中需加入积分项控制。若采用PID控制算法，该偏移量会随着时间增加逐渐消失，这是因为积分控制的输出反映的是对输入信号的积累，因此当输入信号为零时，积分控制仍然可以有不为零的输出。正是由于这一独特的作用，它可以用来消除稳态误差。

从以上两图的结果也可以发现，电磁铁振幅越大，高阶频率所占分量越明显，零阶振动越明显，即振动中心偏移零点越大，表明电磁铁振动幅值越大，其非线性特点越明显。

3.3 控制增益参数影响

图5~7给出了气动升力系数 $C_L=0$ ， -1.6 和 1.6 三种条件下，选取不同位置反馈参数 k_p 时的电磁铁振动偏移量(即零阶振动，式(15)中 a_{30})。结果表明， k_p 较小时($k_p=700, 1\ 000, 2\ 000$)振动中心的偏移为正(悬浮间隙增大)， k_p 较大时($k_p=5\ 000, 7\ 000$)，振动中心偏移为负(间隙减小)。然而，由于 k_p 较大时，振幅小，相应地，振动中心偏移也很小，如图5~7所示。

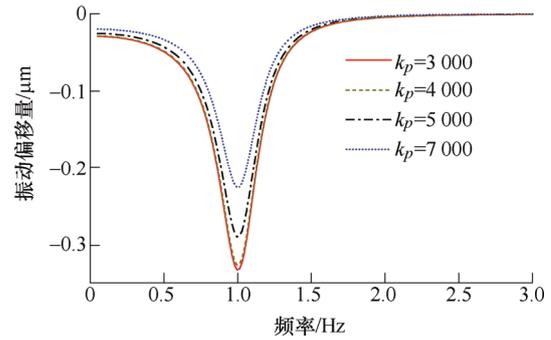
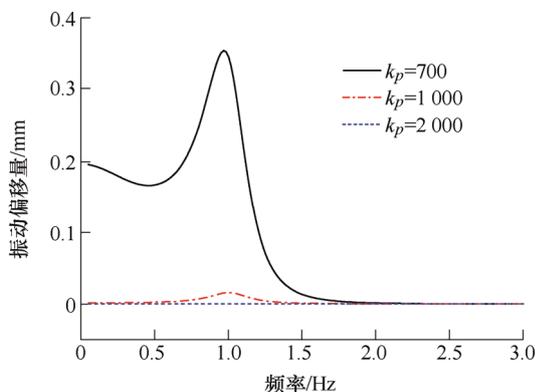


图5 不同 k_p 取值时振动中心偏移量($C_L=0$)

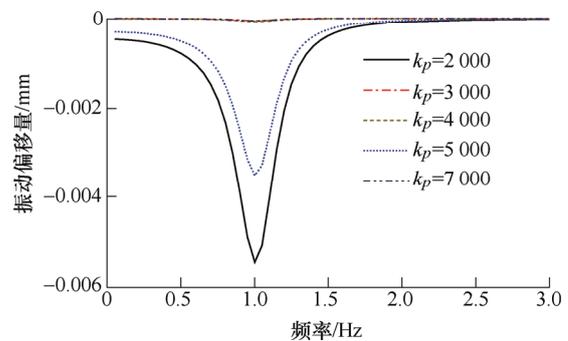
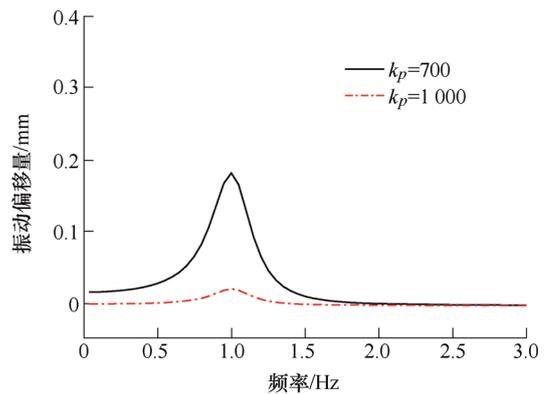
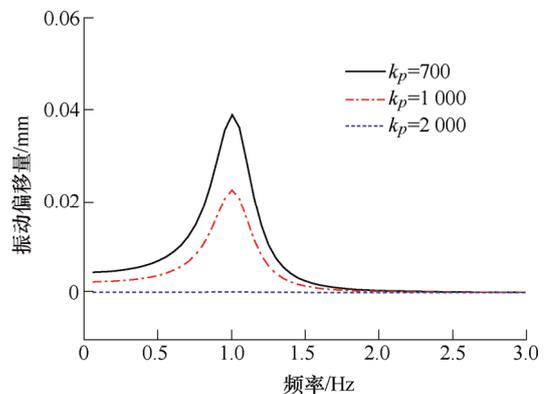


图6 不同 k_p 取值时振动中心偏移量($C_L=1.6$)



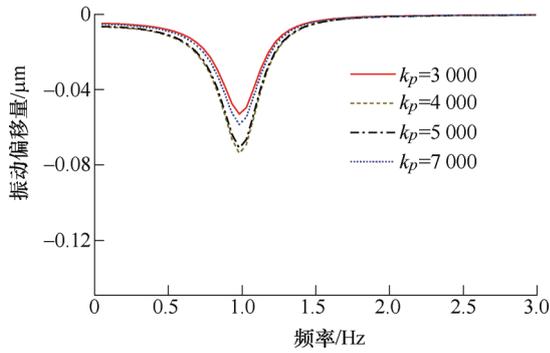


图7 不同 k_p 取值时振动中心偏移量($C_L=-1.6$)

图8~10给出了气动升力系数 $C_L=0, -1.6$ 和 1.6 三种条件下, 选取不同速度反馈控制参数 k_d 时的电磁铁振动偏移量。结果表明, 与 k_p 影响结果类似, k_d 较小时振动中心的偏移为正(悬浮间隙增大), k_d 较大时, 振动中心偏移为负(悬浮间隙减小)。

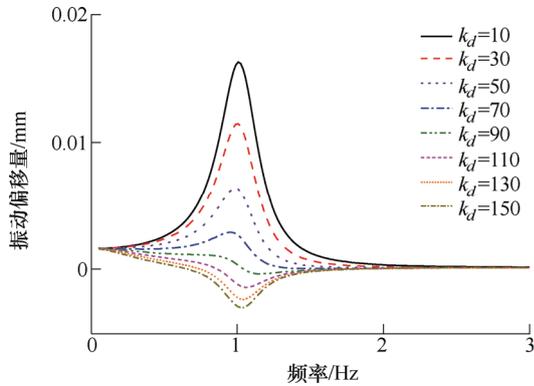


图8 不同 k_d 取值时振动中心偏移量($C_L=0$)

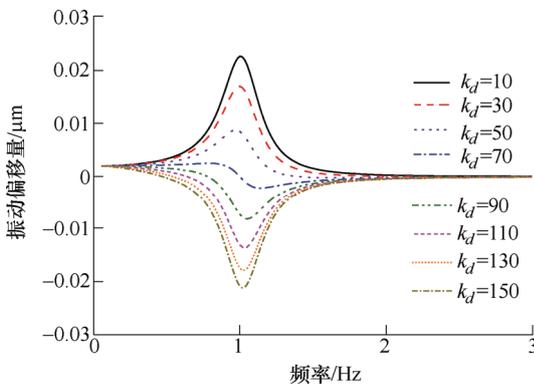


图9 不同 k_d 取值时振动中心偏移量($C_L=1.6$)

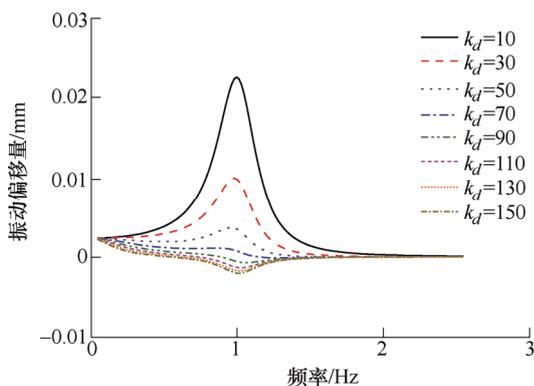


图10 不同 k_d 取值时振动中心偏移量($C_L=-1.6$)

无论 k_p 和 k_d 如何变化, 振动幅度均在 1 Hz 附近达到最大。而通过线性模态分析可知 1 Hz 是车辆的一阶模态, 对应的是车体的垂向振动模态。故而, 当气动升力波动频率接近车体固有振动频率时, 会导致车体以及电磁铁较大幅度的振动。

3.4 气动力系数影响

本节分析了选取不同位置反馈参数 k_p 和速度反馈参数 k_d 时电磁铁零阶振动(即振动中心偏移)和一阶振动幅值随定常气动升力系数变化的情况。电磁铁的零阶振动和一阶振动幅值可以由式(15)得到。零阶振动为 a_{30} , 一阶振动幅值为 $\sqrt{a_{31}^2+b_{31}^2}$, 本章分析时, $f=1$ 。

选取 $k_d=10$, 变化 k_p 时, 定常气动升力系数对零阶振动与一阶振动幅度的影响如图11和图12所示。分析表明, k_p 越小, 振幅越大。 $k_p=700$ 时, 振动偏移、一阶振幅与气动升力系数的关系曲线与其他取值时结果有很大不同, 零阶和一阶振动与气动升力系数在气动系数为零附近出现最大值。两图结果均表明, 选取较大的 k_d , 对抑制振动中心偏移和一阶振动振幅都有利。

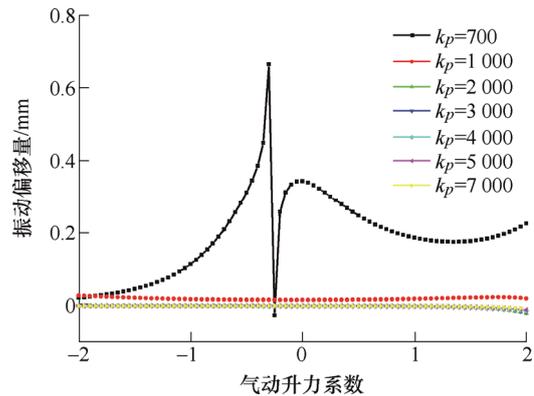


图11 不同 k_p 条件下振动中心偏移量与气动升力系数关系

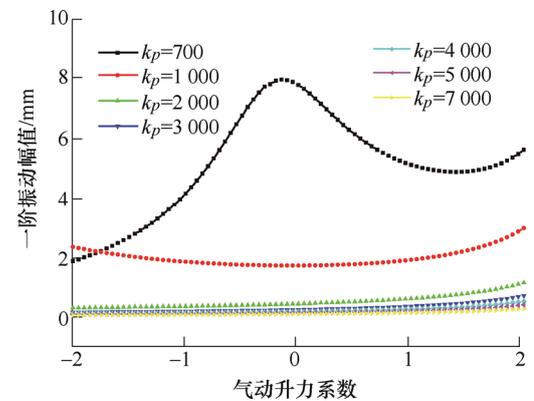


图12 不同 k_p 条件下一阶振幅与气动升力系数关系

选取 $k_p=1000$, 变化 k_d 时, 定常气动升力系数对零阶振动与一阶振动幅度的影响如图13和图14

所示。如图 13 所示,对于零阶振动来说, k_d 逐渐增大时,零阶振动由正转负,这与第 3.3 节分析结果一致。随着气动升力系数由负转正并逐渐增大时(定常气动力由向下逐渐变为向上并逐渐增大),零阶振动整体逐渐向负数变化,即车辆表现为振动中心向上偏移。如图 14 所示,对于一阶振动来说, k_d 增大时,振幅逐渐减小,而除 $k_d=10$ 外,随着气动升力系数由负转正并逐渐增大时(定常气动力由向下逐渐变为向上并逐渐增大),一阶振动振幅均逐渐增大。两图对比表明,为了兼顾振动中心偏移和振动幅度, k_d 并不是越大越好。

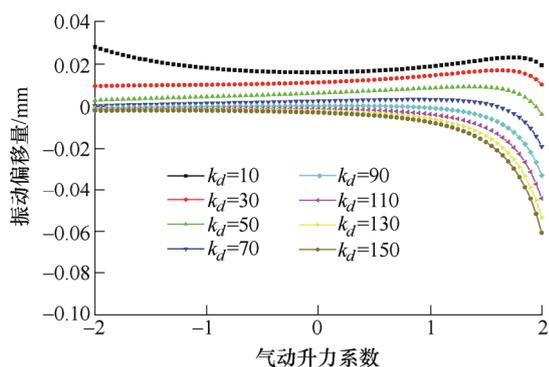


图 13 不同 k_d 条件下振动中心偏移量与气动升力系数关系

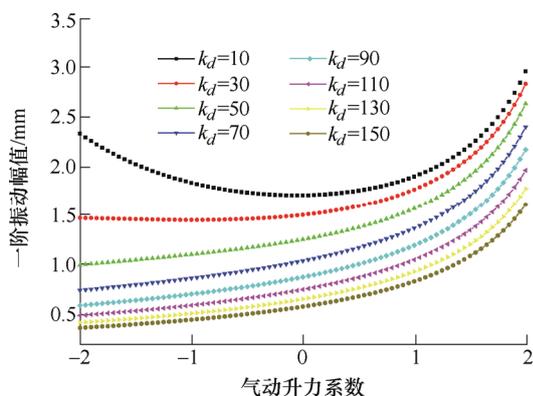


图 14 不同 k_d 条件下一阶振幅与气动升力系数关系

4 结论

通过建立磁浮车辆二级悬挂非线性动力学模型,考虑定常和周期性非定常气动升力的作用,利用增量谐波平衡法分析了气动升力作用下的磁浮车辆非线性响应特征,通过线性和非线性模型对比、控制增益参数和气动升力系数影响规律,得出以下结论。

(1) 若采用 PD 控制器,在非定常气动升力作用下,电磁铁和磁浮架的振动中心偏离静态平衡位置,这是二阶非线性导致的结果。但是,在选取不同位

置和速度反馈控制增益时,振动中心偏移方向不同。 k_p 和 k_d 较小时振动中心的偏移为正(间隙增大), k_p 和 k_d 较大时,振动中心偏移为负(间隙减小)。

(2) 气动升力波动频率与车辆的一阶模态(车体垂荡的固有频率)接近时,电磁铁的振动幅度最大。

(3) 电磁铁振幅越大,高阶频率所占分量越明显,零阶振动越明显,即振动中心偏移零点越大,表明电磁铁振动幅值越大,其非线性特点越明显。

(4) 选取较大的 k_p ,对抑制振动中心偏移和一阶振动振幅都有利。而为了兼顾振动中心偏移和振动幅度, k_d 并不是越大越好,针对本文工况,取值 70 最为合适。

参 考 文 献

- [1] 丁叁叁,姚拴宝,陈大伟. 高速磁浮列车气动升力特性[J]. 机械工程学报, 2020, 56(8): 228-234.
DING Sansan, YAO Shuanbao, CHEN Dawei. Aerodynamic lift force of high-speed maglev train[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020, 56(8): 228-234.
- [2] KWON S D, LEE J S, MOON J W, et al. Dynamic interaction analysis of urban transit maglev vehicle and guideway suspension bridge subjected to gusty wind[J]. Engineering Structures, 2008, 30(12): 3445-3456.
- [3] YAU J D. Aerodynamic vibrations of a maglev vehicle running on flexible guideways under oncoming wind actions[J]. Journal of Sound and Vibration, 2010, 329(10): 1743-1759.
- [4] 武建军,史筱红. 横向风场作用下磁悬浮车体运动稳定性数值研究[J]. 兰州大学学报, 2009, 45(2): 96-102.
WU Jianjun, SHI Xiaohong. Numerical analyses of dynamic stability of maglev vehicles in crosswind field[J]. Journal of Lanzhou University, 2009, 45(2): 96-102.
- [5] 刘堂红,田红旗. 磁浮列车明线交会横向振动分析[J]. 交通运输工程学报, 2005, 5(1): 39-44.
LIU Tanghong, TIAN Hongqi. Transverse vibration analysis of two maglev trains passing by in open air[J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2005, 5(1): 39-44.
- [6] TAKIZAWA H. 磁悬浮列车交会通过时的车辆动力学特性[J]. 国外铁道车辆, 2004, 41(1): 30-33.
TAKIZAWA H. The vehicle dynamics characteristics of a magnetic levitation train passing another train running in

- opposite direction[J]. Foreign Rolling Stock, 2004, 41(1): 30-33.
- [7] 翟婉明, 赵春发. 磁浮车辆/轨道系统动力学(I)——磁/轨相互作用及稳定性[J]. 机械工程学报, 2005, 41(7): 1-10.
ZHAI Wanming, ZHAO Chunfa. Dynamics of maglev vehicle/guideway systems(I)——Magnet/Rail interaction and system stability[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2005, 41(7): 1-10.
- [8] 赵春发, 翟婉明. 磁浮车辆/轨道系统动力学(II)——建模与仿真[J]. 机械工程学报, 2005, 41(8): 163-175.
ZHAO Chunfa, ZHAI Wanming. Dynamics of maglev vehicle/ guideway systems(II)——Modeling and simulation[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2005, 41(8): 163-175.
- [9] LAU S L, CHEUNG Y K. Amplitude incremental variational principle for nonlinear vibration of elastic systems[J]. Journal of Applied Mechanics, 1981, 48: 959-964.
- [10] LIU Yubiao, XING Yunlin, LAW S S, et al. Internal resonance vibration induced by nonlinearity of primary suspension system in high-speed vehicle system[J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 88(4): 2947-2956.
- [11] WANG Sheng, HUA Lin, YANG Can, et al. Applications of incremental harmonic balance method combined with equivalent piecewise linearization on vibrations of nonlinear stiffness systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 2018, 441: 111-125.
- [12] SHEN Yongjun, WEN Shaofang, LI Xianghong, et al. Dynamical analysis of fractional-order nonlinear oscillator by incremental harmonic balance method[J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 85(3): 1457-1467.
- [13] HUANG J L, ZHU W D. A new incremental harmonic balance method with two time scales for quasi-periodic motions of an axially moving beam with internal resonance under single-tone external excitation[J]. Journal of Vibration and Acoustics. 2017, 139: 021010.
- [14] LI Yuanping, CHEN Siyu. Periodic solution and bifurcation of a suspension vibration system by incremental harmonic balance and continuation method [J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 83: 941-950.
- [15] LU Chungjen, LIN Yumin. A modified incremental harmonic balance method for rotary periodic motions[J]. Nonlinear Dynamics, 2011, 66: 781-788.
- [16] JU R, FAN W, ZHU W D, et al. A modified two-timescale incremental harmonic balance method for steady-state quasi-periodic responses of nonlinear systems[J]. Journal of Computational Nonlinear Dynamics, 2017, 12(5): 051007.
- [17] CHEUNG Y K, CHEN S H, LAU S L. Application of the incremental harmonic balance method to cubic nonlinearity systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 1990, 140: 73-86.
- [18] ZHOU Peng, LI Tian, ZHAO Chunfa, et al. Numerical study on the flow field characteristics of the new high-speed maglev train in open air[J]. Journal of Zhejiang University-SCI ENCE A, 2020, 21(5): 366-381.

作者简介: 吴晗, 男, 1988年出生, 博士, 助理研究员。主要从事车辆动力学研究。

E-mail: wuhan@imech.ac.cn

曾晓辉(通信作者), 男, 1972年出生, 博士, 研究员, 博士研究生导师。主要从事结构动力学研究。

E-mail: zXH@imech.ac.cn