译文

深水表面有限振幅周期波的稳定性

Zakharov V E

摘　要 本文研究了无限深流体中非线性定常表面波的稳定性 (Lamb 1964, Moiseev 1960). 在第 1 节中, 将带有自由表面的理想流体动力学方程转换为有关正则变量的方程: 以正则变量来表示波形$\eta(\boldsymbol{r},t)$和表面速度势函数$\Psi(\boldsymbol{r},t)$. 通过引入正则变量, 可以将表面波的稳定性问题视为色散介质中非线性波这一更具普遍性问题的一部分 (Akhmanov 1964, Zakharov 1965). 本文其余部分的结果也适用于一般情况. 在第 2 节中, 使用与 van der Pohl 类似的方法, 得到了一个用于描述小振幅近似下的非线性波的简化方程. 如果假设波包很窄, 方程将特别简单. 该方程具有精确解, 该解近似于一个有限振幅的周期波. 在第 3 节中, 研究了有限振幅周期波的不稳定性, 发现了两类不稳定性. 第一类不稳定性是破坏不稳定性, 类似于等离子体中波的破坏不稳定性 (Oraevskii & Sagdeev 1963, Oraevskii 1964). 在该类不稳定性中, 一对波被同时激发, 其频率之和是原始波频率的整数倍. 对于毛细波, 破坏不稳定产生得最快; 而对于重力波, 破坏不稳定产生得最慢. 第二类不稳定性是负压类型的不稳定性, 它是由于非线性波的波速依赖于振幅而产生的, 这导致波的调制率被无限放大. 当非线性波通过色散介质时, 如果色散关系对波数的二阶导数的符号与因非线性效应导致频率漂移的符号不同, 则会产生此类不稳定性. 正如 Litvak A N 和 Talanov V I (1967) 所提到的那样, 这类不稳定性已经在非线性电磁波中被独立发现.

中图分类号: O344　　**文献标识码**: A　　DOI: 10.6052/1000-0992-21-051

收稿日期: 2021-10-13; 录用日期: 2021-10-19; 在线出版日期: 2021-10-26

引用方式: Zakharov V E, 王展译, 卢东强校. 深水表面有限振幅周期波的稳定性. 力学进展, 2021, 51(4): 920-930

Zakharov V E, Wang Z trans, Lu D Q proof. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *Advances in Mechanics*, 2021, 51(4): 920-930

1　正则变量

考虑均匀重力场中无限深理想流体的有势流动，选择如下坐标系：xy平面与未受扰动的流体表面重合，而z轴则沿着远离该平面的方向. 在下文中，所有矢量均为xy平面中的二维矢量.

记$\eta(\boldsymbol{r},t)$为流体表面的波形函数，$\varPhi(\boldsymbol{r},z,t)$为速度势函数. 流体的流动可用 Laplace 方程描述

$$\Delta\varPhi+\frac{\partial^2\varPhi}{\partial z^2}=0 \tag{1.1}$$

在自由面上满足两个条件

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=\sqrt{1+\nabla\eta^2}\frac{\partial\varPhi}{\partial n}\bigg|_{z=\eta}=\frac{\partial\varPhi}{\partial z}-\nabla\eta\cdot\nabla\varPhi\bigg|_{z=\eta} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial\varPhi}{\partial t}+g\eta=-\frac{1}{2}(\nabla\varPhi)^2\Big|_{z=\eta}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varPhi}{\partial z}\right)^2\bigg|_{z=\eta}+\alpha\nabla\cdot\frac{\nabla\eta}{\sqrt{1+\nabla\eta^2}} \tag{1.3}$$

以及在无穷远处有条件

$$\varPhi\to 0,\quad z\to-\infty.$$

式中g为重力加速度，α为表面张力系数.

方程 (1.1) ~ (1.3) 满足流体的总能量守恒

$$E=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\int_{-\infty}^{\eta}\left[(\nabla\varPhi)^2+\left(\frac{\partial\varPhi}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}z+\frac{1}{2}g\int\eta^2\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\alpha\int\left(\sqrt{1+\nabla\eta^2}-1\right)\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{1.4}$$

式中，等号右边第一项为动能，第二项为重力势能，第三项为表面张力势能. 引入物理量$\varPsi(\boldsymbol{r},t)=\varPhi\left(z=\eta\left(\mathbf{r},t\right),\mathbf{r},t\right)$. 由于拉普拉斯方程的边值问题有唯一解，因此只需要两个物理量η与$\varPsi$即可以确定流体的流动. 考虑到

$$\frac{\partial\varPsi}{\partial t}=\frac{\partial\varPhi}{\partial t}+\frac{\partial\eta}{\partial t}\frac{\partial\varPhi}{\partial z}\bigg|_{z=\eta}$$

可得到

$$\frac{\partial\varPsi}{\partial t}+g\eta-\alpha\nabla\frac{\nabla\eta}{\sqrt{1+\nabla\eta^2}}=-\frac{1}{2}(\nabla\varPhi)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varPhi}{\partial z}\right)^2-\frac{\partial\varPhi}{\partial z}(\nabla\varPhi\cdot\nabla\eta)\bigg|_{z=\eta} \tag{1.5}$$

方程 (1.2) 和 (1.5)，连同拉普拉斯方程，等价于方程 (1.1) ~ (1.3). 可以证明方程 (1.1) 和 (1.5) 可以写

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{\delta E}{\delta\varPsi},\quad\frac{\partial\varPsi}{\partial t}=-\frac{\delta E}{\delta\eta} \tag{1.6}$$

式中E是能量，符号$\delta E/\delta\varPsi$和$\delta E/\delta\eta$表示变分导数.

首先考虑关于$\varPsi$的变分. 显然，势能对$\varPsi$的变分为0. 利用格林公式，动能可改写成

$$E^*=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\int_{-\infty}^{\eta}\mathrm{d}z\left[(\nabla\varPhi)^2+\left(\frac{\partial\varPhi}{\partial z}\right)^2\right]=\frac{1}{2}\int_s\varPsi\frac{\partial\varPhi}{\partial n}\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\int_s\varPsi\frac{\partial\varPhi}{\partial n}\sqrt{1+\nabla\eta^2}\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

式中$\mathrm{d}s$是面积微元，可以利用拉普拉斯方程边值问题的格林函数，将法向导数$\partial\varPhi/\partial n$与$\varPsi$联系起来

$$\frac{\partial\varPhi(s)}{\partial n}=\int G\left(s,s_1\right)\varPsi\left(s_1\right)\mathrm{d}s_1 \tag{1.7}$$

式中s和s_1是表面上的点. 格林函数G是对称的，即$G(s,s_1)=G(s_1,s)$.

动能的变分有两项

$$\delta E^{*}=\frac{1}{2}\int_{s}\left(\delta\Psi(s)\frac{\partial\Phi(s)}{\partial n}+\Psi(s)\frac{\partial}{\partial n}\delta\Phi(s)\right)\mathrm{d}s$$

根据式 (1.7) 和格林函数的对称性, 可以发现这两项是相等的

$$\delta E^{*}=\int_{\mathrm{s}}\delta\Psi(s)\frac{\partial\Phi(s)}{\partial n}\mathrm{d}s=\int_{\mathrm{s}}\delta\Psi(\mathbf{r})\frac{\partial\Phi}{\partial n}\sqrt{1+\nabla\eta^{2}}\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

由此立即得到式 (1.2).

现在考虑对η的变分 (这个简单的证明由 Garipov R M 给出) .

对势能做变分立即给出式 (1.5)①的左侧项. 动能的变分给出

$$\delta E^{*}=\frac{1}{2}\int\left[(\nabla\Phi)^{2}+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^{2}\right]\delta\eta(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\int_{-\infty}^{\eta}\left[(\nabla\Phi,\nabla\delta\Phi)+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\delta\Phi\right)\right]\mathrm{d}z,\quad\left(\delta\Phi=-\frac{\partial\Phi}{\partial z}\delta\eta\right)^{②}.$$

式中, $\delta\Phi$为边界的改变而引起的变分. 由于Φ满足拉普拉斯方程, 可以对第二个积分使用格林定理

$$\int d\boldsymbol{r}\int_{-\infty}^{\eta}\mathrm{d}z\ \left[(\nabla\Phi,\nabla\delta\Phi)+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\delta\Phi\right)\right]=\int\frac{\partial\Phi}{\partial n}\delta\Phi\mathrm{d}s=\int\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\nabla\eta\cdot\nabla\Phi\right)\frac{\partial\Phi}{\partial z}\bigg|_{z=n}\delta\eta(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

最后我们有

$$\delta E^{*}=\int\left[\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^{2}+(\nabla\eta\cdot\nabla\Phi)\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right]_{z=n}\delta\eta(r)\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

于是得到式 (1.5).

因此, 方程 (1.2) 和方程 (1.5) 是哈密顿方程, Ψ和η为正则变量, 其中Ψ为广义坐标, 而η为广义动量. 流体的能量E为哈密顿量.

为了使方程 (1.1) 和 (1.5) 封闭, 必须求解拉普拉斯方程的边值问题, 找到该问题关于η的幂级数形式的解. 如果对变量x和y作傅里叶变换

$$\eta(\boldsymbol{k})=\frac{1}{2\pi}\int\eta(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\mathrm{d}\boldsymbol{r},\quad\Psi(\boldsymbol{k})=\frac{1}{2\pi}\int\Psi(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

将得到更为合适的级数形式.

省略细节, 立即给出展开的结果 (展到二阶项)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{k},z)=&\mathrm{e}^{|\boldsymbol{k}|z}\left\{\Psi(\boldsymbol{k})+\int\Psi\left(\boldsymbol{k}_{1}\right)\eta\left(\boldsymbol{k}_{2}\right)\left|\boldsymbol{k}_{1}\right|\delta\left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_{1}-\boldsymbol{k}_{2}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{k}_{1}\mathrm{d}\boldsymbol{k}_{2}-\right.\\&\left.\frac{1}{2}\int\left[\left(\left|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_{3}\right|+\left|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_{2}\right|-|\boldsymbol{k}|\right)\left|\boldsymbol{k}_{1}\right|\Psi\left(\boldsymbol{k}_{1}\right)\eta\left(\boldsymbol{k}_{2}\right)\eta\left(\boldsymbol{k}_{3}\right)\delta\left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_{1}-\boldsymbol{k}_{2}-\boldsymbol{k}_{3}\right)\right]\mathrm{d}\boldsymbol{k}_{1}\mathrm{d}\boldsymbol{k}_{2}\mathrm{d}\boldsymbol{k}_{3}\right\}\end{aligned}\tag{1.8}$$

式中δ为狄拉克函数.

如果线性化式 (1.2) 和式 (1.5) 并仅考虑式 (1.8) 中的第一项, 将获得流体的小振幅表面波理论, 用于描述具备如下色散关系的波传播

$$\omega(\boldsymbol{k})=\sqrt{g|\boldsymbol{k}|+\alpha|\boldsymbol{k}|^{3}}$$

通过下面的方程实现到复变量的变换

---

① 译者注: 原文为式 (2.5), 应为式 (1.5).

② 译者注: 原文为$\delta\Phi=\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\delta\eta$, 应为$\delta\Phi=-\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\delta\eta$.

$$
\left.\begin{aligned}
\eta(\boldsymbol{r},t)&=\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\int\frac{|\boldsymbol{k}|^{1/2}}{\omega^{1/2}(\boldsymbol{k})}\left[a(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{kr})}+a^*(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{kr})}\right]\mathrm{d}\boldsymbol{k}\\
\Psi(\boldsymbol{r},t)&=-\frac{\mathrm{i}}{2\pi\sqrt{2}}\int\frac{\omega^{z/2}(\boldsymbol{k})}{|\boldsymbol{k}|^{1/2}}\left[a(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{kr})}-a^*(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{kr})}\right]\mathrm{d}\boldsymbol{k}
\end{aligned}\right\}\tag{1.9}
$$

于是

$$
\eta(\boldsymbol{k})=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{|\boldsymbol{k}|^{1/2}}{\omega^{1/2}(\boldsymbol{k})}\left[a(\boldsymbol{k})+a^*(-\boldsymbol{k})\right],\ \Psi(\boldsymbol{k})=-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\frac{\omega^{1/2}(\boldsymbol{k})}{|\boldsymbol{k}|^{1/2}}\left[a(\boldsymbol{k})-a^*(-\boldsymbol{k})\right]\tag{1.10}
$$

变换 (1.9) 可视为到变量$\mathrm{i}a^*(\boldsymbol{k})$和$a^*(\boldsymbol{k})$的正则变换 (带有复系数)；则哈密顿方程 (1.6) 变为单个方程

$$
\frac{\partial a(\boldsymbol{k})}{\partial t}=-\mathrm{i}\frac{\delta E}{\delta a^*(\boldsymbol{k})}
$$

利用方程 (1.4), (1.8) 和 (1.10), 可以将能量表示为关于$a(\boldsymbol{k})$和$a^*(\boldsymbol{k})$的级数形式

$$
\begin{aligned}
E=&\int\omega(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})a^*(\boldsymbol{k})\mathrm{d}\boldsymbol{k}+\int V(-\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)\left[a^*(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}_1)a(\boldsymbol{k}_2)+\right.\\
&\left.a(\boldsymbol{k})a^*(\boldsymbol{k}_1)a^*(\boldsymbol{k}_2)\right]\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)\mathrm{d}\boldsymbol{k}\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2+\\
&\frac{1}{3}\int V(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)\left[a^*(\boldsymbol{k})a^*(\boldsymbol{k}_1)a^*(\boldsymbol{k}_2)+a(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}_1)a(\boldsymbol{k}_2)\right]\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)\mathrm{d}\boldsymbol{k}\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2+\\
&\frac{1}{2}\int W(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)a^*(\boldsymbol{k})a^*(\boldsymbol{k}_1)a(\boldsymbol{k}_2)a(\boldsymbol{k}_3)\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_3)\mathrm{d}\boldsymbol{k}\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2\mathrm{d}\boldsymbol{k}_3
\end{aligned}\tag{1.11}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
V(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)=&\frac{1}{8\pi\sqrt{2}}\left\{\left[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_1)+|\boldsymbol{k}|\,|\boldsymbol{k}_1|\right]\left(\frac{\omega(\boldsymbol{k})\omega(\boldsymbol{k}_1)}{\omega(\boldsymbol{k}_2)}\right)^{1/2}\left[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_2)+|\boldsymbol{k}|\,|\boldsymbol{k}_2|\right]\times\right.\\
&\left.\left(\frac{\omega(\boldsymbol{k})\omega(\boldsymbol{k}_2)}{\omega(\boldsymbol{k}_1)}\right)^{1/2}\left(\frac{|\boldsymbol{k}_1|}{|\boldsymbol{k}|\,|\boldsymbol{k}_2|}\right)^{1/2}+\left[(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2)+|\boldsymbol{k}_1|\,|\boldsymbol{k}_2|\right]\left(\frac{\omega(\boldsymbol{k}_1)\omega(\boldsymbol{k}_2)}{\omega(\boldsymbol{k})}\right)^{1/2}\left(\frac{|\boldsymbol{k}|}{|\boldsymbol{k}_1|\,|\boldsymbol{k}_2|}\right)^{1/2}\right\}
\end{aligned}\tag{1.12}
$$

$$
\begin{aligned}
W(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)=&-\frac{3\alpha}{32\pi^3}\frac{(|\boldsymbol{k}|\,|\boldsymbol{k}_1|\,|\boldsymbol{k}_2|\,|\boldsymbol{k}_3|)^{1/2}}{[\omega(\boldsymbol{k})\omega(\boldsymbol{k}_1)\omega(\boldsymbol{k}_2)\omega(\boldsymbol{k}_3)]^1/2}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_1)(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{k}_3)+\frac{1}{16(2\pi)^2}(|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k}_1||\boldsymbol{k}_2||\boldsymbol{k}_3|)^{1/2}\times\\
&\left\{\left[\frac{\omega(\boldsymbol{k})\omega(\boldsymbol{k}_1)}{\omega(\boldsymbol{k}_2)\omega(\boldsymbol{k}_3)}\right]^{1/2}(2|\boldsymbol{k}|+2|\boldsymbol{k}_1|-|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_2|-|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_3|-|\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2|-|\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_3|)+\right.\\
&\left[\frac{\omega(\boldsymbol{k}_2)\omega(\boldsymbol{k}_3)}{\omega(\boldsymbol{k})\omega(\boldsymbol{k}_1)}\right]^{1/2}(2|\boldsymbol{k}_2|+2|\boldsymbol{k}_3|-|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_2|-|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_3|-|\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2|-|\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_3|)-\\
&\left[\frac{\omega(\boldsymbol{k}_1)\omega(\boldsymbol{k}_2)}{\omega(\boldsymbol{k})\omega(\boldsymbol{k}_3)}\right]^{1/2}(2|\boldsymbol{k}_1|+2|\boldsymbol{k}_2|-|\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_3|-|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_2|-|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1|-|\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_3|)-\\
&\left[\frac{\omega(\boldsymbol{k})\omega(\boldsymbol{k}_2)}{\omega(\boldsymbol{k}_1)\omega(\boldsymbol{k}_3)}\right]^{1/2}(2|\boldsymbol{k}_1|+2|\boldsymbol{k}_2|-|\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3|-|\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2|-|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1|-|\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}_3|)-\\
&\left[\frac{\omega(\boldsymbol{k})\omega(\boldsymbol{k}_3)}{\omega(\boldsymbol{k}_1)\omega(\boldsymbol{k}_2)}\right]^{1/2}(-|\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3|+2|\boldsymbol{k}|+2|\boldsymbol{k}_3|-|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1|-|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_3|-|\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}_2|)-\\
&\left.\left[\frac{\omega(\boldsymbol{k}_1)\omega(\boldsymbol{k}_3)}{\omega(\boldsymbol{k})\omega(\boldsymbol{k}_2)}\right]^{1/2}(2|\boldsymbol{k}_1|+2|\boldsymbol{k}_3|-|\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3|-|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_3|-|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_2|-|\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2|)\right\}
\end{aligned}\tag{1.13}
$$

式中还有关于其他的四阶项, 与$\alpha^*\alpha\alpha\alpha$和$\alpha\alpha\alpha\alpha$形式的乘积及其共轭成正比. 如第 3 节所示, 由于

这些项的贡献很小, 因此将会被忽略掉.

注意到函数V和W满足以下方程

$$\left.\begin{aligned}&V(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)=V(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_1)=V(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k})=V(-\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}_1,-\boldsymbol{k}_2)=V(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)\\&W(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)=W(\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)=W(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k}_2)\\&\qquad=W(\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1)=W(-\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}_1,-\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)=W(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)\end{aligned}\right\}\tag{1.14}$$

因此关于$a(\boldsymbol{k})$的方程具有如下形式

$$\begin{aligned}\frac{\partial a(\boldsymbol{k})}{\partial t}+\mathrm{i}\omega(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})=-\mathrm{i}\int\{&V(-\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)a(\boldsymbol{k}_1)\dot{a}(\boldsymbol{k}_2)\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)+\\&2V(-\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_2)a^*(\boldsymbol{k}_2)a(\boldsymbol{k}_1)\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)+\\&V(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)a^*(\boldsymbol{k}_1)a^*(\boldsymbol{k}_2)\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)\}\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2-\\&\mathrm{i}\int W(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_3)a^*(\boldsymbol{k}_1)a(\boldsymbol{k}_2)a(\boldsymbol{k}_3)\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2\mathrm{d}\boldsymbol{k}_3\end{aligned}\tag{1.15}$$

从式 (1.15) 中可以看出, $a(\boldsymbol{k})$是小振幅问题的正态变量.

2 简化方程

方程 (1.15) 是一个适用于弱非线性的近似方程. 粗略地讲, 该方程适用于$a/\lambda \ll 1$的情况, 其中a为波的特征振幅, λ为特征波长. 在这种近似中, 可以对方程 (1.12) 进行简化. 为此, 将$a(\boldsymbol{k})$写为

$$a(\boldsymbol{k})=[A(\boldsymbol{k},t)+f(\boldsymbol{k},t)]\exp[-\mathrm{i}\omega(\boldsymbol{k})t]\tag{2.1}$$

相比于f, 假设$A(\boldsymbol{k},t)$比变化缓慢, 且$f \ll A$. 将式 (2.1) 形式的$a(\boldsymbol{k})$代入, 得到关于f和A的方程. 对于f的方程, 仅保留A的二次项. 假设f变化时A保持为常数, 在时间域上积分该方程. 于是有

$$\begin{aligned}f=-\int\Bigg\{&V(-\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)\frac{\exp[\mathrm{i}t[\omega(\boldsymbol{k})-\omega(\boldsymbol{k}_1)-\omega(\boldsymbol{k}_2)]]}{\omega(\boldsymbol{k})-\omega(\boldsymbol{k}_1)-\omega(\boldsymbol{k}_2)}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)A(\boldsymbol{k}_1)A(\boldsymbol{k}_2)+\\&2V(-\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_2)\frac{\exp[\mathrm{i}t[\omega(\boldsymbol{k})+\omega(\boldsymbol{k}_1)-\omega(\boldsymbol{k}_2)]]}{\omega(\boldsymbol{k})+\omega(\boldsymbol{k}_1)-\omega(\boldsymbol{k}_2)}\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)A^*(\boldsymbol{k}_1)A(\boldsymbol{k}_2)+\\&V(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2)\frac{\exp[\mathrm{i}t[\omega(\boldsymbol{k})+\omega(\boldsymbol{k}_1)+\omega(\boldsymbol{k}_2)]]}{\omega(\boldsymbol{k})+\omega(\boldsymbol{k}_1)+\omega(\boldsymbol{k}_2)}\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)A^*(\boldsymbol{k}_1)A^*(\boldsymbol{k}_2)\}\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2\end{aligned}\tag{2.2}$$

在关于A的方程中, 仅保留与Af成比例的项, 这些项包含了变化最缓慢的指数项. 显然, 所有缓慢变化的指数都包含在与A^*AA成比例的那些项中. 收集这些项, 可得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial A(\boldsymbol{k})}{\partial t}=-\mathrm{i}\int&T(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_3)\cdot\\&\exp\mathrm{i}t[\omega(\boldsymbol{k})+\omega(\boldsymbol{k}_1)-\omega(\boldsymbol{k}_2)-\omega(\boldsymbol{k}_3)]A^*(\boldsymbol{k}_1)A(\boldsymbol{k}_2)A(\boldsymbol{k}_3)\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2\mathrm{d}\boldsymbol{k}_3\end{aligned}\tag{2.3}$$

其中

$$\begin{aligned}T(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)=-4&\frac{\omega(\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3)V(-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1)V(-\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)}{\omega^2(\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3)-[\omega(\boldsymbol{k}_2)+\omega(\boldsymbol{k}_3)]^2}-\\&4\frac{\omega(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_3)V(-\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_2)V(-\boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_3-\boldsymbol{k}_1)}{\omega^2(\boldsymbol{k}_3-\boldsymbol{k}_1)-[\omega(\boldsymbol{k}_3)-\omega(\boldsymbol{k}_1)]^2}-\\&4\frac{\omega(\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2)V(-\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_3,\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_3)V(-\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_1)}{\omega^2(\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_1)-[\omega(\boldsymbol{k}_1)-\omega(\boldsymbol{k}_2)]^2}+W(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3)\end{aligned}\tag{2.4}$$

显然, 哈密顿量 (1.11) 中忽略的那些项对式 (2.4) 没有贡献.

在使用式 (2.3) 时, 必须假设$f \ll A$. 为使这一条件成立, 式 (2.2) 和式 (2.4) 中的分母不为0是

必须的. 当方程

$$\omega(\boldsymbol{k})=\omega\left(\boldsymbol{k}_1\right)+\omega\left(\boldsymbol{k}_2\right), \quad \boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2 \tag{2.5}$$

有解时, 分母为 0.

如果该方程无解, 则方程 (2.4) 适用于a/λ充分小的情况, 但是如果该方程有解, 必须引入额外的限制条件.

如果$\omega(k)$是单调函数, 注意到方程 (2.5) 有解的一个充分条件是

$$\omega(\boldsymbol{k})>\omega\left(\boldsymbol{k}_1\right)+\omega\left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1\right) \tag{2.6}$$

其中$\boldsymbol{k}$和$\boldsymbol{k}_1$共线. 事实上, 如果式 (2.6) 成立, 可以通过把垂直于$\boldsymbol{k}$的$\boldsymbol{k}_1$分量添加到$\boldsymbol{k}_1$中, 放大方程 (2.6) 的右侧从而将其转化为等式. 另一方面, 如果与式 (2.6) 相反的不等式成立, 则该条件即为方程 (2.5) 无解的充分条件. 对于重力波, 有色散关系

$$\omega(\boldsymbol{k})=\sqrt{g|\boldsymbol{k}|}$$

此时与式 (2.6) 相反的不等式成立. 相应地, 式 (2.5) 无解并且小a/λ假设下的式 (2.3) 成立. 对于毛细波$\left[k \gg (g/\alpha)^{1/2}\right]$具有色散关系$\omega(\boldsymbol{k})=\sqrt{\alpha|\boldsymbol{k}|^3}$, 式 (2.6) 成立, 因此一般不能使用方程式 (2.3); 如果假设波包足够窄, 即对于$|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0| \ll \boldsymbol{k}_0$, $a(\boldsymbol{k})$非零, 则对于任意的$\omega(\boldsymbol{k})$, 方程 (2.5) 都不能成立. 因此, 如果波包很窄, 特别对于毛细波, 则方程 (2.6) 适用于任何色散关系.

假设波包很窄, 可进一步简化式 (2.3). 引入变量$\varkappa=k-k_0$, 并将$\omega(\boldsymbol{k})$展开为$\varkappa$的幂级数形式, 并保留到二阶项

$$\begin{gathered}\omega(k)=\omega(k_0)+\varkappa_x c+\frac{1}{2}\left(\lambda_{\|}\varkappa_x^2+\lambda_{\perp}\varkappa_y^2\right)\\ c=\left.\frac{\partial\omega}{\partial k}\right|_{k=k_0}, \lambda_{\|}=\left.\frac{\partial^3\omega}{\partial k^3}\right|_{k=k_0}, \lambda_{\perp}=\frac{c}{k_0}, D_{\alpha\beta}=\left.\frac{\partial^2\omega}{\partial k_\alpha \partial k_\beta}\right|_{k=k_0}\end{gathered}$$

式中$\varkappa_x$和$\varkappa_y$分别为向量$\varkappa$平行于$\boldsymbol{k}_0$和垂直于$\boldsymbol{k}_0$的投影; c是波的群速度: $\lambda_\perp$是张量$\boldsymbol{D}_{\alpha\beta}$的一个特征向量. 接下来, 将近似值$T\left(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}_3\right)$替换为$\mathrm{w}=T\left(\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}_0\right)$, 并引入变量

$$\left.\begin{array}{l}b(k)=A(k)\operatorname{expi}\left[\varkappa_x c+1/2\left(\lambda_{\|}\varkappa_x^2+\lambda_{\perp}\varkappa_y^2\right)\right]t\\ \dfrac{\partial b}{\partial t}+\mathrm{i}\left[\varkappa_x c+\left(1/2\lambda_{\|}\varkappa_x^2+1/2\lambda_{\perp}\varkappa_y^2\right)\right]b=\\ -\mathrm{i}w\displaystyle\int b^*\left(k_1\right)b\left(k_2\right)b\left(k_3\right)\delta\left(k+k_1-k_2-k_3\right)\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\mathrm{d}k_3\end{array}\right\} \tag{2.7}$$

注意到$\lambda_\perp$总是正的, 而对于$\boldsymbol{k}_0=\boldsymbol{k}_0^*$, $\lambda_\|$会消失

$$\boldsymbol{k}_0^*=\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}\right)^{1/2}\left(\frac{g}{\alpha}\right)^{1/2}\sim 0.4\left(\frac{g}{\alpha}\right)^{1/2}$$

对于$\mathrm{k}_0<\mathrm{k}_0^*$, $\lambda_\|$为负, 而对于$\mathrm{k}_0>\mathrm{k}_0^*$, $\lambda_\|$为正. 进行关于$\varkappa$的傅里叶逆变换

$$b(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\int b\left(\varkappa_x,\varkappa_y,l\right)\exp\left[-\mathrm{i}\left(x\varkappa_x+y\varkappa_y\right)\right]\mathrm{d}\varkappa_x\mathrm{d}\varkappa_y$$

这里的$\mathrm{b}\left(x,y,t\right)$是波包的包络线方程. 可得

$$\frac{\partial b}{\partial t}+c\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\lambda_{\|}\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}+\lambda_{\perp}\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}\right)=-\mathrm{i}w|b|^2 b. \tag{2.8}$$

为了进一步简化方程, 引入变量$\xi = x - ct$ (这相当于转换到一个以群速度移动的坐标系); 假设解仅依赖于t和$z = \xi\cos\alpha + y\sin\alpha$; 于是得到

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\varPsi}{\partial t} - \frac{\mathrm{i}\lambda}{2}\frac{\partial^2\varPsi}{\partial z^2} = -\mathrm{i}w|\varPsi|^2\varPsi;\\ &\lambda = \lambda_{\|}\cos^2\alpha + \lambda_{\perp}\sin^2\alpha\end{aligned} \tag{2.9}$$

方程 (2.3) 具有精确解

$$A(\boldsymbol{k}) = b_0\delta\left(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_0\right)\exp[-\mathrm{i}t\varOmega(\boldsymbol{k})], \quad \varOmega(\boldsymbol{k}) = w|b_0|^2 \tag{2.10}$$

式中b_0为任意常数. 对于变量η和$\varPsi$, 解式 (2.10) 具有如下形式

$$\begin{aligned}&\eta = a\cos(kx - \omega t), \quad \varPsi = a\sin(kx - \omega t)\\ &a = \frac{k^{1/2}}{\pi\sqrt{2}\omega^{4/2}(k)}|b_0|, \quad \omega = \omega(k) + \Omega(k)\end{aligned}$$

通过计算可以得到

$$\Omega(\boldsymbol{k}) = |b_0|^2\left[\frac{4V(-2\boldsymbol{k},\boldsymbol{k},\boldsymbol{k})^3}{4\omega^2(\boldsymbol{k}) - \omega^2(2\boldsymbol{k})} - W(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k},\boldsymbol{k},\boldsymbol{k})\right] = \omega(\boldsymbol{k})(ka)^2\left[\frac{1}{2}\frac{\omega^2(\boldsymbol{k})}{4\omega^2(\boldsymbol{k}) - \omega^2(2\boldsymbol{k})} + \frac{1}{4} - \frac{3\alpha|\boldsymbol{k}|^3}{16\omega(\boldsymbol{k})}\right] \tag{2.11}$$

在极限情况下, 对于k值较小时有$\Omega(k) = 1/2(ka)^2\omega(k)$, 这与 Stokes 在 1847 年获得的表达式一致. 因此, 解式 (2.9) 近似为一个有限振幅的周期波.

当

$$k = \left(\frac{a}{2g}\right)^{1/2}$$

频率的偏移变为无穷大; 对于k值较大时, 频率偏移为负值.

在极限情形$k \to \infty$下, 可得

$$\Omega(k) = -\frac{1}{16}(ka)^2\omega(k)$$

3 有限振幅波的稳定性

考虑在定常周期波背景下小扰动的发展. 寻找以下形式的$a(\boldsymbol{k})$

$$a(\boldsymbol{k}) = b_0\delta\left(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_0\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \alpha(\boldsymbol{k},t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \quad \omega = \omega\left(\boldsymbol{k}_0\right) + \Omega\left(\boldsymbol{k}_0\right) \tag{3.1}$$

假设α在如下不等式中足够小

$$\int|\alpha(\boldsymbol{k})|\mathrm{d}\boldsymbol{k} \ll |b_0|$$

现将方程 (1.15) 对$\alpha(\boldsymbol{k})$线性化. 为此仅考虑方程右侧随时间缓慢变化的项. 可得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\alpha(\boldsymbol{k})}{\partial t} = -2\mathrm{i}b_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma t}V\left(-\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}_0 - \boldsymbol{k}\right)\alpha^*\left(\boldsymbol{k}_0 - \boldsymbol{k}\right)\\ &\gamma = \omega(\boldsymbol{k}) + \omega\left(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_0\right) - \omega\left(\boldsymbol{k}_0\right) - \Omega\left(\boldsymbol{k}_0\right).\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

从式 (3.2) 中消去$\alpha^*(\boldsymbol{k}_0 - \boldsymbol{k})$, 可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma t}\frac{\partial \alpha(\boldsymbol{k})}{\partial t}\right)=\frac{8\pi\omega\left(\boldsymbol{k}_0\right)}{\left|\boldsymbol{k}_0\right|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma t}a^2 V\left(-\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0-\boldsymbol{k}\right)\alpha(\boldsymbol{k}) \tag{3.3}$$

方程 (3.3) 有以下形式的解

$$\alpha(\boldsymbol{k})=c\mathrm{e}^{qt},\quad q=1/2\mathrm{i}\gamma\pm\sqrt{\left|b_0\right|^2U^2\left(-\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0-\boldsymbol{k}\right)-1/4\gamma^2} \tag{3.4}$$

如果根号内的表达式为正, 则将会产生不稳定. 为了使对于任意小的b_0系统都会产生不稳定, 方程$\gamma=0$应当有一个解. 如果忽略了方程中的小量$\Omega\left(\boldsymbol{k}_0\right)$, 可得到方程组 (2.5). 如第二节中建立的那样, 该系统对于毛细波问题可解; 因此, 该类型的不稳定性会在毛细波中产生. 不稳定的波矢量集中在面$\omega(\boldsymbol{k})=\omega\left(\boldsymbol{k}_1\right)+\omega\left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1\right)$附近的薄层中, 其厚度与振幅成比例. 不稳定性的最大增量的量阶为$Req\sim(\boldsymbol{k}a)\omega(\boldsymbol{k})$.

对重力波而言, 这种类型的不稳定性是不存在的. 但是重力波可能会出现较为缓慢的不稳定. 将具有如下形式的$A(\boldsymbol{k})$代入方程 (2.3)

$$A(\boldsymbol{k})=b_0\delta\left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0\right)\mathrm{e}^{-i\Omega\left(\boldsymbol{k}_0\right)t}+\alpha(\boldsymbol{k},t)$$

如果对$\alpha(\boldsymbol{k})$线性化, 有

$$\frac{\partial \alpha(\boldsymbol{k})}{\partial t}=2T\left(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}\right)\left|b_0\right|^2\alpha(\boldsymbol{k})+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\Omega\left(\boldsymbol{k}_0\right)t}T\left(\boldsymbol{k},2\boldsymbol{k}_0-\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}_0\right)b_0^2\alpha^*\left(2\boldsymbol{k}_0-\boldsymbol{k}\right)$$

该式可以简化为式 (3.2) 形式的方程; 该方程存在一个与$\exp(qt)$成比例的解, 其中 q 为

$$\left.\begin{aligned}&q=1/2\mathrm{i}\delta\pm\sqrt{\left|b_0\right|^2T^2\left(\boldsymbol{k},2\boldsymbol{k}_0-\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}_0\right)-1/4\delta^2}\\&\delta=\omega(\boldsymbol{k})+\omega\left(2\boldsymbol{k}_0-\boldsymbol{k}\right)-2\omega\left(\boldsymbol{k}_0\right)+\\&\qquad 2\left|b_0\right|^2\left[T\left(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}\right)+T\left(2\boldsymbol{k}_0-\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}_0,2\boldsymbol{k}_0-\boldsymbol{k}\right)-T\left(\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}_0,\boldsymbol{k}_0\right)\right]\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

考虑第一种情况

$$\left|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0\right|\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}\gg\omega|b|^2 \tag{3.6}$$

与b^2成比例的项可从式 (3.5) 中舍弃. 对于任意小振幅, 存在不稳定性的条件是$\delta=0$, 该条件等价于下面方程解的存在性条件

$$2\omega(\boldsymbol{k})=\omega\left(\boldsymbol{k}_1\right)+\omega\left(\boldsymbol{k}_2\right),\quad 2\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2 \tag{3.7}$$

显然, 这些方程有解的一个充分条件为

$$\omega\left(\frac{\left(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2\right)}{2}\right)>\frac{\omega\left(\boldsymbol{k}_1\right)+\omega\left(\boldsymbol{k}_2\right)}{2} \tag{3.8}$$

其中式中向量$\boldsymbol{k}_1$与$\boldsymbol{k}_2$平行. 不等式 (3.8) 要求$\omega(\boldsymbol{k})$是上凸的. 对于重力波

$$\left[|\boldsymbol{k}|\ll\left(\frac{g}{\alpha}\right)^{1/2}\right]$$

该不等式必然成立.

相反地, 对于毛细波, 反向不等式成立, 表明该类型的不稳定性是不可能的.

方程 (3.7) 在$\boldsymbol{k}$空间中定义了一个面. 不稳定的波矢位于该面附近, 其厚与b^2成比例. 重力波不稳定性的最大增长率的量阶为

$$\gamma \sim (ka)^2 \omega(k)$$

存在与 n 的守恒律相对应的高阶不稳定性

$$n\omega(\boldsymbol{k}) = \omega(\boldsymbol{k}_1) + \omega(\boldsymbol{k}_2), \quad n\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2$$

这种不稳定性增长率的量阶为$\gamma \sim (ka)^n \omega(k)$.

以上这些不稳定性都可以称为破坏性的.

转而研究$|\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_0| \ll \boldsymbol{k}_0$情况下的不稳定性. 为了研究这种不稳定性, 我们直接使用方程 (3.3). 方程的解

$$b = b_0 \exp\left(-\mathrm{i}\omega_1 b_0|^2 t\right)$$

对应于一个有限的振幅.

寻找以下形式的解

$$\varPsi = \exp\left(-iw|b_0|^2 t\right)\left\{b_0 + \alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t + \varkappa_0 z} + \alpha^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t - \mathrm{i}\varkappa_0 z}\right\}, \varkappa_0 \ll \mathrm{k}_0.$$

对于ω有

$$\omega = \pm\sqrt{w|b_0|^2 \lambda \varkappa_0^2 + 1/4\lambda^3 \varkappa_0^4} \tag{3.9}$$

从式 (3.9) 可以看出, 如果$\omega\lambda < 0$, 则可能产生不稳定性, 但是只有足够小的波矢才会激发不稳定

$$\varkappa_0^2 < \frac{4\omega}{\lambda}|b_0|^2$$

考虑表面波在不同波数下的情况.

(1) 波数区间

$$k_0 < \sqrt{\sqrt{3/4} - 1}(g/\alpha)^{1/2}$$

其中$w > 0, \lambda_\perp > 0, \lambda_\| < 0$, 此时在$\varkappa_x - \varkappa_y$平面上不稳定的区域受限于不等式$0 < \left|\lambda_\| \varkappa_x^2 - \lambda_\perp \varkappa_y^2\right| < 4|b|^2 w$; 即该区域位于双曲线

$$4|b|^2 w = \lambda_\| \varkappa_x^z - \lambda_\perp \varkappa_y^2$$

及其渐近线之间.

(2) 波数区间

$$\sqrt{\sqrt{4/3} - 1}(g/\alpha)^{1/2} < k_0 < 1/\sqrt{2}(g/\alpha)^{1/2}$$

其中$w > 0, \lambda_\perp > 0, \lambda_\| > 0$, 此时不稳定性一般不可能产生.

(3) 毛细波区间

$$k_0 > 1/\sqrt{2}(g/\alpha)^{1/2}, \lambda_\perp > 0, \lambda_\| > 0, w < 0$$

不稳定的区域为椭圆内部

$$\lambda_\| \varkappa_x^2 + \lambda_\perp \varkappa_y^2 = 4|b|^2 w$$

可以对方程 (2.9) 作变量变换

$$\Psi = \sqrt{n} \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\lambda} \int v \mathrm{d}z\right]$$

方程 (2.9) 可化为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(nv) = 0 \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial z} = -w\lambda\frac{\partial n}{\partial z} + \frac{\lambda^2}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\sqrt{n} \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

这些方程与压力和密度具有绝热关系的气体动力学方程

$$P = \frac{w\lambda n^2}{2}$$

类似, 它们的区别在于毛细波包含了对z的三阶导数项. 如果考虑特征尺度为L的充分大尺度的运动, 则对于

$$\frac{1}{L} \ll \frac{2wn_0}{\lambda}$$

三阶导数项即可被忽略. 对于正压力$w\lambda > 0$, 方程 (3.10) 描述了波速为$\sqrt{w\lambda n_0}$的声波. 对于负压力, 此时声波的速度为虚数, 这意味着初始扰动会呈指数增长

$$v \sim \exp\left(t\sqrt{|w\lambda|n_0}\right)$$

由此, 得到了负压型不稳定性的情况.

注意到如果在式 (3.6) 中令$\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{k}_0$, 则式 (3.9) 可从负压不稳定性的增量得到. 因此, 负压不稳定性是重力波缓慢破坏不稳定性的极限情况.

感谢与 Ovsyannikov L V 和 Sagdeev R Z 收获颇丰的讨论.

参 考 文 献

Lamb H. 1964. Hydrodynamics[Russian translation]. OGIZ-ΩGostekhizdat.

Moiseev N N. 1960. Surface Waves (introduction) [in Russian]. Fizmatgiz.

Akhmanov S, Khokhlov R. 1964. Problems in Nonlinear Optics [in Russian], VINITI Akad. Nauk SSSR, Moscow.

Zakharov V E. 1965. A solvable model of weak turbulence. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, **6**: 10-6.

Oraevskii V, Sagdeev R. 1963. On the stability of steady longitudinal oscillations of a plasma. *Zh Tekh, Fiz*, 32.

Oraevskii V. 1964. The stability of nonlinear steady oscillations of a plasma. *Yadernyi sintez*, **4**: 263.

Litvak A, Talanov V. 1967. A parabolic equation for calculating the fields in dispersive nonlinear media. *Radiophysics and Quantum Electronics*, **10**: 296-302.

(中国科学院力学研究所　王展译　译自

Zakharov V E. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid.

Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 1968, 9: 190-194

上海大学　卢东强　校)

Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid

Zakharov V E

Abstract We study the stability of steady nonlinear waves on the surface of an infinitely deep fluid (Lamb 1964, Moiseev 1960). In section 1, the equations of hydrodynamics for an ideal fluid with a free surface are transformed to canonical variables: the shape of the surface $\eta(\boldsymbol{r}, t)$ and the hydrodynamic potential $\Psi(\boldsymbol{r}, t)$ at the surface are expressed in terms of these variables. By introducing canonical variables, we can consider the problem of the stability of surface waves as part of the more general problem of nonlinear waves in media with dispersion (Akhmanov 1964, Zakharov 1965). The resuits of the rest of the paper are also easily applicable to the general case. In section 2, using a method similar to van der Pohl's method, we obtain simplified equations describing nonlinear waves in the small amplitude approximation. These equations are particularly simple if we assume that the wave packet is narrow. The equations have an exact solution which approximates a periodic wave of finite amplitude. In section 3 we investigate the instability of periodic waves of finite amplitude. Instabilities of two types are found. The first type of instability is destructive instability, similar to the destructive instability of waves in a plasma (Oraevskii & Sagdeev 1963, Oraevskii 1964), In this type of instability, a pair of waves is simultaneously excited, the sum of the frequencies of which is a multiple of the frequency of the original wave. The most rapid destructive instability occurs for capillary waves and the slowest for gravitational waves. The second type of instability is the negative-pressure type, which arises because of the dependence of the nonlinear wave velocity on the amplitude; this results in an unbounded increase in the percentage modulation of the wave. This type of instability occurs for nonlinear waves through any media in which the sign of the second derivative in the dispersion law with respect to the wave number $(\mathrm{d}^2\omega/\mathrm{d}\boldsymbol{k}^2)$ is different from the sign of the frequency shift due to the nonlinearity. As announced by A. N. Litvak and V. I. Talanov (1967), this type of instability was independently observed for nonlinear electromagnetic waves.

Received: 13 October 2021; accepted: 19 October 2021; online: 26 October 2021