

# 连续-非连续数值分析课程建设规划

张一鸣<sup>1</sup>,王雪雅<sup>1</sup>,冯春<sup>2</sup>,丛俊余<sup>3</sup>

(1.河北工业大学 土木与交通学院,天津 300401;2.中国科学院力学研究所,北京 100190;

3.北京极道成然科技有限公司,北京 100085)

**摘要** 连续-非连续数值分析是一门拟建的土建类本科生/研究生课程,该课程理论与实践性兼备,涉及诸多力学、数学相关基础课程,包含课堂教学以及上机操作模块。课程以土木建筑和岩土工程中的连续-非连续问题为研究对象,以数值计算方法为手段,以培养学生将课程中获取的知识用于分析具体工程问题为目的。课程的建设不仅符合我国在中国智能建造 2035 背景下对于新一代土建类工科学生的培养目标,更契合我国目前在基础设施防灾减灾、能源开采、节能减排方面的长期重大需求。

**关键词** 土木工程;本科生/研究生课程;数值计算;防灾减灾;能源开采

中图分类号:G640

文献标志码:A

文章编号:2096-000X(2022)04-0100-04

**Abstract:** Continuous and Discontinuous Numerical Analysis is a proposed undergraduate graduate course in civil engineering. The course has both theory and practice, involving many basic courses related to mechanics and mathematics, including classroom teaching and computer operation modules. The course takes the continuous discontinuous problems in civil architecture and geotechnical engineering as the research object, takes the numerical calculation method as the means, and aims to train students to use the knowledge obtained in the course to analyze specific engineering problems. The construction of the course is not only in line with China's training objectives for a new generation of civil engineering students under the background of China's intelligent construction 2035, but also in line with China's long-term major needs in infrastructure disaster prevention and reduction, energy mining, energy conservation and emission reduction.

**Keywords:** civil engineering; undergraduate and graduate courses; numerical calculation; disaster prevention and mitigation; energy exploitation

在土木水利能源开采等多种工程实践中,连续-非连续过程是一类较为常见、较复杂且分析难度较大的工程问题,较为典型的包括:房屋结构长期服役后的微裂缝与宏观裂缝开展,大体积混凝土浇筑后的水化裂缝形成,页岩气开采过程中水力压裂缝网络形成等。在这些不同的工程中,非连续位移场的具体表现即裂缝扮演着不同的角色,在某些工程中裂缝会危害结构局部甚至整体的正常使用性能和长期耐久性,应研究如何预测、避免裂缝形成降低其危害,而在另一些石化能源采集相关的工程中,合适的裂缝网络可以显著提升油气开采效率,应分析如何通过有限资源促进、诱导裂缝形成从而降低成本,提高利润。

从数学角度来看,非连续意味着场函数的跳跃,在对应位置的场函数无法对空间求导,原有的偏微分控制方程已不适用于描述裂缝处的非连续场。同时,由于裂缝的动态扩展,不断进行移动边界重构又会造成严重计

算负担和复杂拓扑重构,数十年来很多顶尖学者持续地提出诸多针对性的新理论、新模型和新方法。因此,由于所关联工程问题的重要性和问题背后数学机理与数值算法上的复杂性,连续-非连续问题至今仍然是数值计算领域的前沿课题之一。

我国在传统土建类本科生及研究生的培养过程中,对于传统的工科三大力学即理论力学、材料力学和结构力学较为重视,很多高校更会在本科阶段就辅以弹性力学、塑性力学等进阶固体力学类课程,同时多数高校对于数值分析课程上机操作也有一定要求。这些既有课程为连续-非连续数值分析课程的开展创造了必要条件和基础铺垫,本课程的建立更符合递进式的人才培养规律,可以加深对既有知识的认识,同时让学生接触前沿问题,能够帮助学生深入领会数学、力学理论与工程实践的紧密联系,并通过上机操作解决具体工程问题,掌握分析方法、流程并撰写较为严谨的课题报告。

基金项目:2019年国家自然科学基金项目“基于裂面优化破裂单元法的岩体边坡水力耦合失稳机理研究”(NSFC 51809069)

作者简介:张一鸣(1984-),男,汉族,上海人,工学博士,教授,博士研究生导师,先进计算方法应用研究中心主任,研究方向为计算力学、岩土及隧道工程防灾减灾。

综上所述，笔者在本文中提出了连续-非连续数值分析课程的建设规划，梳理了课程所需要的背景知识，提出了主要授课内容，授课内容的逻辑路线，上机操作要点，小组任务计划以及课毕后的考试要素等。本文的论述过程中紧盯课程授课目标，强调授课内容逻辑，注重操作与实践，希望本文能对连续-非连续数值分析课程建设和最终落地做出贡献。

### 一、课程路径

如前所述，工程上的连续-非连续过程往往指代连续体从初始的连续状态逐渐进入非连续状态的较为完整的演化过程，即裂缝的萌生、扩展，甚至后期的分叉交错过程。而连续-非连续数值分析课程同样应依据该过程的时间发展顺序展开，需要包含多个过程中所涉及的理论、模型以及计算框架。若以关键词的形式给出本课程教授所涉及到的内容，那么课程所涉及的多数关键词，如图 1 所示。

本课程涉及的理论中，连续介质力学可由铺垫课程如弹性力学和塑性力学逐步展开，再次提供控制方程后即可直接过渡到损伤力学相关知识，损伤力学的理论部分与损伤度模型可同步讲授。接着加入讨论环节，深化理解后可展开至断裂力学，该部分内容应突出其与其他力学理论的差异，引入裂尖场的概念。近场动力学理论作为较新的理论，可由授课人选讲。至此，理论部分授课告一段落。

由于损伤力学与断裂力学都铺垫完成，下一步可展开讲授，将相场方法<sup>[1]</sup>作为结合损伤力学与断裂力学理

论的方法实例，并进一步引出富集有限元即通过引入额外自由度来增强有限元框架的理念。当富集类有限元介绍完成后，可较为顺畅地引入内嵌不连续方法(SDA)<sup>[2]</sup>，扩展有限元(XFEM)<sup>[3]</sup>以及数值流形方法(NMM)<sup>[4]</sup>作为其他富集类方法实例，同时在讲授这些方法的过程中逐渐引入粘聚力模型以及拉压剪耦合模型相关内容，无网格粒子类方法由于与近场动力学有一定关联性，可作为选讲内容。接着过渡到与岩石破坏关联紧密的单体效应并引出块体类计算框架，以非连续分析方法(DDA)<sup>[5]</sup>和显式离散元(DEM)<sup>[6]</sup>作为方法实例，最后引出有限离散元耦合方法，以基于广义拉格朗日方程的连续非连续单元法(CDEM)<sup>[7]</sup>为实例。如图 2 所示，标注了课程的整体讲授路线。

本文所建议的授课流程依循理论层进，强化模型与框架，同步展开方法实例的脉络。在展开实例后，结合上机操作，可让学生掌握方法的使用，即使内在运行机制尚未完全熟悉，仍然可为学生提供足够检索信息，让他们根据路线图返回寻找关键步骤。例如，当学生自觉对于相场方法缺少足够认识，可前退至断裂力学，损伤力学与损伤度，后进至富集类有限元搜寻相关概念知识并检索相关文献。另一方面，图 2 的所有实例化方法，都可在“连续-非连续光谱”<sup>[8]</sup>上找到近似位置，如图 3 所示。从该光谱的位置看，图 2 的路线是从连续模型出发，逐渐过渡到离散模型，即从光谱的左侧平滑过渡到右侧的过程，也如前所述，符合结构体的演化方向即时间发展顺序。

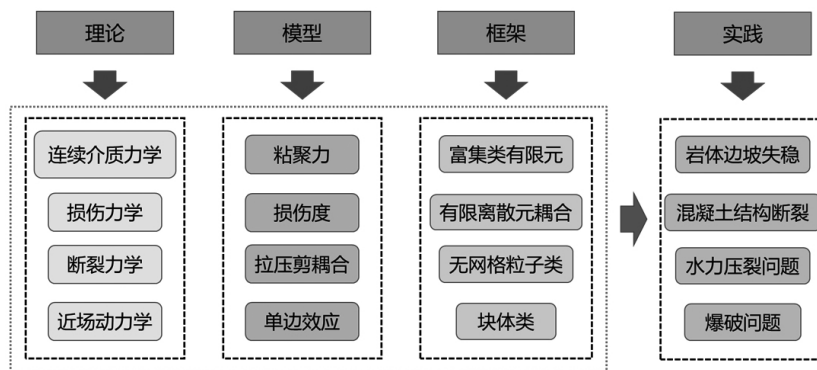


图 1 课程所涉及的关键词

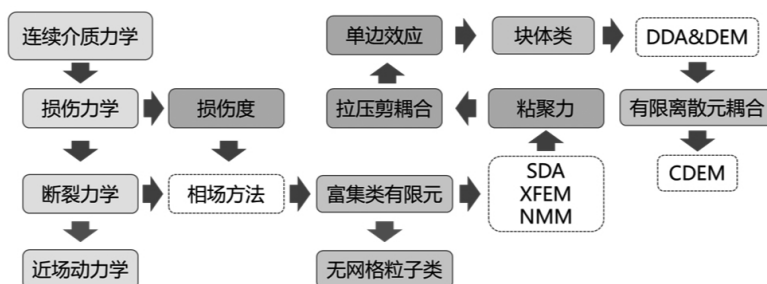
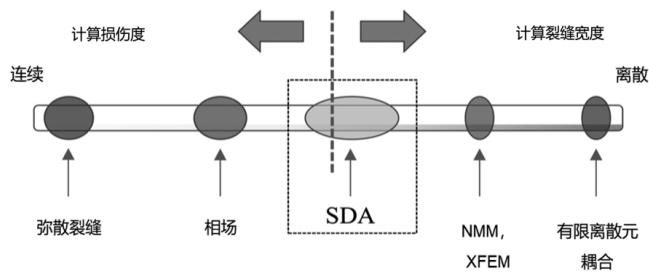


图 2 授课内容的逻辑路线

图3 连续-非连续光谱<sup>[8]</sup>

## 二、具体授课内容与比例

本课程授课内容较多,并且与其他课程有较强关联性,有必要对授课内容与课时比例展开规划。本课程如果为本科生课程,建议作为本科三年级下课程。若作为研究生课程,建议为硕士研究生课程,博士研究生由于专业背景差异较大,笔者认为不宜展开授课,可自学,建议总课时数不少于32课时。

课时分配建议:连续介质力学与数值计算方法理论2课时,损伤力学+损伤度模型2课时,断裂力学2课时,相场方法2课时;富集类有限元2课时,SDA, XFEM, NMM三类方法重点教授一类,讨论2类,并讨论粘聚力模型,共5课时,拉压剪耦合与单边效应模型讲授2课时,块体类模型结合DDA以及DEM讲授3课时,有限离散元耦合以及实例化的CDEM方法4课时。剩余8课时可抽取2课时选讲近场动力学与粒子类方法,剩余课时作为上机课程。本课程的开展基于学生已学习过工科三大力学并且对于弹性力学、塑性力学课程有一定了解的基础上,因此部分内容授课安排较为紧凑,后续部分笔者将进一步细化具体授课内容作为一般建议。

连续介质力学加数值计算章节,强化弹性力学偏微分控制方程及其弱形式概念,包括常见边界条件的类型、设置,介绍1至2种形函数后直接求解一个例题作为结束,建议求解一个二维的悬臂深梁或二维薄板拉伸算例,剖分为1至2个单元,直接以有限元形式手动求解,此算例即为基础算例,在后续引入多种理论、方法、模型后不断考虑不同条件与不同模型对该算例进行计算对比,不断深化学生认知。

损伤力学与损伤度模型章节,强化不可逆损伤度的概念,介绍1至2种损伤度本构和相关模型,辅以优化求解算法,继续以基础算例为例,可结合弥散裂缝等较为传统的计算模型,分析考虑损伤条件下的结构位移-荷载响应以及对应的应力-应变状态变化。

断裂力学章节,引入裂尖状态方程和应力强度因子等概念,如课时允许可同步介绍J积分等概念,在基础算例中引入一个裂尖,简单分析其裂尖状态、裂缝扩展

方向、扩展条件,提供解析解方程加深学生对断裂力学问题的理解。

相场方法章节,论述相场模型与传统的弥散裂缝模型、梯度损伤模型的异同,引入特征宽度和尺度不敏感相场模型(Unified Phase Field Method或Phase Field-Cohesive Zone Model)算例部分,由于相场模型存在网格相关性,即网格尺寸必须小于特征长度,因此无法对基础算例进行手动求解,需借用计算机辅助求解,通过在初始算例中加入缺陷,考虑多种网格与特征长度,观察局部损伤区(相场云图)的形成,此处的破坏仅考虑拉伸破坏。

富集类有限元与SDA、XFEM、NMM以及粘聚力模型章节可合并授课,其从相场模型出发,以引出富集策略,即引入额外自由度和对应的控制方程来拓展原有的有限元计算框架,从而提升其适用范围,基于不同方法对基础算例进一步展开研究,并与相场的计算结果作对比,同步观察上一章节的损伤区和本章节的离散裂缝发展过程,分析其异同。

拉压剪耦合与块体类计算框架可合并授课,由于拉压剪耦合问题有较强工程背景,可关联至岩土工程防灾减灾中涉及连续-非连续问题,本章节授课建议结合上机操作,可以岩石边坡稳定问题为工程背景,突出该问题中所涉及的岩石复杂破坏机理,展示DDA和DEM计算方法在这类问题中的计算结果和计算效率,从而讨论两者的优势与适用范围。

最后的授课内容为有限离散元耦合分析框架,结合CDEM计算程序章节合并授课,结合上机操作,进一步分析上一章节所讨论的岩石边坡问题,获得结果后与原始的DDA、DEM等计算结果作对比,讨论其结果差异、性能、优缺点等特征,明确其工程适用范围。

选讲内容即近场动力学与粒子类方法章节,可直接提供二维条件下近场格式的积分控制方程,以显示其与传统连续介质力学的差异,然后对基础算例进行计算分析,考虑不同颗粒密度,观察其损伤度演化过程,并与其他方法的计算结果和计算效率进行对比。

授课内容完成后,对整个授课内容进行梳理和总结,通过逻辑框图、性能、适用范围、结果特性对比表等多种方式提升学生的学习维度,提高他们对于连续-非连续问题的整体认识。

## 三、上机操作与考试考察

上机操作是本课程教学一大重点,通过分析具体算例使学生掌握部分数值计算软件操作流程、结果分析和报告撰写方法。目前,本课程所涉及的实例计算方法,大多数已有开源或商业软件提供支持,例如相场模型有开



源的 Abaqus 二次开发模块 ,Abaqus 自带幻影点法 (XFEM 变种)计算模型 ,LS-Dyna 支持近场动力学显式积分计算 ,SDA、XFEM 与 NMM 有开源的 C 以及 MATLAB 算法库 ,DDA 和 DEM 有成熟的开源算法库 ,包括高性能矩阵离散元 MatDEM 等强化支持 ,更有基于广义拉格朗日方法的全国产有限离散元耦合 GDEM 环境平台 Genvi 等计算套件。这些都为上机操作以及学生自主二次开发提供了便利。

上机操作总课时中 ,笔者建议相场可占 20% ,SDA、XFEM 和 NMM 可占 25% ,DDA 和 DEM 可占 20% ,剩余 35%上机课时可留给 CDEM 和选学内容 ,建议可进行多个案例的分析操作 ,这几个案例中岩体边坡失稳分析可通过 CDEM、DDA 和 DEM 进行分析 ,对比结果并撰写报告。第二个案例混凝土结构断裂可通过相场以及 SDA & XFEM & NMM 计算对比 ,第三个案例水力压裂建议通过 CDEM 方法和 XFEM 进行分析对比 ,测试不同边界条件对压裂区的影响。第四个案例爆破问题建议通过 CDEM、DEM 和近场动力学方法进行分析。

考虑到课程人数与课时限制 ,笔者建议以小组式案例分析模式来促进教学 ,即由学生组成 4 至 5 人研究小组 ,分组后表决选举组长 ,挑选具体案例 ,并对组员工作任务进行分配 ,尤其是涉及方法对比时 ,由组员根据自身兴趣进行选择 ,完成计算后展开集中讨论 ,并由组员相互辅导 ,从而保证每个组员都可以至少掌握一种方法 ,并了解其他方法。在结果分析阶段 ,应由组长收集组员的问题 ,组内讨论后由授课老师答疑 ,若有必要可开展班级讨论。然后以小组为单位完成书面工程报告 ,由组长进行答辩汇报 ,结合必要的现场演示 ,完善上机操作过程。

本课程考试考察可采用多种形式结合的方式 ,例如小组工程分析报告结合单人笔试测验 ,测验中重点考察相关概念 ,不同方法的区分 ,适用范围等知识 ,笔试测验以选择题、填空题和判断题为主。不宜过于侧重具体计算 ,但可适当考察上机操作过程中的计算流程 ,分析步骤等内容 ,例如由学生补充流程图中的关键环节等。

#### 四、结论与展望

在本文中 ,笔者提出了连续-非连续分析课程建设目标、建设要点、课程内容以及具体授课安排 ,可供相关

领域的专业人员参考。本课程除了理论性强 ,涉及的实例方法也较多 ,由于相关领域的进展较快 ,为了更好地反映学科发展 ,建议每年都对本文中所涉及的实例方法进行更新 ,每 2 年对实例化方法所涉及的上机操作软件进行更新。另一方面 ,交叉学科进一步融合成为目前工程前沿发展一大特色 ,以本课程为例 ,目前已有学者提出采用机器学习方法预测、计算机图形学加速模拟、全尺寸模型大规模混合云计算等各类较新颖的计算方法来分析研究连续-非连续问题 ,并取得了一定的成果。这些进展对于课程的未来建设和改进提出了新的要求和思路 ,相关内容的扩充将助力培养中国智造 2035 背景下的优秀土建类人才。

#### 参考文献:

- [1]J.-Y. Wu. A unified phase-field theory for the mechanics of damage and quasi-brittle failure [J].Journal of the Mechanics and Physics of Solids , 2017 ,103 :72-99.
- [2]Y. Zhang , R. Lackner , M. Zeiml , et al. Strong discontinuity embedded ap-proach with standard SOS formulation : Element formulation , energy-based crack-tracking strategy , and validations[J].Computer Methods in Applied Mechanics and En-gineering , 2015 ,287 : 335-366.
- [3]A. Combescure , A. Gravouil , D. Grégoire , et al. X-FEM a good candidate for energy conservation in simulation of brittle dynamic crack propagation [J].Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 2008 ,197 :309-318.
- [4]H. Fan , H. Zheng , S. He. S-R decomposition based numerical manifold method[J].Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , 2016 ,304 :452-478.
- [5]H. Zheng , P. Zhang ,X. Du.Dual form of discontinuous deformation analysis[J].Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , 2016 ,305 :196-216.
- [6]C. Liu , ed. , Matrix Discrete Element Analysis of Geological and Geotechnical Engi-neering[J].Springer Singapore , 2021.
- [7]C. Feng , S. Li , X. Liu , et al.A semi-spring and semi-edge combined contact model in cdem and its application to analysis of jiweis-han landslide [J]. Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engi-neering , 2014 ,6(1) :26-35.
- [8]Y. Zhang , Z. Gao , Y. Li , et al. On the crack opening and energy dissipation in a continuum based disconnected crack model[J].Finite Elements in Analysis and Design , 2020 :170.