

# 基于牛顿迭代算法的大型有面外支撑杆 X 撑结构的屈曲分析

康元顺<sup>1,2</sup>, 张伟为<sup>1,2</sup>, 刘梦娟<sup>1,2</sup>, 曾晓辉<sup>1,2</sup>

(1. 中国科学院力学研究所, 北京 100190; 2. 中国科学院大学, 北京 100049)

**摘要:** 本文从理论分析和数值计算的角度研究了一种有面外支撑的 X 支撑系统的稳定性问题, 提出了一种简单高效的计算方法, 这种 X 支撑的两条支撑对角线的交点处连接了一个面外撑杆(图 1)。我们考虑了有面外撑杆的非对称交叉支撑体系在一般情况下的弹性屈曲, 即不同长度、截面和载荷的连续对角, 面外撑杆与 X 支撑平面可以有不同角度, 并且 X 支撑的交叉点不固定在跨中。首先, 建立了两端固接的双跨受压杆件(图 1 中的 AB 杆)跨中任意线弹性的特征值矩阵, 利用迭代算法进行屈曲载荷计算, 详述了新型 X 支撑系统的屈曲荷载理论计算方法, 得到了两端固结的受压杆件跨中任意线弹性的屈曲载荷(屈曲长度系数)与无量纲弹簧刚度之间的关系。推导了两端固接的双跨受拉(压)杆件跨中任意位置处的转角刚度计算公式, 并通过数值计算讨论了不同受力形式转角刚度对 X 支撑的屈曲长度系数的影响, 阐释了在实际结构中转角刚度对屈曲载荷的影响可忽略。然后进行比例加载屈曲分析, 分析的目的是建立受压杆件的有效长度因子与压缩杆件和拉伸杆件的力比之间的关系。得到了任意位置处的非对称交叉支撑系统有效长度因子的数值解, 并通过已有文献的退化结果验证了其有效性。

**关键词:** 有面外支撑的 X 支撑系统; 任意线弹性; 屈曲分析; 数值计算; 有效长度系数

## BUCKLING ANALYSIS OF A LARGE X-SUPPORTED STRUCTURE WITH OUT-OF-PLANE BRACES BASED ON NEWTON'S ITERATION

KANG Yuan-shun<sup>1,2</sup>, ZHANG Wei-wei<sup>1,2</sup>, LIU Meng-juan<sup>1,2</sup>, ZENG Xiao-hui<sup>1,2</sup>

(1. Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190; 2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049)

**Abstract:** This paper studies the stability of an X-brace system with out-of-plane support from the perspectives of theoretical analysis and numerical calculation, and proposes a simple and efficient calculation method. An out-of-plane brace is connected at the intersection of the two diagonals of the X-brace (Figure 1). We considered the elastic buckling of an asymmetric cross bracing system with out-of-plane struts in general, that is, continuous diagonals of different lengths, sections and loads. Out-of-plane struts and X\_brace planes can have different angles, and the intersection point of the X\_brace is not fixed in the middle of the span. First, the eigenvalue matrix of any linear elasticity in the middle of the double-span compression member (the AB in Fig. 1) fixed at both ends is established, the buckling load is calculated by an iterative algorithm, and the buckling of the new X-brace system is described in detail. The relationship between the arbitrary linear elastic buckling load (buckling length coefficient) and the non-dimensional spring stiffness in the middle of the span of the compression member

基金项目: 国家自然科学基金(11672306)

通讯作者: 曾晓辉(1972—), 男, 湖南人, 研究员, 博士生导师, 主要从事结构动力响应、稳定性和流固耦合领域(E-mail: zzh@imech.ac.cn).

作者简介: 康元顺(1997—), 男, 贵州人, 硕士生, 主要从事工程力学研究;

张伟为(1996—), 男, 江苏人, 博士生, 主要从事工程力学研究;

刘梦娟(1998—), 女, 河南人, 硕士生, 主要从事工程力学研究.

fixed at both ends is obtained. The calculation formula for the corner stiffness of a double-span tension (compression) member fixed at both ends is deduced at any position in the span, and the influence of the corner stiffness of different force forms on the buckling length coefficient of the X-brace is discussed through numerical calculation. In the actual structure, the influence of the corner stiffness on the buckling load is negligible. Then carry out proportional load buckling analysis. The purpose of the analysis is to establish the relationship between the effective length factor of the compression member and the force ratio of the compression member and the tension member. The numerical solution of the effective length factor of the asymmetric cross bracing system at any position is obtained, and its effectiveness is verified by the degradation results of the existing literature.

**Key words:** X-brace system with out-of-plane support; arbitrary linear elasticity; buckling analysis; Numerical Calculations; effective length coefficient;

X 支撑体系是一种经济高效的支撑系统,通常用来抵抗海流、风和地震等侧向荷载,在海洋、桥梁、建筑工程等领域均受到应用。在侧向力作用下,X 支撑的两条支撑对角线通常分别承受拉力和压力。本文拟将对一种带有面外撑杆的 X 支撑进行理论和数值模拟,这种新型 X 支撑的两条支撑对角线的交点处连接了一个面外撑杆(图 1)。图 1 为两个对称的 X 支撑, $AB = A'B'$ , $CE = C'E'$ ,面外撑杆  $DD'$  垂直于  $ABCD$  平面,支撑对角线  $AB$  杆受压力作用, $CE$  杆受拉力作用,为计算方便,假设  $A'B'$  杆与  $C'E'$  杆未受外力作用。通过采用不同长度的连续对角线来考虑几何不对称性, $l_1 + l_2 \neq l'_1 + l'_2$ ,并且它们的交点未设置在中点, $l_1 \neq l_2 \neq l'_1 \neq l'_2$ 。受力的不对称由两支撑对角线的不同受力情况进行考虑, $|F| \neq |P|$ 。通过假设支撑对角线的弯曲刚度不一致考虑了材料的不对称, $E_1 I_1 \neq EI$ 。当  $AB$  发生面内屈曲( $yz$  平面)时,其破坏模式如图(2a)所示。而当  $AB$  发生面外屈曲( $xz$  平面)时,其破坏模式有两种可能,当张力对角线  $CE$  与面外支撑完全抵抗面外位移时,屈曲形状如图(2b)所示。当张力对角线  $CE$  与面外支撑不抵抗面外位移时,比如  $CE$  对角线受压时,屈曲形状如图(2c)所示。通常情况下,X 支撑的端部  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $E$  大都锚固在外框四周截面较大的角柱上,如果当角柱提供面外支撑刚度足够大时,其研究模型可以等效为梁端面外固接的交叉支撑模型(Wang et al,2011)。

相比于传统的 X 支撑来说,新型 X 支撑有着更优异的结构性能,无论反向的支撑对角线处于张力或者压缩中,都有面外撑杆作为支承。此时进行面外屈曲计算时,因为面外撑杆的存在,使得对称的两个 X 支撑可以联系在一起,为杆件的面外屈曲提供了转动约束和更多的平动约束,可以有效的提高杆件的屈曲荷载(Attia and Irheem,2016;Iwicki,2010)。

早期的研究(Trahair et al,2007;Sritawat et al,1986;Stoman,1989)主要研究了比较经典的交叉支撑系统,X 支撑有两个相同的支撑对角线,支撑对角线在跨中连接。通过采用 X 型支撑结构,可以减少支撑的长度。理论和实验研究表明,张力作用支撑能在支撑交点为压缩支撑提供有效的支撑。对于对称支撑结构,对于平面内和面外屈曲的铰接支撑,建议有效长度系数  $k$  取 0.5(Pichard and Denis,1988)。然而,在实际工程结构中,这种理想的结构并不常见,当框架面板为非矩形时,两支撑对角线可能具有不同的断面特性、长度和载荷(Wang,1993; Davaran et al,2015)。即支撑对角线可能不会在其跨中连接。例如,在海底导管架中,交叉支撑系统大多是单对称的,并且成对出现。因此,也有必要考虑一般有面外撑杆的非对称交叉支撑体系的平面屈曲特性。

近年来,也有许多学者针对不连续的 X 支撑系统进行了广泛研究,中心节点的间断会影响 X 支撑的屈曲荷载和有效长度系数,在 X 支撑体系的设计中应予以考虑(Yong CHEN et al,2019)。针对 X 支撑中一个支撑对角线是不连续,即在跨中是用螺栓进行连接。所以中心连接是部分固定或半刚性的,Davaran(2001)给出了跨中断压杆的屈曲长度与拉压比的解析解。Moon et al(2008)对支撑对角线不连续的交叉支撑系统进行分析,求解了弹性屈曲荷载的近似解,得到了不同截面特性和轴向荷载下的拉压对角线的有效长度因子。由此可见,X 支撑系统中边界条件对屈曲载荷的影响至关重要。

Libove et al(1966)提出了一种计算刚接头管状桁架中受压构件稳定度的近似方法,该方法以垂直平分受压构件的平面为对称。该研究发现,受压构件理论上可能在两个相互垂直的平面中的任意一个发生屈曲,并推导出了确定这些平面和每个平面的末端约束的公式。Murry et al(1957)建立了一种对三维模型桁架进行屈曲荷载计算的函数,是在只有弹性条件存在的情况下,结构发生屈曲的荷载。并将试验值与计算受压构件横向屈曲时桁架的临界荷载进行了比较。

确定 X 支撑的屈曲荷载已经有了许多比较成熟的研究。比如,对带有中间连接的对称 X 支撑体系的平面外屈曲荷载进行研究, Davaran(2001)给出了在铰节点或半刚性中间连接下的有效长度因子的封闭关系。Segal et al(1994)给出了端部任意弹性约束下的单跨受拉(压)杆件的屈曲长度系数的解析解,并推导和研究了具有端部铰接的偏心荷载交叉支撑的解析表达式,得出拉伸杆件的拉力对支撑体系的承载能力有很大贡献的结论。Moon et al(2008)对支撑对角线不连续的交叉支撑系统进行分析,求解了弹性屈曲荷载的近似解,得到了不同截面特性和轴向荷载下的拉压对角线的有效长度因子。Davaran and Hoveidae(2009)使用三维有限元模型研究了 X 支撑中间连接细节对支撑系统弹塑性行为的影响。Chen et al(2014)在复域内讨论了具有任意数量横向和转动子系统的均匀张拉梁的自由振动的一般精确解。虽然这些研究考虑了不对称的支撑对角线,但仍假设两条支撑对角线的连接点没有面外支撑,对新型 X 撑架的理论研究仍然不足。并且对于跨中存在一定转角约束的理论研究也未在已有研究成果中得到体现。

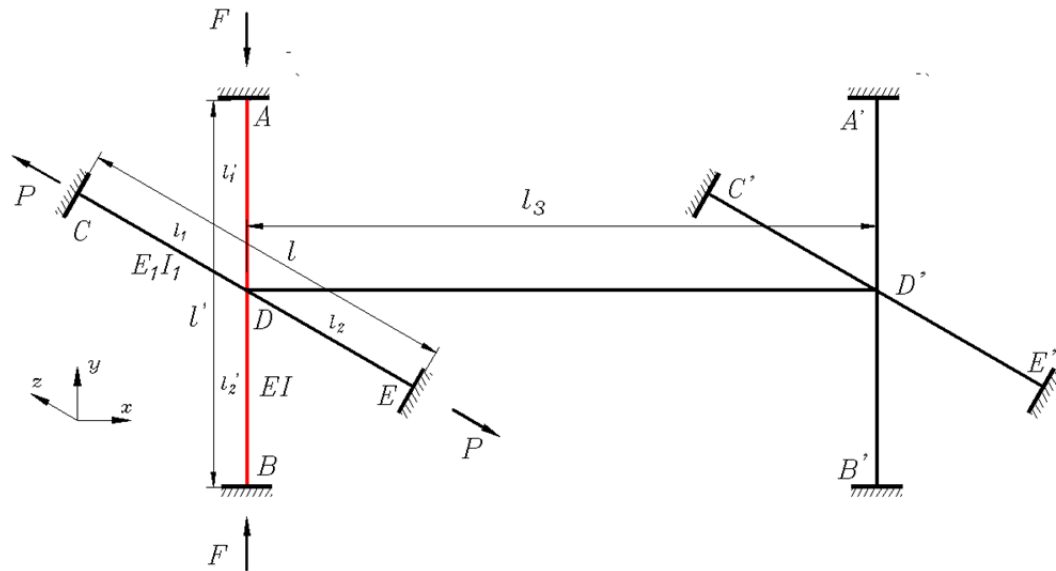


图1 带面外支撑的交叉系统

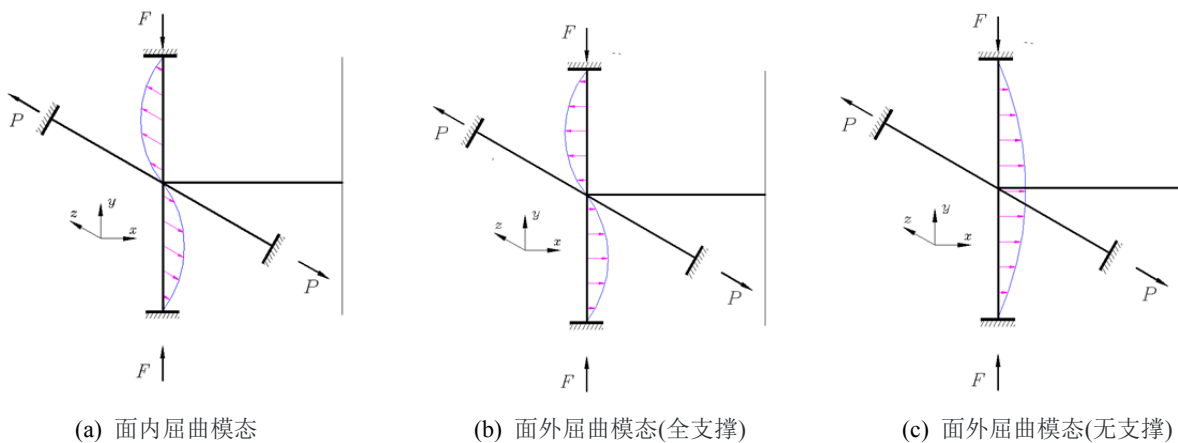


图2 压缩杆 AB 杆屈曲形状

在本研究中,我们考虑了有面外撑杆的非对称交叉支撑体系在一般情况下的弹性屈曲,即不同长度、截面刚度和载荷的连续对角,面外撑杆与 X 支撑平面可以有不同角度,并且 X 支撑的交叉点不固定在跨中。首先,建立了两端固接的双跨受压杆件(图 1 中的 AB 杆)跨中任意线弹性的特征值矩阵,详述了新型 X 支撑系统的屈曲荷载理论计算方法,并通过迭代算法求解屈曲荷载,得到了两端固结的跨中任意线弹性的屈曲荷载(屈曲长度系数)与无量纲弹簧刚度之间的关系。推导了两端固接的双跨受拉(压)杆件跨中任意位置处的转角刚度计算公式,并通过数值计算讨论了不同受力形式转角刚度对 X 支撑的屈曲长度系数的影响。然后进行比例加载屈曲分析,分析的目的是建立受压杆件的有效长度因子与压缩杆和拉伸杆的力比之间的关系,得到任意位置处的非对称交叉支撑系统有效长度因子的数值解。并与已有的一些退化结果进行对比。

## 1 有面外撑杆的非对称连续对角屈曲荷载计算

在进行屈曲分析时,支撑对角线受到恒定轴力作用。因此,支撑对角线将在连接处提供恒定的横向刚度和转动刚度(Attia, 2019)。

在有面外支撑的 X 支撑系统中,通过 Libove 等人提出的屈曲平面判定准则,可知图 1 中 AB 杆只可能发生面内屈曲(yz 平面)和面外屈曲(xy 平面)两种情形。不失一般性,我们假设 AB 杆受压,CD 杆受拉。针对受压杆件 AB,可以建模为两端铰接的在交点处有横向弹性支撑与转动弹性支撑的计算模型。中间支撑的刚度 $K_D$ 和 $C_D$ 由拉伸杆件 CD 或面外支撑杆件提供。

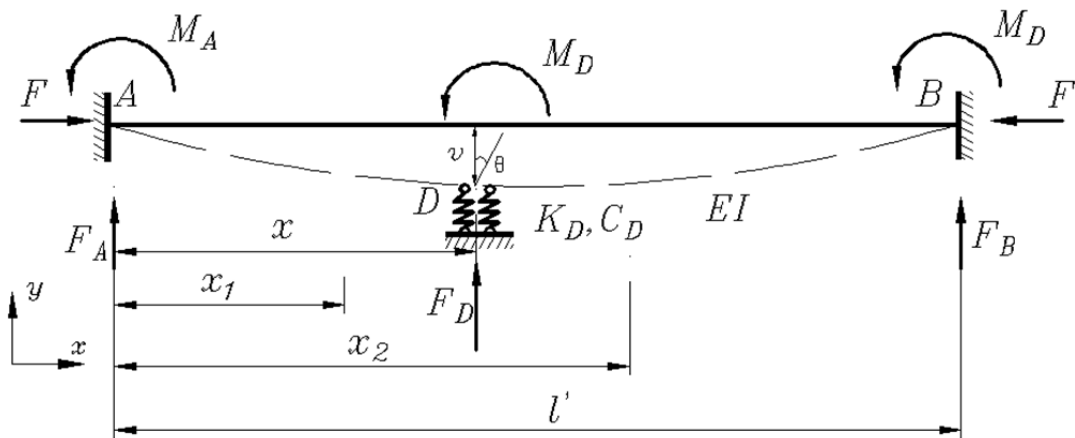


图 3 连续压缩杆件的分析模型

### 1.1 控制方程

基于图 3 建立的坐标系,在 AD 段,即  $0 \leq x_1 \leq x$  时,控制微分方程为:

$$EIw_1''(x_1) = F_A x_1 - Fw_1(x_1) - M_A$$

令  $\lambda'^2 = \frac{Fl'^2}{EI}$ , 则  $w_1(x_1)$  的通解为:

$$w_1(x_1) = a \cos\left(\frac{\lambda'}{l'} x_1\right) + b \sin\left(\frac{\lambda'}{l'} x_1\right) + \frac{F_A}{F} x_1 - \frac{M_A}{F} \quad (1)$$

转角方程:

$$w_1'(x_1) = -a \frac{\lambda'}{l'} \sin\left(\frac{\lambda'}{l'} x_1\right) + b \frac{\lambda'}{l'} \cos\left(\frac{\lambda'}{l'} x_1\right) + \frac{F_A}{F} \quad (2)$$

同理,在 DC 段,即  $x \leq x_2 \leq l$  时,挠曲线方程为:

$$w_2(x_2) = c \cos\left(\frac{\lambda'}{l'} x_2\right) + d \sin\left(\frac{\lambda'}{l'} x_2\right) - \frac{F_B}{F} x_2 + \frac{F_B l'}{F} + \frac{M_B}{F} \quad (3)$$

$$w_2'(x_2) = -c \frac{\lambda'}{l'} \sin\left(\frac{\lambda'}{l'} x_2\right) + d \frac{\lambda'}{l'} \cos\left(\frac{\lambda'}{l'} x_2\right) - \frac{F_B}{F} \quad (4)$$

代入变形边界条件, 在式(1)中令  $x_1 = 0$ , 得到压杆 A 处的变形满足:

$$a = \frac{M_A}{F} \quad (5)$$

$$bk + \frac{F_A}{F} = 0 \quad (6)$$

在式(3)中令  $x_2 = l'$ , 得到压杆 B 处的变形满足

$$c \cos(\lambda') + d \sin(\lambda') + \frac{M_B}{F} = 0 \quad (7)$$

$$c \frac{\lambda'}{l'} \cos(\lambda') + d \frac{\lambda'}{l'} \sin(\lambda') + \frac{F_B}{F} = 0 \quad (8)$$

压杆在 D 处变形连续, 故:

$$w_1(x) = w(x) = w_2(x); \quad w_1'(x) = w'(x) = w_2'(x)$$

在式(1)和式(2)中令  $x_1 = x$ , 得:

$$w(x) = a \cos\left(\frac{\lambda'}{l'} x\right) + b \sin\left(\frac{\lambda'}{l'} x\right) + \frac{F_A}{F} x - \frac{M_A}{F} \quad (9)$$

$$w'(x) = -a \frac{\lambda'}{l'} \sin\left(\frac{\lambda'}{l'} x\right) + b \frac{\lambda'}{l'} \cos\left(\frac{\lambda'}{l'} x\right) + \frac{F_A}{F} \quad (10)$$

上式中  $\alpha' = \frac{x}{l'}$ , 在式(3)和式(4)中令  $x_2 = x$ , 得:

$$w(x) = c \cos\left(\frac{\lambda'}{l'} x\right) + d \sin\left(\frac{\lambda'}{l'} x\right) - \frac{F_B}{F} x + \frac{F_B l'}{F} + \frac{M_B}{F} \quad (11)$$

$$w'(x) = -c \frac{\lambda'}{l'} \sin\left(\frac{\lambda'}{l'} x\right) + d \frac{\lambda'}{l'} \cos\left(\frac{\lambda'}{l'} x\right) - \frac{F_B}{F} \quad (12)$$

由静力平衡条件可知:

$$\frac{F_A}{F} + \frac{F_B}{F} + \frac{F_D}{F} = 0 \quad (13)$$

$$-\frac{F_A}{F} x + \frac{M_A}{F} + \frac{M_B}{F} + \frac{M_C}{F} + \frac{F_B}{F} (l-x) = 0 \quad (14)$$

交点处的变形应满足胡克定律:

$$\frac{F_D}{F} + \frac{K_D l'^2}{\lambda'^2 EI} w(x) = 0 \quad (15)$$

$$\frac{M_D}{F} + \frac{C_D l'^2}{\lambda'^2 EI} w'(x) = 0 \quad (16)$$

在上式中, 中间支撑的刚度系数  $K_D$  和  $C_D$  由拉伸杆件 CD 或面外支撑杆件提供。因此, 由式(5)-式(16)确定了一个关于 12 个初参数  $\frac{M_C}{F}$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $\frac{F_A}{F}$ 、 $\frac{F_B}{F}$ 、 $\frac{F_D}{F}$ 、 $\frac{M_A}{F}$ 、 $\frac{M_D}{F}$ 、 $\frac{M_B}{F}$ 、 $w(x)$ 、 $w'(x)$  的齐次线性方程组, 其有非零解的充要条件是方程组的系数行列式为零, 由此可得到临界压力的特征方程(17)。

$$\begin{vmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{\lambda'}{l'} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \cos(\alpha'\lambda') & \sin(\alpha'\lambda') & 0 & 0 & l'_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 -\frac{\lambda'}{l'}\sin(\alpha'\lambda') & \frac{\lambda'}{l'}\cos(\alpha'\lambda') & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & \cos(\alpha'\lambda') & \sin(\alpha'\lambda') & 0 & 0 & 0 & 0 & l-l'_1 & 1 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{\lambda'}{l'}\sin(\alpha'\lambda') & \frac{\lambda'}{l'}\cos(\alpha'\lambda') & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & \cos(\lambda') & \sin(\lambda') & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{\lambda'}{l'}\sin(\lambda') & \frac{\lambda'}{l'}\cos(\lambda') & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -l'_1 & 1 & 0 & 1 & l-l'_1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{K_D l'^2}{\lambda'^2 EI} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_D l'^2}{\lambda'^2 EI}
 \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$

刚度  $K_D$  和  $C_D$  由拉伸杆件 CD 或面外支撑杆件提供。定义了无量纲线刚度系数  $\beta = \frac{K_D l'}{F_0}$ ，这里，

$$F_0 = \frac{\pi^2 EI}{l'^2}。$$

不失一般性，对受压 AB 杆我们假设  $\frac{l'_1}{l'_2} \geq 1$ ，即只讨论  $\alpha' \geq 0.5$  的情况。同时认为  $\alpha' = \alpha$ ， $l' = l$ ，

$E_1 I_1 = EI$ ；可得到两端固接的跨中任意线弹性支撑的屈曲长度系数(或屈曲载荷)与无量纲线刚度系数的关系，如图 4 所示。可以看出，当  $\alpha' = 0.5$  时， $\beta_{cr} = 20$ 。并且随着  $\alpha'$  的增大，结构的临界屈曲载荷逐渐减小，屈曲长度系数逐渐增大。

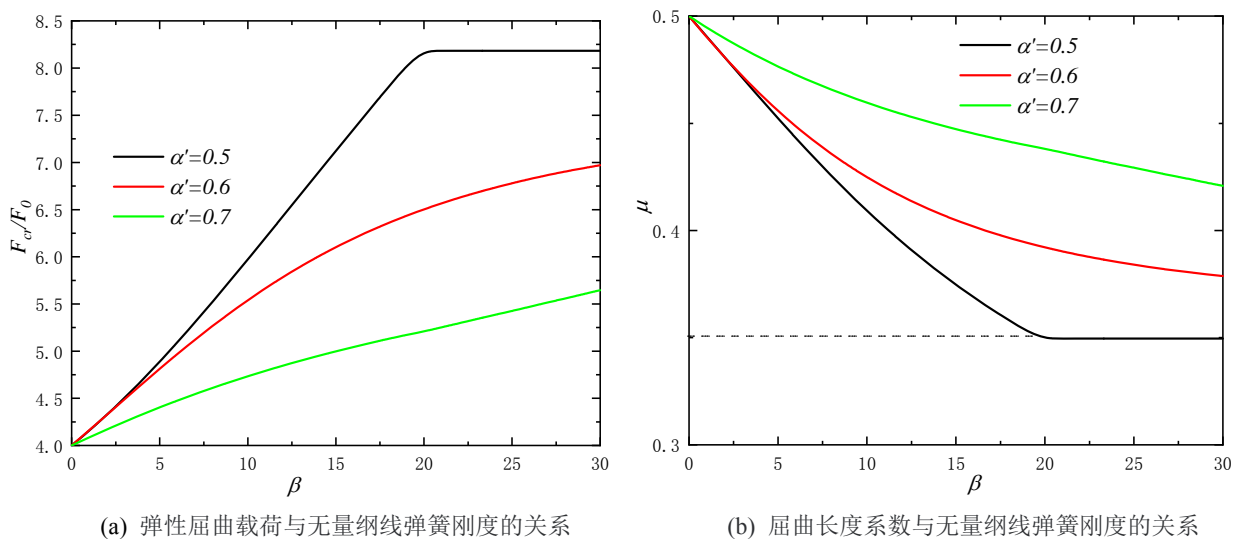
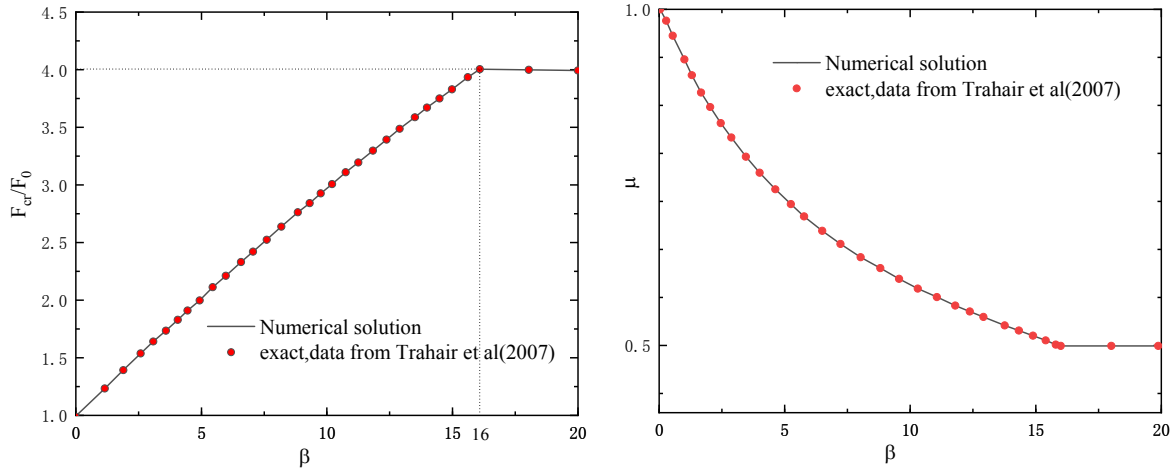


图 4 两端固接的中部弹性支撑压杆

特殊情况下,  $M_A = M_B = 0$ , 当  $\alpha' = 0.5$  时, 忽略转动约束, 即  $C_D = 0$ , 利用(17)式进行迭代, 与退化情况 Trahair et al(2007)的计算结果进行了对比, 如图 5 所示, 可以看出, 数值求解结果与理论计算结果有良好的一致性。

针对 X 支撑的屈曲分析, 我们将会在第三部分进行展开介绍。



(a) 弹性屈曲载荷与无量纲弹簧刚度的关系 (b) 屈曲长度系数与无量纲弹簧刚度的关系

图 5 两端铰接的中部弹性支撑压杆

## 1.2 线刚度计算

当 AB 杆发生面内(yz 平面)屈曲时, 线刚度由 CE 杆提供

$$K_D = \frac{E_1 A_1}{l} \quad (18)$$

当 AB 杆发生面外(xy 平面)屈曲时, 由 Chen et al(2019)的工作, 可知受拉(压)支撑对角线 CE 提供的线刚度为

$$k_1 = \frac{P\lambda \sinh(\lambda)}{l \left[ (1-\alpha)\alpha\lambda \sinh(\lambda) - \sinh(\lambda - \lambda\alpha) \sinh(\lambda\alpha) \right]} \quad (19)$$

此处  $\lambda^2 = \frac{Pl^2}{E_1 I_1}$ ,  $\alpha = \frac{l_1}{l}$

上式中, 当  $P=0$  时应该替换成下式

$$k_1 = \frac{3E_1 I_1}{\alpha^2 (1-\alpha)^2 l^3}$$

面外支撑的线刚度为由  $DD'$  与与 ABCD 对称的无外力 X 支撑共同提供

$$k_2 = k_{21} + k_{22} = \frac{3E_1 I_1}{l^3 (1-\alpha')^2} + \frac{3E_1 I_1}{l^3 (1-\alpha)^2}$$

$$k_3 = \frac{EA}{l}$$

$$k_4 = \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3}$$

所以, AB 杆发生面外屈曲时的总线刚度为

$$K_D = k_1 + k_4 \quad (20)$$

### 1.3 角刚度计算

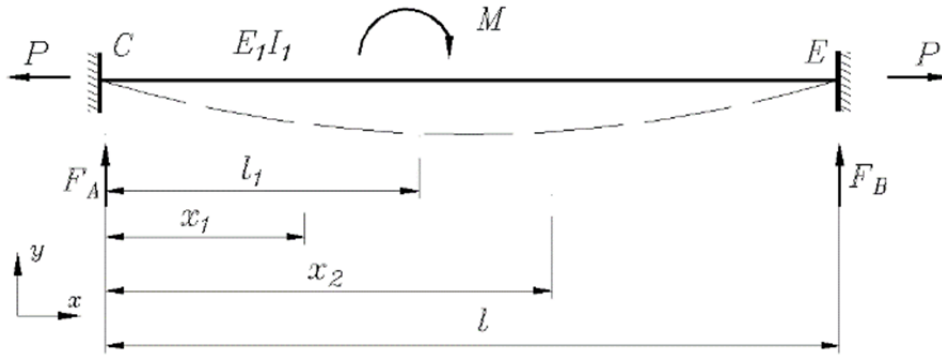


图6 转动刚度计算模型

当 AB 杆发生面内(yz 平面)屈曲时, 受拉杆件 CE 可通过对图 6 建立平衡微分方程, 通过推导得到 CE 杆提供的转动约束为:

$$\frac{Pl_1 \sinh(\lambda)}{\lambda \cosh(\alpha\lambda) \cosh(\alpha\lambda - \lambda) - \sinh(\lambda)} \quad (21)$$

上式中, 当  $P = 0$  时应转换成

$$C_D = \frac{4E_1 I_1 l}{l_1 (l - l_1)}$$

当 AB 杆发生面外(xy 平面)屈曲时,

$$C_D = \frac{3E_1 I_1}{l_1 (3 + (1 - \alpha)^3 + \alpha^3)} \quad (22)$$

定义无量纲角刚度系数为  $\eta = \frac{C_D}{F_0 l'}$ 。

## 2 屈曲分析

首先, 考虑了跨中转动约束的非对称交叉支撑系统有效长度因子的数值解; 分析的目的是建立受压对角线的有效长度因子与压缩对角线和拉伸对角线的力比之间的关系, 并且提出有效长度因子的经验公式。

当发生面内(yz 平面)屈曲, 此时  $K_D = \frac{EA}{l'} \gg K_{cr}$ , 因此可考虑转角刚度  $C_D$  对屈曲载荷的影响; 定义

无量纲转角刚度  $\eta = \frac{C_D}{F_0 l'}$  可得到  $\eta$  与屈曲载荷  $F_{cr} / F$  之间的关系, 这里只展示了  $\alpha' = 0.6$  的情况, 如下

图 7。从图中可以看出, 屈曲载荷的大小随  $\beta$  增大而增大, 随  $\eta / \beta$  增大而增大。而在实际结构中, 一般  $\frac{\eta}{\beta} < 0.1$ 。

此时转角刚度对结构屈曲的影响较小, 所以可以将其当做次要因素舍弃。

当发生面外(xy 平面)屈曲, 对 AB 杆进行面外屈曲分析时, 此时转角刚度为小量。因为面外支撑  $A'B'$  杆与  $C'E'$  杆不受外力作用, 故对应的的线刚度  $k_4$  为常数, 其等价问题为单独研究 AB 杆与 CE 杆的面外屈曲问题, CE 杆提供的线刚度由式(18)求得。特别地, 我们与 Ali Davaran et al(1993)所得的简化方法进行了对比。认为  $\alpha' = \alpha$ ,  $l' = l$ ,  $E_1 I_1 = EI$ ; 可得到两端固接的跨中任意线弹性支撑的屈曲长度系数(或屈曲载荷)与无量纲线拉力  $\delta = P / F_0$  与无量纲压力  $\xi = F / F_0$  之间的比值的比值的关系, 如图 8 所示。可以看出本计算方法与预测公式有较好的一致性。



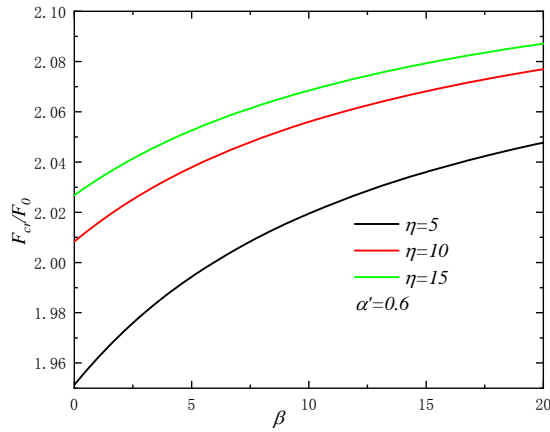


图7 临界屈曲载荷与无量纲线弹簧刚度的关系

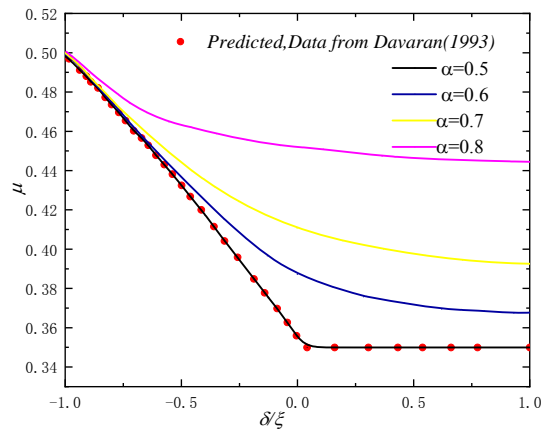


图8 临界屈曲长度系数与无量纲拉压比之间的关系

### 3 结论

本文从理论分析和数值计算的角度研究了一种新型 X 支撑系统的稳定性问题,提出了一种简单高效的计算方法。首先,建立了两端固接的双跨受压杆件跨中任意线弹性的特征值矩阵,利用迭代算法进行屈曲载荷计算,详述了新型 X 支撑系统的屈曲荷载理论计算方法。推导了两端固接的双跨受拉(压)杆件跨中任意位置处的转角刚度计算公式,并通过数值计算讨论了不同受力形式转角刚度对 X 支撑的屈曲长度系数的影响,得到了在实际结构中中线刚度与转角刚度的比值  $\frac{\eta}{\beta} < 0.1$ , 因此在进行屈曲分析时,可将转角刚度当做次要因素忽略。然后进行比例加载屈曲分析,分析的目的是建立受压杆件的有效长度因子与压缩杆件和拉伸杆件的力比之间的关系。得到了任意位置处的非对称交叉支撑系统有效长度因子的数值解,并通过已有文献的退化结果验证了其有效性。

#### 参考文献:

- [1] Yong-hai W. OUT-PLANE BUCKLING BEHAVIOR AND DESIGN METHOD OF AXIAL LOADED COLUMN IN THE CROSS-FRAME. ENGINEERING MECHANICS[J]. 2011.
- [2] Chen Y, Hu Z, Guo Y, Wang J, Dan H, Liu Q, et al. Ultimate bearing capacity of CHS X-joints stiffened with external ring stiffeners and gusset plates subjected to brace compression. Engineering Structures[J]. 2019;181:76-88
- [3] Attia WA, Irheem MMM. Boundary condition effect on response modification factor of X-braced steel frames. HBRC Journal[J]. 2019;14(1):104-21
- [4] Iwicki P. Sensitivity analysis of critical forces of trusses with side bracing. Journal of Constructional Steel Research[J]. 2010;66(7):923-30

- [5] Vacharajittiphan P, Trahair NS. Direct Stiffness Analysis of Lateral Buckling. *Journal of Structural Mechanics*[J]. 2007;3(2):107-37.
- [6] Finch SKaDL. STIFFNESS REQUIREMENTS FOR CROSS BRACING. *J Struct Eng*[J]. 1986;112:2702-2707.
- [7] Stoman SH. EFFECTIVE LENGTH SPECTRA FOR CROSS BRACINGS. *J Struct Eng*[J]. 1989;115:3112-3122
- [8] ANDRE PICARD AND DENIS BEAULIEU. Theoretical study of the buckling strength of compression members connected to coplanar tension members. *CANJCIENG*[C]. 1988;16, 249-257
- [9] V. Thevendran and C. M. Wang. STABILITY OF NONSYMMETRIC CROSS-BRACING SYSTEMS *J Struct Eng*[J]. 1993;119: 169-180
- [10] Ali Davaran et al. Inelastic Buckling Analysis of Steel X-Bracing with Bolted Single Shear Lap Connections. *J Struct Eng*[J]. 2015;04014204
- [11] Chen Y et al. Effective length factor of a non-symmetrical cross-bracing system with a discontinuous diagonal. *Journal of Zhejiang University-SCIENCE*[J]. 2019;20(8):590-600.
- [12] Davaran A. EFFECTIVE LENGTH FACTOR FOR DISCONTINUOUS X-BRACING SYSTEMS. *J Eng Mech*[J]. 2001;127:106-112
- [13] Moon J, Yoon K-Y, Han T-S, Lee H-E. Out-of-plane buckling and design of X-bracing systems with discontinuous diagonals. *Journal of Constructional Steel Research*[J]. 2008;64(3):285-94
- [14] Libove C. Buckling of a compression member in a rigid- joint truss. I - Equalend restraints. *Journal of Aircraft*[J]. 1966;3(4):347-53.
- [15] Murray NW. A METHOD OF DETERMINING AN APPROXIMATE VALUE OF THE CRITICAL LOADS AT WHICH LATERAL BUCKLING OCCURS IN RIGIDLY JOINTED TRUSSES UNIVERSITY OF IOWA LIBRARIES[M]. 1957;6209
- [16] Fred Segal et al. DESIGN OF IMPERFECT CROSS-BRACINGS *J Eng Mech*[J]. 1994;120:1057-1075
- [17] Davaran A, Hoveidae N. Effect of mid-connection detail on the behavior of x-bracing systems. *Journal of Constructional Steel Research*[J]. 2009;65(4):985-90
- [18] Chen Y, McFarland DM, Spencer BF, Bergman LA. Exact solution of free vibration of a uniform tensioned beam combined with both lateral and rotational linear sub-systems. *Journal of Sound and Vibration*[J]. 2015;341:206-