

基于扭摆的微冲量测量方法及实验研究¹⁾杨超^{*,†} 贺建武^{*} 章楚^{*} 康琦^{*,†,2)} 段俐^{*,†}^{*} (中国科学院力学研究所, 北京 100190)[†] (中国科学院大学工程科学学院, 北京 100049)

摘要 超高微重力水平的卫星平台在空间引力波探测、地球重力场测量中发挥着重要的作用, 脉冲微推力器可以帮助微重力卫星实现姿态控制. 微冲量是评价脉冲微推力器性能的重要指标之一, 常用的基于扭摆的微冲量测量方法有两种, 方法一是根据单个冲量元瞬间作用于无阻尼扭摆后, 扭摆转动最大角位移计算冲量, 方法二是根据高固定频率的连续脉冲作用于有阻尼扭摆后, 扭摆转动的平均角位移计算冲量. 为了在地面实现对脉冲微推力器的微冲量测量, 利用已有的基于扭摆的亚微牛级推力测量系统, 进行了实验研究. 利用静电梳齿产生的标准静电力标定已有的扭摆推力测量系统, 通过电容式位移传感器测量扭摆角位移, 进而得到推力与角位移的关系, 以及其他扭摆系统参数; 然后, 根据两种冲量测量方法, 再以电磁螺线圈与永磁体分别产生瞬时磁力与固定频率的磁力作用于扭摆, 研究推力测量系统微冲量测量性能. 实验结果表明: 使用方法一时, 推力测量系统冲量测量范围为 0.05 ~ 220 $\mu\text{N}\cdot\text{s}$, 分辨力可达到 0.02 $\mu\text{N}\cdot\text{s}$; 而利用方法二测量微冲量相比于方法一而言, 能够扩大冲量测量范围, 提高冲量分辨能力.

关键词 微重力, 扭摆, 脉冲微推力器, 微冲量测量, 推力测量系统

中图分类号: 439+.4 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-21-191

MICRO IMPULSE MEASUREMENT METHOD AND EXPERIMENTAL RESEARCH
BASED ON TORSION PENDULUM¹⁾Yang Chao^{*,†} He Jianwu^{*} Zhang Chu^{*} Kang Qi^{*,†,2)} Duan Li^{*,†}^{*} (Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)[†] (College of Engineering Science, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract Satellite platforms with ultra-high microgravity levels play an important role in space gravitational wave detection and Earth's gravitational field measurement. Pulsed micro-thrusters can help microgravity satellites achieve posture adjustment and control. The magnitude of the micro impulse is one of the important indicators to evaluate the propulsion performance of the pulsed micro thruster. There are two commonly used methods for measuring micro impulse based on torsion pendulum. The first method is to calculate the impulse based on the maximum angular displacement of the torsion pendulum after a single impulse element acts on the undamped torsion pendulum momentarily. The second method is to calculate the impulse based on the average angular displacement of the torsion pendulum rotation after the same high fixed frequency pulse is applied to the damped torsion pendulum. In order to

2021-05-06 收稿, 2021-09-18 录用, 2021-09-19 网络版发表.

1) 国家重点研发计划高精度推进器标定系统研制与性能测试技术研究 (2021YFC2202800) 和中国科学院战略性先导科技专项资助项目 (XDB23030300, XDA1502070901-01, XDA1502070503).

2) 康琦, 研究员, 主要研究方向: 微重力流体与空间引力波探测. E-mail: kq@imech.ac.cn

引用格式: 杨超, 贺建武, 章楚, 康琦, 段俐. 基于扭摆的微冲量测量方法及实验研究. 力学学报, 2022, 54(3): 669-677

Yang Chao, He Jianwu, Zhang Chu, Kang Qi, Duan Li. Micro impulse measurement method and experimental research based on torsion pendulum. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(3): 669-677

realize the micro-impulse measurement of the pulse micro-thruster on the ground, the existing sub-micron-level thrust measurement system based on the torsion pendulum was used to conduct experimental research. We use the standard electrostatic force generated by the electrostatic comb to calibrate the existing torsion pendulum thrust measurement system, measure the torsion angular displacement through the capacitive displacement sensor, and obtain the relationship between thrust and angular displacement, as well as other torsion pendulum system parameters; Then, according to the two impulse measurement methods, the electromagnetic solenoid and the permanent magnet are used to generate the instantaneous magnetic force and the fixed frequency magnetic force to act on the torsion pendulum to study the micro impulse measurement capability of the thrust measurement system. The experimental results show that the impulse measurement range of the thrust measurement system is from $0.05 \mu\text{N}\cdot\text{s}$ to $220 \mu\text{N}\cdot\text{s}$, and the impulse measurement resolution can reach $0.02 \mu\text{N}\cdot\text{s}$; Compared with method 1, using method 2 to measure micro-impulse can expand the impulse measurement range and improve the impulse resolution ability.

Key words microgravity, torsion pendulum, pulse micro thruster, micro impulse measurement, thrust measurement system

引言

2019 年 8 月 31 日,中国科学院空间科学(二期)战略性先导科技专项首发星,微重力技术实验卫星,也是我国首颗空间引力波探测技术实验卫星,在酒泉卫星发射中心成功发射.微重力技术实验卫星(后命名为“太极一号”)是以重大基础科学前沿涉及的关键技术验证为任务目标的技术验证星,对航天器平台高微重力水平控制技术以及空间超高精度测距技术进行在轨实验验证.“太极一号”的成功发射与第一阶段在轨测试任务顺利完成,迈出了我国空间引力波探测的第一步,为我国在空间引力波探测领域率先取得突破奠定了基础.脉冲宽度调制式冷气微推力器在“太极一号”姿态控制中起到关键作用.此外,近年来微纳卫星的快速发展,微纳卫星在空间轨道上精确编队飞行,协同工作、集群、星座以及轨道维持、姿态调整等任务都需依靠微推力器.除上述脉冲冷气微推力器外,脉冲等离子体推力器(pulsed plasma thruster, PPT)也是有着广阔的应用前景.PPT 因比冲高、体积小、质量轻、结构简单和耐用,以及所需星上电源功率小等优点,在微纳卫星研究领域得到了越来越多的重视^[1].脉冲式微推力器产生的冲量元一般从 $1 \mu\text{N}\cdot\text{s}$ 到百 $\mu\text{N}\cdot\text{s}$ ^[2] 不等,分辨力可达 $0.1 \mu\text{N}\cdot\text{s}$,这就对微推力器推力冲量的测量提出新的挑战.

国内外研究学者针对微冲量测量设计加工了多种测量装置,主要有悬丝扭摆^[3-5]与枢轴扭摆^[6-13]两种结构.枢轴扭摆结构相比于悬丝扭摆只有一个敏

感自由度,抗干扰能力强,应用更为广泛.常用的基于扭摆的微冲量测量方法有两种,方法一是根据单个冲量元瞬间作用于无阻尼扭摆后,扭摆转动最大角位移计算冲量^[3-11, 14-17];方法二是根据高固定频率的连续脉冲作用于有阻尼扭摆后,扭摆转动的平均角位移计算冲量^[10, 13, 18-21].在冲量测量的性能方面, Koizumi 等^[2]研制的推力测量装置已成功应用于液体工质 PPT 与二极管激光烧蚀微推进器的冲量测量,在两种推力器冲量测量中,测量装置的精度分别为 $2.1 \mu\text{N}\cdot\text{s}$ 和 $0.7 \mu\text{N}\cdot\text{s}$. Cubbin 等^[9]研制的推力测量装置可测冲量范围 $100 \mu\text{N}\cdot\text{s}$ 到 $10 \text{N}\cdot\text{s}$,测量误差小于 2%,并已应用于 PPT 冲量测量. Haag^[10]利用平均推力方法即方法二测得某一型号脉冲等离子体推力器冲量元为 $260 \mu\text{N}\cdot\text{s}$,由扭摆漂移带来的误差小于 1%.华中科技大学研制的悬丝扭摆推力测量装置推力测量范围达 $264 \mu\text{N}$,分辨力 $0.09 \mu\text{N}$,此外该推力台架最高可测 $1350 \mu\text{N}\cdot\text{s}$ 的冲量,分辨力为 $0.47 \mu\text{N}\cdot\text{s}$,测得用于中国 TEPO 航天任务的 PPT 的冲量元为 $58.4 \mu\text{N}\cdot\text{s}$,重复性约为 5%^[3-4].国防科学技术大学鲁高飞^[18]使用扭摆测得推力器在 20 J 和 11.25 J 放电能量下产生冲量分别为 $422.415 \mu\text{N}\cdot\text{s}$, $244.266 \mu\text{N}\cdot\text{s}$,相对误差分别为 1.28%, 2.05%;航天工程大学激光推进及其应用国家重点实验室针对脉冲激光推力器的微冲量测量进行了大量系统且深入的研究^[14, 22],研制的基于悬丝的水平扭摆冲量测量装置测量了激光与工质作用产生的微冲量,结果表明该测试系统分辨率为 $0.02 \mu\text{N}\cdot\text{s}$,量程为 $0.2 \sim 80 \mu\text{N}\cdot\text{s}$ ^[5];此外研制的枢轴扭摆测试台架理论推力测量范围达

609.6 μN , 分辨力 0.0244 μN , 利用平均推力测量方法, 以电磁螺线圈与永磁体作为激励器, 对微推力器进行仿真, 进一步研究了推力架的性能. 测试了具有相同振幅和脉冲宽度的 17, 33.5 和 55 Hz 的 3 组力脉冲, 各频率重复性误差分别为 7.04%, 1.78% 和 5.08%^[13].

研究团队在微推力器推力大小、分辨力、噪声测量方面进行了一系列研究^[23-25], 针对脉冲推力器的冲量测量, 本文工作采用常见的两种基于扭摆的冲量测量方法, 以电磁螺线圈与永磁体作为激励器, 对团队研制的亚微牛级推力测量系统微冲量测量能力进行评估, 以期服务于脉冲微推力器研制改进与性能评价.

1 推力测量系统

1.1 系统组成

推力测量系统主要包括推力测量装置、真空罐、电容式位移传感器、高精度电子天平、源表和电脑等硬件, 以及基于 Labview 的标准力产生与扭摆自标定软件、微推力标定软件, 系统组成如图 1 所示. 推力测量装置中的扭摆与底座光学平台通过枢轴连接, 平衡并固定. 推力器安装在扭摆的一侧, 另一侧安装了电容位移传感器, 同时通过位移限制装置保护传感器头免于扭摆的碰撞. 静电梳接地端安装在扭摆上, 而接高压端则安装在三维位移台上. 扭摆上为配重预留诸多螺丝孔, 配重根据实际需要添加. 磁阻尼装置则由 U 型铁和两个强磁块组成, 放置在扭摆右端前后侧. 枢轴正上方通过设计以金属液体作为桥接的通电导线, 避免了实际推力器测量中导线带来的扭矩干扰^[26], 同时设计供气软管道与枢轴同心, 尽可能降低气管带来的扭矩影响.

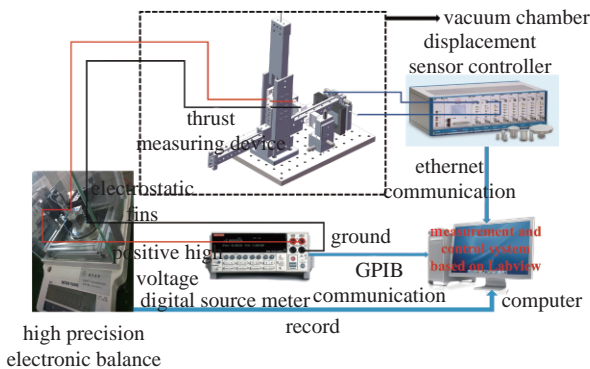


图 1 推力测量系统^[25]

Fig. 1 Thrust measurement system^[25]

1.2 推力测量原理

标准力产生装置原理图如图 2 所示, 静电梳由高压端与接地端两个梳齿组成. 在插入方向上, 其交叉齿间产生的静电力与输入电压的二次方具有良好的线性关系^[27-28]

$$F = N\varepsilon_0 V^2 (h/g) \quad (1)$$

其中 F 是静电力, 方向平行于静电梳齿, N 为静电梳齿齿对数, ε_0 为真空介电常数, V 是所加正高压, h 为静电梳宽度, g 为静电梳交叉齿间距.

通过高精度电子天平测量不同电压下静电力即标准力大小, 采用最小二乘法对电压平方和静电力做一次拟合, 得到两者之间的关系式为^[25]

$$F = Q_1 + Q_2 V^2 \quad (2)$$

其中, $Q_1 = -0.02439 \mu\text{N}$, $Q_2 = 0.001107 \mu\text{N}/\text{V}^2$, 均方差为 0.001 61.

相同规格的静电梳对也安装在推力测量装置上, 高压端由源表提供正电压, 与接地端产生标准静电力, 带动扭摆转动, 根据式 (2) 以及源表高压监测可得该力大小, 扭摆转动带来的位移由电容位移传感器测量; 结合标准力大小可得位移与标准力关系. 此后当推力器工作时, 推力可由位移和标准力关系式计算得出.

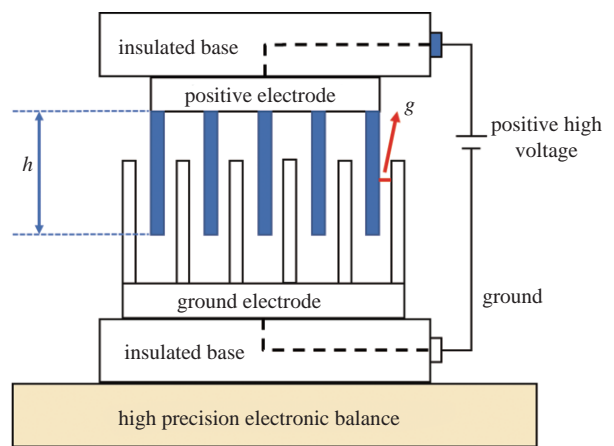


图 2 标准力产生装置原理

Fig. 2 Principle of standard force generating device

1.3 静态推力测量性能

如图 3 与图 4 所示, 经过优化, 该系统的推力分辨力达到 0.025 μN , 背景噪声在 1 mHz ~ 1 Hz 之间优于 0.1 $\mu\text{N}/\text{Hz}^{1/2}$. 具体标定方法可查阅文献 [25].

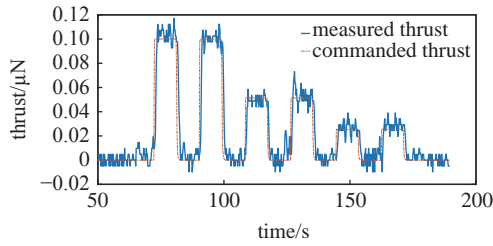


图 3 推力测量系统分辨率^[25]

Fig. 3 Resolution of thrust measurement system^[25]

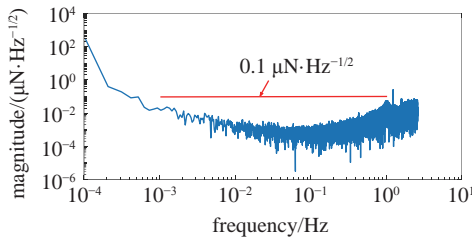


图 4 推力测量系统背景噪声^[25]

Fig. 4 Thrust measurement system background noise^[25]

2 微冲量测量方法

2.1 最大角位移测量冲量元

扭摆的运动方程可以表示为

$$J\ddot{\theta} + \lambda\dot{\theta} + k\theta = F(t)L \quad (3)$$

其中, J 为扭摆的转动惯量, θ 为扭摆的运动角位移, λ 为阻尼因子, k 为枢轴扭转系数, $F(t)$ 和 L 分别为作用在扭摆上的力与力臂长度.

为方便二阶方程的求解, 一般将其转换为如下形式^[16]

$$\ddot{\theta} + 2\zeta\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = F(t)L/J \quad (4)$$

ζ 为无量纲参数阻尼比, $\zeta = \lambda/(2\sqrt{kJ})$, $\omega_0 = \sqrt{k/J}$.

假设冲量作用时间极短的情况下, 扭摆运动为单自由度系统的有阻尼振动, 其运动方程如下

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta} + 2\zeta\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2\theta &= 0, \quad 0 \leq t \\ \theta(0) &= 0 \\ \dot{\theta}(0) &= \dot{\theta}_0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

此时, 由动量矩定理

$$IL = J\dot{\theta}_0 \quad (6)$$

得

$$I = \frac{J\omega_0}{L} e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}} \theta_{\max} \quad (7)$$

当阻尼比趋近于零时, 单个冲量元表达式为

$$I = \frac{J\omega_0}{L} \theta_{\max} \quad (8)$$

2.2 平均角位移测量冲量元

以固定的周期 T 对扭摆施加相同的单冲量元, 此时扭摆运动状态为单自由度系统的有阻尼受迫振动. 作用力矩 $M(t) = F(t)L = M(t + kT)$ ($T = 1, 2, \dots$), 满足狄利赫里条件, 进行傅里叶级数展开

$$\begin{aligned} M(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)] = \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T M(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T M(t) \cos(n\omega_1 t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T M(t) \sin(n\omega_1 t) dt \\ \omega_1 &= \frac{2\pi}{T} \\ A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \varphi_n &= -\arctan \frac{b_n}{a_n} \end{aligned}$$

将式 (9) 代入式 (4) 中, $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$ 初始条件下, 由 $\frac{A_0}{2}$ 带来的系统响应为

$$\theta_{A0} = \frac{A_0}{2k} \left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_0 t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_d t + \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) \right] \quad (10)$$

其中 $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$ 带来的系统响应为

$$\theta_n = X_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n - \theta_{1n}) + e^{-\zeta\omega_0 t} Y_n \sin(\omega_d t + \theta_{2n}) \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} \tan \theta_{1n} &= \frac{2\zeta n\omega_1/\omega_0}{1 - (n\omega_1/\omega_0)^2} \\ X_n &= \frac{A_n}{k \sqrt{[1 - (n\omega_1/\omega_0)^2]^2 + (2\zeta n\omega_1/\omega_0)^2}} \\ Y_n &= -X_n \sqrt{1 + \frac{[\zeta + (n\omega_1/\omega_0) \tan \theta_{1n}]^2}{1 - \zeta^2}} \cos \theta_{1n} \\ \tan \theta_{2n} &= \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta + (n\omega_1/\omega_0) \tan \theta_{1n}} \end{aligned}$$

则系统响应为^[13, 19]

$$\theta = \theta_{A0} + \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \quad (12)$$

有阻尼受迫振动由衰减振动与受迫振动合成, 衰减振动随时间增加很快衰减, 以后系统基本上按受迫振动的规律进行周期振动^[29]。在阻尼较大情况下, 即当 $\omega_1 \gg \omega_d$ 时, 最终扭摆在一固定位置以极微小振幅上下振动, 该位置记为

$$\bar{\theta} = \frac{A_0}{2k} = \frac{1}{2k} \frac{2}{T} \int_0^T F(t)Ldt = \frac{\bar{F}L}{k} \quad (13)$$

式中, \bar{F} 为平均推力, 结合单个冲量元表达式 $I = \int_0^T F(t)dt$, 代入式 (13), 此时单个冲量元表达式为

$$I \approx \bar{F}T = \frac{k\bar{\theta}T}{L} \quad (14)$$

3 微冲量测量实验

3.1 扭摆系统参数标定

进行微冲量测量前需要对扭摆系统参数 J, λ, k 进行标定。

利用静电梳, 对扭摆施加一已知大小的恒定推力 F , 该力力臂设为 R , 扭摆微小摆动, J, λ 和 k 为常数。扭摆的运动角位移 θ 在实际中难以测量, 常用位移传感器测量摆端位移再换算摆动角度, 在小角度下有

$$\theta \approx \text{tg}\theta = x/b \quad (15)$$

其中 x 是位移传感器测量的位移量, b 是传感器测量点到扭摆转动中心的长度, 于是式 (3) 可改写为

$$J\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F(t)Rb \quad (16)$$

扭摆振动在有阻尼情况下逐渐收敛稳定, 此时扭摆速度、加速度为 0, 根据式 (16) 得到扭转系数表达式为

$$k = FRb/x \quad (17)$$

同样利用静电梳对扭摆施加瞬时激励, 此后扭摆自由振荡, 通过对位移传感器测量的位移量进行频谱分析, 找到扭摆无阻尼振荡频率 f_0 和有阻尼振荡频率 f_d , 分别对应的角频率为

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \quad (18)$$

$$\omega_d = 2\pi f_d \quad (19)$$

则扭摆转动惯量为

$$J = k/(2\pi f_0)^2 \quad (20)$$

阻尼因子为

$$\lambda = 2J \sqrt{(2\pi f_0)^2 - (2\pi f_d)^2} \quad (21)$$

3.2 最大角位移测量冲量元实验

以电磁螺线圈与永磁体作为激励器, 对微推力器进行仿真, 与文献 [13] 永磁体固定于扭摆上不同的是, 如图 5 所示, 本实验中永磁体固定于扭摆外, 螺线圈则固定于扭摆之上, 电磁螺线圈与控制装置即函数发生器通过设计电极桥接装置连接, 从而避免导线带来的扭矩, 如此布局更符合脉冲推力器的测量实际。

利用函数发生器对电磁螺线圈输入恒定电压, 根据偏转位移与扭转系数 k 测得该电磁力大小约为 $36.65 \mu\text{N}$, 电磁力大小如图 6 所示。

取下永磁阻尼装置后, 调节函数发生器输出持续 3 ms 同一恒压, 扭摆自由转动, 根据测得的转动位移结合式 (8) 和式 (15) 计算该冲量元, 其表达式为

$$I' = \frac{J\omega_0 x_{\text{max}}}{Lb} \quad (22)$$

图 7 为测量结果。以扭摆最大位移计算测得该冲量大小为 $0.11 \mu\text{N}\cdot\text{s}$ 。

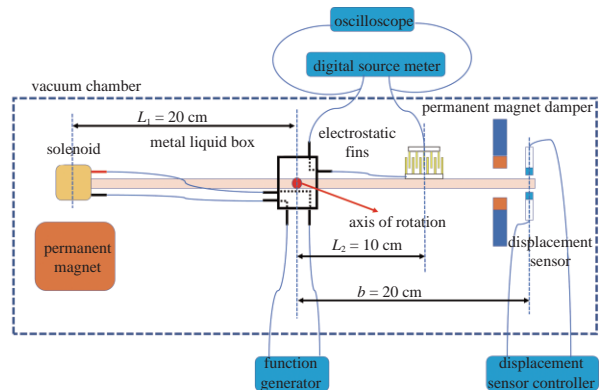


图 5 实验布局^[25]

Fig. 5 Experiment layout^[25]

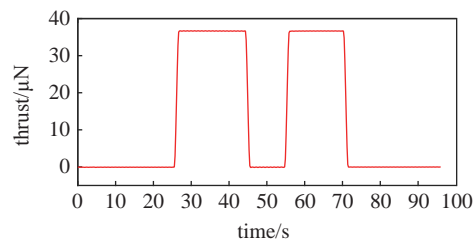


图 6 电磁力大小

Fig. 6 The magnitude of electromagnetic force

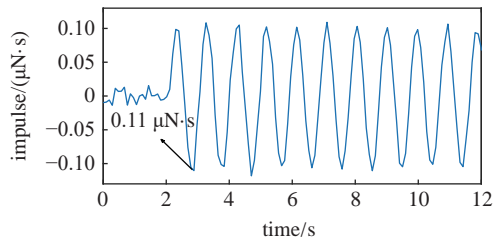


图 7 3 ms 冲量测量结果

Fig. 7 Three millisecond impulse measurement result

同一恒压持续时间改变成 300 ms. 此时测量结果如图 8 所示, 大小为 9.249 $\mu\text{N}\cdot\text{s}$, 与理论值 10.991 $\mu\text{N}\cdot\text{s}$ 相差甚远, 这是因为式 (8) 是基于冲量瞬间耦合且无阻尼两个假设建模得出, 300 ms 的冲量持续时间已不满足该假设, 仍以最大角位移测量冲量元, 导致测量误差增大, 将在第 5 节误差分析中进行系统误差分析.

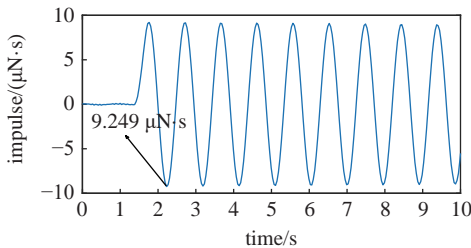


图 8 300 ms 冲量测量结果

Fig. 8 Three hundred milliseconds of impulse measurement result

若以该方法测量, 可测冲量分辨力、大小由测量位移的分辨力与量程决定, 考虑位移噪声影响, 本系统冲量测量范围为 0.05 ~ 220 $\mu\text{N}\cdot\text{s}$, 分辨力可达 0.02 $\mu\text{N}\cdot\text{s}$.

3.3 平均角位移测量冲量元实验

加上永磁阻尼装置后, 设置函数发生器输出波形为方波, 输出频率 1 kHz, 占空比从 10%, 以 10% 的台阶调节到 90%.

扭摆在高频电磁力作用下自由转动, 根据测得的转动位移结合式 (8) 和式 (15) 计算该冲量元, 其表达式为

$$I = \frac{k\bar{x}T}{Lb} \quad (23)$$

图 9 为 9 个台阶推力测量结果. 若以该方法测量, 由式 (23) 可知, 可测冲量分辨力、大小, 除了推力测量范围与分辨力外还与脉冲周期有关. 本系统的推力分辨力可达 0.025 μN , 最大推力测量可达 400 μN ^[25], 所以当该周期为 1 ms 时, 本系统冲量最

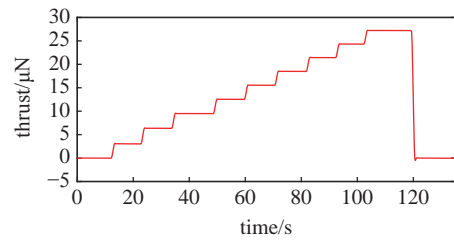


图 9 平均推力

Fig. 9 Average thrust

低可测 25 $\text{pN}\cdot\text{s}$ 的冲量, 分辨力可达 25 $\text{pN}\cdot\text{s}$. 周期为一秒时最高可测 400 $\mu\text{N}\cdot\text{s}$ 冲量, 分辨力为 25 $\text{nN}\cdot\text{s}$.

4 误差分析

4.1 最大角位移测量法误差分析

(1) 系统误差分析

实际测量中阻尼不可能完全不存在, 且冲量存在持续时间, 需要对阻尼以及冲量持续时间带来的误差进行分析.

阻尼带来的误差可表示为

$$\varepsilon = \frac{I-I'}{I} = 1 - \frac{1}{\exp\left(\frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)} \quad (24)$$

式中 ε 与 ζ 的关系如表 1 所示.

冲量存在持续时间带来的误差分析如下. 忽略阻尼影响, 当冲量非瞬间耦合, 在作用力持续时间 t_f 内, 扭摆的运动单自由度系统无阻尼受迫振动, 此后为无阻尼自由振动, 受迫振动阶段运动方程可表示为^[14]

$$\left. \begin{aligned} J\ddot{\theta} + k\theta &= f(t) * L, 0 \leq t \leq t_f \\ \theta(0) &= 0 \\ \dot{\theta}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

自由振动阶段为

表 1 误差与阻尼比的关系^[16]Table 1 The relationship between error and damping ratio^[16]

ζ	$\varepsilon / \%$
0.001	0.16
0.005	0.78
0.01	1.57
0.05	7.90
0.1	15.90

$$\left. \begin{aligned} J\ddot{\theta} + k\theta &= 0, t_f \leq t \\ \theta(t_f) &= \theta_f \\ \dot{\theta}(t_f) &= \dot{\theta}_f \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

通过数值模拟法来计算误差更为方便. 固定扭摆系统参数 J 和 k , 改变 t_f 大小, 根据数值解中最大偏转角 θ_{\max} 与式 (8) 得到冲量的数值解, 而实际冲量大小则为

$$I_0 = \int_0^{t_f} F(t)dt \quad (27)$$

引入无量纲参数: t_f/T_0 , 为冲量存在持续时间与扭摆自由振动周期之比, 以方波为例, 当此无量纲参数为 0.313 时, 时间取 4 s, 步长为 1/20000, 数值模拟结果如图 10 所示, 此时误差约为 15.35%.

表 2 为 t_f/T_0 与系统误差 ε 的关系.

(2) 测量误差分析

根据式 (1)、式 (2)、式 (15)、式 (17)、式 (18)、式 (20)、式 (22) 可得测量误差的传递关系

$$I' = \frac{J\omega_0 x_{\max}}{Lb} = \frac{k2\pi f_0 x_{\max}}{(2\pi f_0)^2 Lb} \quad (28)$$

$$(Q_1 + Q_2 V^2) \frac{T_0 * R * x_{\max}}{2\pi Lx}$$

相对误差则为

$$\frac{dI'}{I'} = \frac{d\left[(Q_1 + Q_2 V^2) \frac{T_0 R x_{\max}}{2\pi Lx}\right]}{(Q_1 + Q_2 V^2) \frac{T_0 R x_{\max}}{2\pi Lx}} =$$

$$\frac{dT_0}{T_0} + \frac{dR}{R} + \frac{dx_{\max}}{x_{\max}} - \frac{dL}{L} - \frac{dx}{x} + \frac{2VdV}{V^2 + Q_1/Q_2} \leq$$

$$\left| \frac{dT_0}{T_0} \right| + \left| \frac{dR}{R} \right| + \left| \frac{dx_{\max}}{x_{\max}} \right| + \left| \frac{dL}{L} \right| + \left| \frac{dx}{x} \right| + \left| \frac{2dV}{V} \right| \quad (29)$$

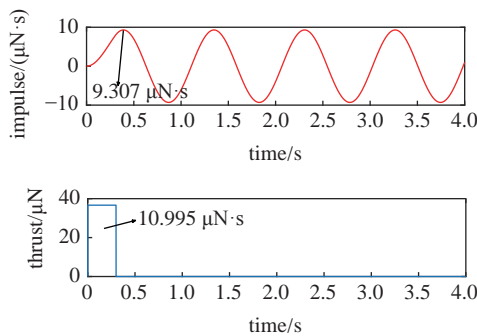


图 10 误差分析数值模拟结果
Fig. 10 Error analysis numerical simulation result

表 2 系统误差与 t_f/T_0 的关系

Table 2 The relationship between systematic error and t_f/T_0

t_f/T_0	$\varepsilon / \%$
0.005	0.00
0.05	0.01
0.15	3.65
0.2	6.44
0.3	14.16
0.5	36.28

源表为吉时利 2410 系列, 电压输出与测量精度可达 0.015%, 所以由电压测量带来的误差为 0.03%; 扭摆加工精度高, 力臂采用千分尺测量, 误差小于 0.20 mm, 由此对标准力臂与推力力臂造成的相对误差分别小于 0.20% 和 0.10%; 周期测量带来的误差小于 5 ms, 由此带来的相对误差小于 0.51%, 位移噪声约为 15 nm, 由此带来的绝对误差约为 0.025 $\mu\text{N}\cdot\text{s}$, 因此单冲量测量误差可表示为^[30]

$$I_{\text{measured}} = I_{\text{actual}} \pm (0.84\% I_{\text{actual}} + 0.025 \mu\text{N}\cdot\text{s})$$

4.2 平均角位移测量法误差分析

式 (24) 中的 \bar{x} 是在 $\omega_1 \gg \omega_0$ 情况下, 更为稳定, 而实验中可通过加强阻尼以及扭摆两边加配重, 满足 $\omega_1 \gg \omega_d$, 同时可通过数据滤波处理减小 \bar{x} 波动带来的误差.

根据式 (1)、式 (2)、式 (15)、式 (17)、式 (23) 可得测量误差的传递关系为

$$I = \frac{k\bar{x}T}{Lb} = \frac{FRbT\bar{x}/x}{Lb} =$$

$$(Q_1 + Q_2 V^2) \frac{RT\bar{x}}{Lx} \quad (30)$$

相对误差则为

$$\frac{dI}{I} = \frac{d\left[(Q_1 + Q_2 V^2) \frac{RT\bar{x}}{Lx}\right]}{(Q_1 + Q_2 V^2) \frac{RT\bar{x}}{Lx}} =$$

$$\frac{dR}{R} + \frac{d\bar{x}}{\bar{x}} - \frac{dL}{L} - \frac{dx}{x} + \frac{2VdV}{V^2 + Q_1/Q_2} \leq$$

$$\left| \frac{dR}{R} \right| + \left| \frac{d\bar{x}}{\bar{x}} \right| + \left| \frac{dL}{L} \right| + \left| \frac{dx}{x} \right| + \left| \frac{2dV}{V} \right| \quad (31)$$

在忽略位移噪声对推力测量影响的前提下, 结合第 5.1 节的分析, 相对测量误差小于 0.33%.

5 结论

本文针对超高水平空间微重力平台建设中用到的脉冲型微推力器的冲量测量需求, 根据两种基于扭摆的微冲量测量的方法: 分别通过单一冲量元与连续冲量元作用于扭摆后的最大和平均角位移测量冲量, 利用已有的微推力测量系统, 以电磁螺线圈与永磁体作为激励器, 进行了实验, 对本系统的微冲量测量能力进行评估, 得出以下结论。

(1) 单个冲量元瞬间作用于无阻尼扭摆后, 通过扭摆转动最大角位移计算冲量时, 推力测量系统冲量测量范围为 $0.05 \mu\text{N}\cdot\text{s} \sim 220 \mu\text{N}\cdot\text{s}$, 分辨力可达到 $0.02 \mu\text{N}\cdot\text{s}$ 。

(2) 本系统的推力分辨力达到 $0.025 \mu\text{N}$, 最大推力测量可达 $400 \mu\text{N}$; 固定频率的连续脉冲作用于有阻尼扭摆后, 通过扭摆转动的平均角位移即平均推力计算冲量时, 冲量范围、分辨力与连续脉冲的固定频率有关, 频率高时, 冲量分辨力能力提高; 频率低时, 可测冲量测量范围更广。

实际测量中, 需要根据脉冲微推力器性能、特性等合理选择测量方法。此外, 本推力测量系统已成功应用于“太极一号”技术试验卫星无拖曳控制射频离子微推进系统和姿态控制冷气微推进系统模样件、鉴定件和飞行件产品的各项地面推力参数标定, 为空间超高水平空间微重力平台的建设做出了贡献。

参 考 文 献

- 杨乐, 李自然, 尹乐等. 脉冲等离子体推力器研究综述. 火箭推进, 2006, 32(2): 32-36 (Yang Le, Li Ziran, Yin Le, et al. Review of pulsed plasma thruster. *Journal of Rocket Propulsion*, 2006, 32(2): 32-36 (in Chinese))
- Koizumi H, Komurasaki K, Arakawa Y. Development of thrust stand for low impulse measurement from microthrusters. *Review of Scientific Instruments*, 2004, 75(10): 3185-3190
- Yang YX, Tu LC, Yang SQ, et al. A torsion balance for impulse and thrust measurements of micro-Newton thrusters. *Review of Scientific Instruments*, 2012, 83(1): 153001
- 杨元侠. 微牛顿量级推进器的推力性能研究. [博士论文]. 武汉: 华中科技大学, 2012 (Yang Yuanxia. Researches on the thrust and impulse performances of micro-newton thrusters. [PhD Thesis]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2012 (in Chinese))
- 方娟, 洪延姬, 叶继飞等. 激光干涉法在扭摆法测量微冲量中的应用. 推进技术, 2010, 31(1): 119-122 (Fang Juan, Hong Yanji, Ye Jifei, et al. Application of laser interference in micro-impulse measurement with torsion pendulum. *Journal of Propulsion Technology*, 2010, 31(1): 119-122 (in Chinese))
- Ketsdever AD, D'Souza BC, Lee RH. Thrust stand micromass balance for the direct measurement of specific impulse. *Journal of Propulsion & Power*, 2008, 24(6): 1376-1381
- Gamero-Castano M. A torsional balance for the characterization of microNewton thrusters. *Review of Entific Instruments*, 2003, 74(10): 4509-4514
- 叶继飞, 洪延姬. 基于扭秤的激光干涉差动测量微小冲量方法. 应用光学, 2013, 34(6): 990-994 (Ye Jifei, Hong Yanji. Laser interference differential measurement of micro impulse based on torsion balance. *Journal of Applied Optics*, 2013, 34(6): 990-994 (in Chinese))
- Cubbin EA, Ziemer JK, Choueiri EY, et al. Pulsed thrust measurements using laser interferometry. *Review of Entific Instruments*, 1997, 68(6): 2339-2346
- Haag TW. Thrust stand for pulsed plasma thrusters. *Review of Scientific Instruments*, 1997, 68(5): 2060-2060
- 罗乐乐, 窦志国, 李南雷. 基于扭摆测量系统的微冲量测量方法. 机电产品开发与创新, 2017(2): 70-73 (Luo Lele, Dou Zhiguo, Li Nanlei. The Micro-impulse measuring method based on torsion pendulum. *Development & Innovation of Machinery & Electrical Products*, 2017(2): 70-73 (in Chinese))
- Dulligan M, Lake J, Adkison P, et al. Resonant operation of a micro-propulsion thrust stand//AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, 2002
- Zhou WJ, Hong YJ, Chang H. A micronewton thrust stand for average thrust measurement of pulsed microthruster. *Review of Scientific Instruments*, 2013, 84(12): 407-434
- 金星, 吴文堂, 周伟静等. 用于脉冲微推力器的枢轴式微冲量测量系统设计方法. 红外与激光工程, 2019, 48(S1): 97-103 (Jin Xing, Wu Wentang, Zhou Weijing, et al. Design method of micro-impulse measuring system based on pivots for pulsed micro-thruster. *Infrared and Laser Engineering*, 2019, 48(S1): 97-103 (in Chinese))
- 金星, 洪延姬, 周伟静等. 一种用于微小推力冲量测量的扭摆系统参数标定方法. 推进技术, 2015, 36(10): 1554-1559 (Jin Xing, Hong Yanji, Zhou Weijing, et al. A parameter calibration method for torsion pendulum using in micro thrust and impulse measurement. *Journal of Propulsion Technology*, 2015, 36(10): 1554-1559 (in Chinese))
- 王广宇, 洪延姬. 微冲量测量的建模误差分析. 推进技术, 2009, 30(4): 509-512 (Wang Guangyu, Hong Yanji. Modeling error analysis of micro-impulse measurements. *Journal of Propulsion Technology*, 2009, 30(4): 509-512 (in Chinese))
- 洪延姬, 周伟静, 王广宇. 微推力测量方法及其关键问题分析. 航空学报, 2013, 34(10): 2287-2299 (Hong Yanji, Zhou Weijing, Wang Guangyu. Methods of micro thrust measurement and analysis of its key issues. *Acta Aeronauticaet Astronautica Sinica*, 2013, 34(10): 2287-2299 (in Chinese))
- 鲁高飞. PPT 的高精度微冲量测量技术研究. [硕士论文]. 长沙: 国防科学技术大学, 2014 (Lu Gaofei. Study on the techniques of high precision micro-impulse measurement of pulsed plasma thruster. [Master Thesis]. Changsha: National University of Defense Technology, 2014 (in Chinese))
- 王宇, 尤政, 王广宇等. 一种多脉冲微推力的测量方法. 航空学报, 2009, 30(12): 2257-2262 (Wang Yu, You Zheng, Wang Guangyu, et al. A method of multipulse microthrust measurement. *Acta Aeronauticaet Astronautica Sinica*, 2009, 30(12): 2257-2262 (in Chinese))

- Chinese))
- 20 王广宇, 洪延姬. 脉冲微推力器平均推力测量研究. 推进技术, 2009, 30(5): 638-640 (Wang Guangyu, Hong Yanji. Investigation on the measurements of averaging thrust for pulsed thrusters. *Journal of Propulsion Technology*, 2009, 30(5): 638-640 (in Chinese))
- 21 周伟静, 洪延姬, 叶继飞. 激光微推力器多脉冲作用下的力学性能测量方法. 红外与激光工程, 2016, 45(S2): 5-10 (Zhou Weijing, Hong Yanji, Ye Jifei. Mechanical performance measurement method for laser micro-thruster working in multi-pulse mode. *Infrared and Laser Engineering*, 2016, 45(S2): 5-10 (in Chinese))
- 22 洪延姬. 微推力和微冲量测量方法. 北京: 国防工业出版社, 2014 (Hong Yanji. *Micro Thrust and Micro Impulse Measurement Method*. Beijing: National Defence Industry Press, 2014 (in Chinese))
- 23 赵凤鸣. 基于扭秤的弱力测量的初步分析和校验. [硕士论文]. 沈阳: 东北大学, 2013 (Zhao Fengming. Based on the weak-force torsion balance measurements preliminary analysis and verification. [Master Thesis]. Shenyang: Northeastern University, 2013 (in Chinese))
- 24 马隆飞, 贺建武, 薛森文等. 双丝扭秤微推力测量系统. 推进技术, 2018, 39(4): 948-954 (Ma Longfei, He Jianwu, Xue Senwen, et al. A micro-thrust measurement system with two-wire torsion balance. *Journal of Propulsion Technology*, 2018, 39(4): 948-954 (in Chinese))
- 25 Yang C, He JW, Duan L, et al. A torsional thrust stand for measuring the thrust response time of micro-Newton thrusters. *International Journal of Modern Physics A*, 2021, 36: 2140015
- 26 Wu CK, Wang HX, Meng X, et al. Aerodynamics of indirect thrust measurement by the impulse method. *Acta Mechanica Sinica*, 2011, 27: 152-163
- 27 Legtenberg R, Groeneveld AW, Elwenspoek M. Comb-drive actuators for large displacements. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 1999, 6(3): 320
- 28 Chen C, Lee C. Design and modeling for comb drive actuator with enlarged static displacement. *Sensors & Actuators A Physical*, 2004, 115(2-3): 530-539
- 29 哈尔滨工业大学理论力学教研室. 理论力学. 北京: 高等教育出版社, 1997 (Department of Theoretical Mechanics, Harbin Institute of Technology. *Theoretical Mechanics*. Beijing: Higher Education Press, 1997 (in Chinese))
- 30 Cesare S, Musso F, Angelo F, et al. Nanobalance: the european balance for micro-propulsion//31st International Electric Propulsion Conference, IEPC-2009-182, 2009