

# 基于牛顿迭代算法的大型有面外支撑杆 X 撑结构的屈曲分析

康元顺<sup>1,2</sup>, 张伟为<sup>1,2,3</sup>, 刘梦娟<sup>1,2</sup>, 曾晓辉<sup>1,2</sup>

(1. 中国科学院力学研究所, 北京 100190; 2. 中国科学院大学工程科学学院, 北京 100049; 3. 中国科学院大学未来技术学院, 北京 100049)

**摘 要:** 该文从理论分析和数值计算的角度研究了一种有面外支撑的 X 支撑系统的稳定性问题, 提出了一种简单高效的计算方法, 这种 X 支撑的两条支撑对角线的交点处连接了一个面外撑杆。考虑有面外撑杆的非对称交叉支撑体系在一般情况下的弹性屈曲, 即不同长度、截面和载荷的连续对角, 面外撑杆与 X 支撑平面可以有不同角度, 并且 X 支撑的交叉点不固定在跨中。建立了两端固接的双跨受压杆件跨中任意线弹性的特征值矩阵, 利用迭代算法进行屈曲载荷计算, 详述了新型 X 支撑系统的屈曲荷载理论计算方法。推导了两端固接的双跨受拉(压)杆件跨中任意位置处的转动刚度计算公式, 并通过数值计算讨论了不同受力形式转动刚度对 X 支撑的屈曲长度系数的影响, 阐释了在实际结构中转动刚度对屈曲载荷的影响可忽略。进行比例加载屈曲分析, 分析的目的是建立受压杆件的有效长度因子与压缩杆件和拉伸杆件的力比之间的关系。得到了任意位置处的非对称交叉支撑系统有效长度因子的数值解, 并通过已有文献的退化结果验证了其有效性。结合工程实际, 给出了屈曲长度系数的理论推荐值。

**关键词:** 结构工程; 屈曲分析; 理论推导; 数值计算; 有面外支撑的 X 支撑系统; 有效长度系数; 结构设计  
中图分类号: TB12 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2021.05.S053

## BUCKLING ANALYSIS OF A LARGE X-SUPPORTED STRUCTURE WITH OUT-OF-PLANE BRACES BASED ON NEWTON'S ITERATION

KANG Yuan-shun<sup>1,2</sup>, ZHANG Wei-wei<sup>1,2,3</sup>, LIU Meng-juan<sup>1,2</sup>, ZENG Xiao-hui<sup>1,2</sup>

(1. Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

2. School of Engineering Science, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;

3. School of Future Technology, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

**Abstract:** Studies the stability of an X-brace system with out-of-plane support using theoretical analysis and numerical calculation, and proposes a simple and efficient calculation method. An out-of-plane brace is connected at the intersection of the two diagonals of the X-brace. The elastic buckling of an asymmetric cross bracing system with out-of-plane struts is considered, i.e., continuous diagonals of different lengths, sections and loads. Out-of-plane struts and X-brace planes can have different angles, and the intersection point of the X-brace is not fixed in the middle of the span. The eigenvalue matrix of any linear elasticity in the middle of the double-span compression member fixed at both ends is established, and the buckling load is calculated by an iterative algorithm and the buckling of the new X-brace system is described in details. The calculation formula for the rotational stiffness of a double-span tension (compression) member fixed at both ends is deduced at any position

收稿日期: 2021-05-30; 修改日期: 2022-02-23

基金项目: 国家自然科学基金项目(11672306)

通讯作者: 曾晓辉(1972—), 男, 湖南人, 研究员, 博士, 博导, 从事结构动力响应、稳定性和流固耦合领域研究 (E-mail: zxb@imech.ac.cn).

作者简介: 康元顺(1997—), 男, 贵州人, 博士生, 主要从事工程力学研究 (E-mail: kangyuanshun@imech.ac.cn);

张伟为(1996—), 男, 江苏人, 博士生, 主要从事工程力学研究 (E-mail: zhangweiwei@imech.ac.cn);

刘梦娟(1998—), 女, 河南人, 硕士生, 主要从事工程力学研究 (E-mail: liumengjuan@imech.ac.cn).

in the span, and the influence of the rotational stiffness of different force forms on the buckling length coefficient of the X-brace is discussed based on numerical calculation, which shows that the influence of the rotational stiffness on the buckling load is negligible in actual structure. Then proportional load buckling analysis is carried out to establish the relationship between the effective length factor of the compression member and the force ratio of the compression member and the tension member. The numerical solution of the effective length factor of the asymmetric cross bracing system at any position is obtained, and its effectiveness is verified using the results in the literature. The theoretical value of buckling length coefficient is recommended to engineering practice.

**Key words:** structural engineering; buckling analysis; theoretical derivation; numeral calculations; X-brace system with out-of-plane support; effective length coefficient; structural design

X 支撑体系是一种经济高效的支撑系统，通常用来抵抗海流、风和地震等侧向荷载，在海洋、桥梁、建筑工程等领域均受到应用。在侧向力作用下，X 支撑的两条支撑对角线通常分别承受拉力和压力。本文拟将对一种带有面外撑杆的 X 支撑进行理论和数值模拟，这种新型 X 支撑的两条支撑对角线的交点处连接了一个面外撑杆(图 1)。图 1 为两个对称的 X 支撑， $AB = A'B'$ ， $CE = C'E'$ ，面外撑杆  $DD'$  垂直于  $ABCD$  平面，支撑对角线  $AB$  杆受压力作用， $CE$  杆受拉力作用，为计算方便，假设  $A'B'$  杆与  $C'E'$  杆未受外力作用。通过采用不同长度的连续对角线来考虑几何不对称性， $l_1 + l_2 \neq l'_1 + l'_2$ ，并且它们的交点未设置在中点， $l_1 \neq l_2 \neq l'_1 \neq l'_2$ 。受力的不对称由两支撑对角线的不同受力情况进行考虑， $|F| \neq |P|$ 。通过假设支撑对角线的弯曲刚度不一致考虑了材料的不对称， $EI = E_1I_1$ 。当  $AB$  发生面内屈曲 ( $yz$  平面) 时，其破坏模式如图 2(a) 所示；而当  $AB$  发生面外屈曲 ( $xz$  平面) 时，其破坏模式有两种可能，当张力对角线  $CE$  与面外支撑完全抵抗面外位移时，屈曲形状如图 2(b) 所示；当张力对角线  $CE$  与面外支撑不抵抗面外位移时，比如  $CE$  对角线受压时，屈曲形状如图 2(c) 所示。通常情况下，X 支撑的端部  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $E$  大都锚固在外框四周截面较大的角柱上，如果当角柱提供面外支撑刚度足够大时，其研究模型可以等效为梁端面外固接的交叉支撑模型<sup>[1-2]</sup>。

相比于传统的 X 支撑来说，新型 X 支撑有着更优异的结构性能，无论反向的支撑对角线处于张力或者压缩中，都有面外撑杆作为支承。此时进行面外屈曲计算时，因为面外撑杆的存在，使得对称的两个 X 支撑可以联系在一起，为杆件的面外屈曲提供了转动约束和更多的平动约束，可以有效地提高杆件的屈曲荷载<sup>[3-4]</sup>。

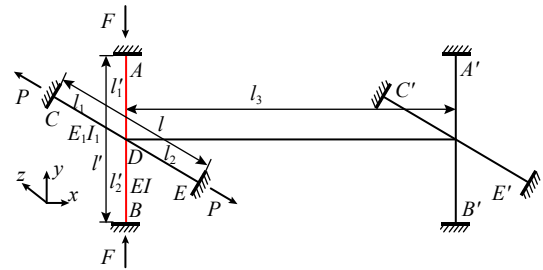


图 1 带面外支撑的交叉系统

Fig. 1 Cross system with out-of-plane support

早期的研究主要研究了比较经典的交叉支撑系统，X 支撑有两个相同的支撑对角线<sup>[5-7]</sup>，支撑对角线在跨中连接。通过采用 X 型支撑结构，可以减少支撑的长度。理论和实验研究表明：张力作用支撑能在支撑交点为压缩支撑提供有效的支撑。在对称支撑结构中，对两端铰支撑杆进行屈曲分析时，建议有效长度系数  $k$  取 0.5<sup>[8]</sup>。然而，在实际工程结构中，这种理想的结构并不常见，当框架面板为非矩形时，两支撑对角线可能具有不同的断面特性、长度和载荷<sup>[9-10]</sup>，即支撑对角线可能不会在其跨中连接。例如，在海底导管架中，交叉支撑系统大多是单对称的，并且成对出现。因此，也有必要考虑一般有面外撑杆的非对称交叉支撑体系的平面屈曲特性。

近年来，也有许多学者针对不连续的 X 支撑系统进行了广泛研究，中心节点的间断会影响 X 支撑的屈曲荷载和有效长度系数，在 X 支撑体系的设计中应予以考虑<sup>[11]</sup>。针对 X 支撑中一个支撑对角线是不连续，即在跨中是用螺栓进行连接。所以中心连接是部分固定或半刚性的，Davaran<sup>[12]</sup>给出了跨中断断压杆的屈曲长度与拉压比的解析解。Moon 等<sup>[13]</sup>对支撑对角线不连续的交叉支撑系统进行分析，求解了弹性屈曲荷载的近似解，得到了不同截面特性和轴向荷载下的拉压对角线的有效长度因子。由此可见，X 支撑系统中边界条

件对屈曲载荷的影响至关重要。

Libove<sup>[14]</sup>提出了一种计算刚接头管状桁架中受压构件稳定度的近似方法,该方法以垂直平分受压构件的平面为对称。该研究发现,受压构件理论上可能在两个相互垂直的平面中的任意一个发生屈曲,并推导出了确定这些平面和每个平面的末端约束的公式。Murray<sup>[15]</sup>建立了一种对三维模型桁架进行屈曲荷载计算的函数,是在只有弹性条件存在的情况下,结构发生屈曲的荷载。并将试验值与计算受压构件横向屈曲时桁架的临界荷载进行了比较。

确定 X 支撑的屈曲荷载已经有了许多比较成熟的研究。比如,对带有中间连接的对称 X 支撑体系的平面外屈曲荷载进行研究, Davaran<sup>[12]</sup>给出了在铰节点或半刚性中间连接下的有效长度因子的封闭关系。Segal 等<sup>[16]</sup>给出了端部任意弹性约束下的单跨受拉(压)杆件的屈曲长度系数的解析解,并推导和研究了具有端部铰接的偏心荷载交叉支撑的解析表达式,得出拉伸杆件的拉力对支撑体系的承载能力有很大贡献的结论。Moon 等<sup>[13]</sup>对支撑对角线不连续的交叉支撑系统进行分析,求解了弹性屈曲荷载的近似解,得到了不同截面特性和轴向荷载下的拉压对角线的有效长度因子。Davaran 和 Hoveidae<sup>[17]</sup>使用三维有限元模型研究了 X 支撑中间连接细节对支撑系统弹塑性行为的影响。Chen 等<sup>[18]</sup>在复域内讨论了具有任意数量横向和转动子系统的均匀张拉梁的自由振动的一般精确解。虽然这些研究考虑了不对称的支撑对角线,但仍假设两条支撑对角线的连接点没有面外支撑,对新型 X 撑架的理论研究仍然不足,并且对于跨中存在一定转角约束的理论研究也未在已有研究成果中得到体现。

在本研究中,考虑了有面外撑杆的非对称交叉支撑体系在一般情况下的弹性屈曲,即不同长度、截面刚度和载荷的连续对角,面外撑杆与 X 支撑平面可以有不同角度,并且 X 支撑的交叉点不固定在跨中。首先,建立了两端固接的双跨受压杆件(图 1 中的 AB 杆)跨中任意线弹性的特征值矩阵,详述了新型 X 支撑系统的屈曲荷载理论计算方法,并通过迭代算法求解屈曲载荷,得到了两端固结的跨中任意线弹性的屈曲载荷(屈曲长度系数)与无量纲弹簧刚度之间的关系。推导了两端固接的双跨受拉(压)杆件跨中任意位置处的转

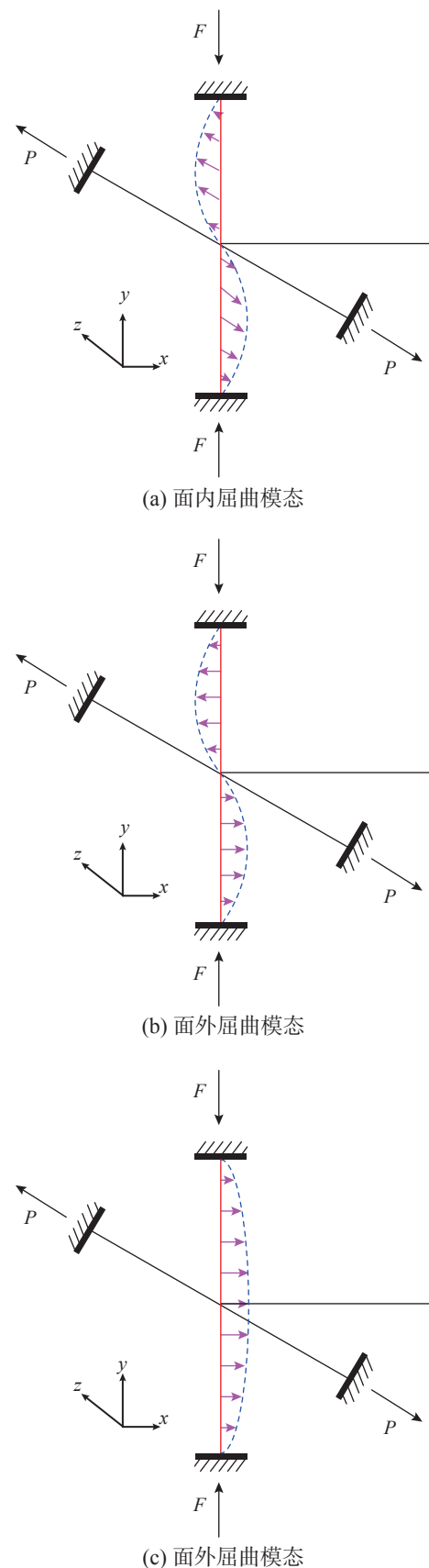


图 2 压缩杆 AB 的屈曲形状

Fig. 2 Buckling shape of compression rod AB  
角刚度计算公式,并通过数值计算讨论了不同受力形式转角刚度对 X 支撑的屈曲长度系数的影

响。然后进行比例加载屈曲分析，分析的目的是建立受压杆件的有效长度因子与压缩杆和拉伸杆的力比之间的关系，得到任意位置处的非对称交叉支撑系统有效长度因子的数值解。并与已有的一些退化结果进行对比，验证了模型的有效性。

### 1 有面外撑杆的非对称连续对角屈曲荷载计算

在进行屈曲分析时，支撑对角线受到恒定轴力作用。因此，支撑对角线将在连接处提供恒定的横向刚度和转动刚度<sup>[19-22]</sup>。

在有面外支撑的 X 支撑系统中，通过 Libove<sup>[14]</sup> 提出的屈曲平面判定准则，可知图 1 中 AB 杆只可能发生面内屈曲 (yz 平面) 和面外屈曲 (xy 平面) 两种情形。不失一般性，假设 AB 杆受压，CD 杆受拉，针对受压杆件 AB，可以建模为两端固接的在交点处有横向弹性支撑与转动弹性支撑的计算模型。中间支撑的刚度  $K_D$  和  $C_D$  由拉伸杆件 CD 或面外支撑杆件提供。

#### 1.1 控制方程

基于图 3 建立的坐标系，在 AD 段，即  $0 \leq x_1 \leq x$  时，控制微分方程为：

$$EIw_1''(x_1) = F_A x_1 - Fw_1(x_1) - M_A$$

令  $\lambda'^2 = \frac{Fl'^2}{EI}$ ，则  $w_1(x_1)$  的通解为：

$$w_1(x_1) = a \cos\left(\frac{\lambda'}{l'}x_1\right) + b \sin\left(\frac{\lambda'}{l'}x_1\right) + \frac{F_A}{F}x_1 - \frac{M_A}{F} \quad (1)$$

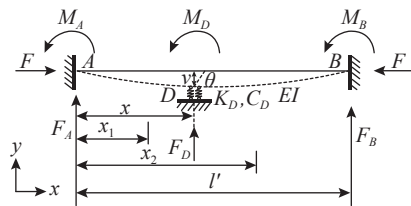


图 3 连续压缩杆件的分析模型

Fig. 3 Analytical model for continuous compression members

转角方程：

$$w_1'(x_1) = -a \frac{\lambda'}{l'} \sin\left(\frac{\lambda'}{l'}x_1\right) + b \frac{\lambda'}{l'} \cos\left(\frac{\lambda'}{l'}x_1\right) + \frac{F_A}{F} \quad (2)$$

同理，在 DC 段，即  $x \leq x_2 \leq l'$  时，挠曲线方程为：

$$w_2(x_2) = c \cos\left(\frac{\lambda'}{l'}x_2\right) - \frac{F_B}{F}x_2 + d \sin\left(\frac{\lambda'}{l'}x_2\right) + \frac{F_B l'}{F} + \frac{M_B}{F} \quad (3)$$

$$w_2'(x_2) = -c \frac{\lambda'}{l'} \sin\left(\frac{\lambda'}{l'}x_2\right) + d \frac{\lambda'}{l'} \cos\left(\frac{\lambda'}{l'}x_2\right) - \frac{F_B}{F} \quad (4)$$

代入变形边界条件：

在式 (1) 中令  $x_1 = 0$ ，得到压杆 A 处的变形满足：

$$a = \frac{M_A}{F} \quad (5)$$

$$b \frac{\lambda'}{l'} + \frac{F_A}{F} = 0 \quad (6)$$

在式 (3) 中令  $x_2 = l'$ ，得到压杆 B 处的变形满足：

$$c \cos(\lambda') + d \sin(\lambda') + \frac{M_B}{F} = 0 \quad (7)$$

$$c \frac{\lambda'}{l'} \cos(\lambda') + d \frac{\lambda'}{l'} \sin(\lambda') + \frac{F_B}{F} = 0 \quad (8)$$

压杆在 D 处变形连续，故  $w_1(x) = w(x) = w_2(x)$ ； $w_1'(x) = w'(x) = w_2'(x)$ 。在式 (1) 和式 (2) 中令  $x_1 = x$ ，得：

$$w(x) = a \cos\left(\frac{\lambda'}{l'}x\right) + b \sin\left(\frac{\lambda'}{l'}x\right) + \frac{F_A}{F}x - \frac{M_A}{F} \quad (9)$$

$$w'(x) = -a \frac{\lambda'}{l'} \sin\left(\frac{\lambda'}{l'}x\right) + \frac{F_A}{F} + b \frac{\lambda'}{l'} \cos\left(\frac{\lambda'}{l'}x\right) \quad (10)$$

定义  $\alpha' = x/l'$  在式 (3) 和式 (4) 中令  $x_2 = x$ ，得：

$$w(x) = c \cos\left(\frac{\lambda'}{l'}x\right) + d \sin\left(\frac{\lambda'}{l'}x\right) - \frac{F_B}{F}x + \frac{F_B l'}{F} + \frac{M_B}{F} \quad (11)$$

$$w'(x) = -c \frac{\lambda'}{l'} \sin\left(\frac{\lambda'}{l'}x\right) - \frac{F_B}{F} + d \frac{\lambda'}{l'} \cos\left(\frac{\lambda'}{l'}x\right) \quad (12)$$

由静力平衡条件可知：

$$\frac{F_A}{F} + \frac{F_B}{F} + \frac{F_D}{F} = 0 \quad (13)$$

$$0 = -\frac{F_A}{F}x + \frac{M_A}{F} + \frac{M_B}{F} + \frac{M_D}{F} + \frac{F_B}{F}(l-x) \quad (14)$$

交点处的变形应满足胡克定律：

$$\frac{F_D}{F} + \frac{K_D l'^2}{\lambda'^2 EI} w(x) = 0 \quad (15)$$

$$\frac{M_D}{F} + \frac{C_D l'^2}{\lambda'^2 EI} w'(x) = 0 \quad (16)$$

在式 (15) 和式 (16) 中，中间支撑的刚度系数  $K_D$  和  $C_D$  由拉伸杆件 CD 或面外支撑杆件提供。因此，由式 (5)~(16) 确定了一个关于 12 个初参数  $\frac{M_C}{F}$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $\frac{F_A}{F}$ 、 $\frac{F_B}{F}$ 、 $\frac{F_D}{F}$ 、 $\frac{M_A}{F}$ 、 $\frac{M_D}{F}$ 、 $\frac{M_B}{F}$ 、 $w(x)$ 、 $w'(x)$  的齐次线性方程组，其有非零解的充要条件是方程组的系数行列式为 0，由此可得到临界压力的特征方程式 (17)。

$$\begin{vmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{\lambda'}{l'} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \cos(\alpha'\lambda') & \sin(\alpha'\lambda') & 0 & 0 & l'_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 -\frac{\lambda'}{l'} \sin(\alpha'\lambda') & \frac{\lambda'}{l'} \cos(\alpha'\lambda') & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & \cos(\alpha'\lambda') & \sin(\alpha'\lambda') & 0 & 0 & 0 & 0 & l-l'_1 & 1 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{\lambda'}{l'} \sin(\alpha'\lambda') & \frac{\lambda'}{l'} \cos(\alpha'\lambda') & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & \cos(\lambda') & \sin(\lambda') & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{\lambda'}{l'} \sin(\lambda') & \frac{\lambda'}{l'} \cos(\lambda') & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -l'_1 & 1 & 0 & 1 & l-l'_1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{K_D l'^2}{\lambda'^2 EI} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_D l'^2}{\lambda'^2 EI}
 \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$

刚度  $K_D$  和  $C_D$  由拉伸杆件  $CD$  或面外支撑杆件提供。定义了无量纲线刚度系数  $\beta = K_D l' / F_0$ ，这里  $F_0 = \pi^2 EI / l'^2$ 。

不难看出，式 (17) 对于两端铰支的压杆稳定模型同样适用，(消除矩阵第 8 行、10 行和列即得两端铰支的压杆屈曲特征方程)，此时  $M_A = M_B = 0$ 。不失一般性，对受压  $AB$  杆假设  $l'_1 / l'_2 \geq 1$ ，即只讨论  $\alpha' \geq 0.5$  的情况。同时认为  $\alpha' = \alpha$ ， $l' = l$ ， $E_1 I_1 = EI$ ；当  $\alpha' = 0.5$  时，忽略转动约束，即  $C_D = 0$ ，利用式 (17) 进行迭代，与退化情况 Vacharajittiphan 等<sup>[5]</sup> 的计算结果进行对比，如图 4(a) 所示，可以看出，数值求解结果与理论计算结果有良好的一致性。同时，与王永海等<sup>[1]</sup> 的实验结果进行对比，如图 4(b) 所示，可以看出，实验结果与理论计算结果有较好的一致性。

针对 X 支撑的屈曲分析，将会在第 2 节进行展开介绍。

### 1.2 线刚度计算

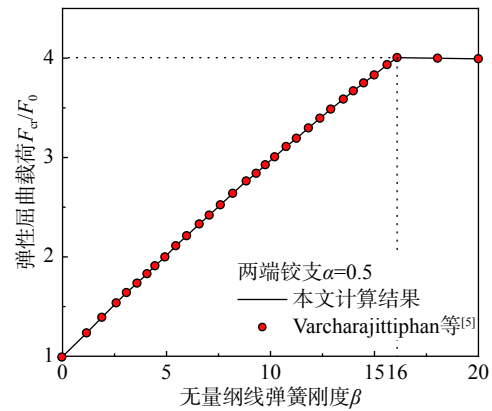
当  $AB$  杆发生面内 ( $yz$  平面) 屈曲时，线刚度由  $CE$  杆提供：

$$K_D = \frac{E_1 A_1}{l} \quad (18)$$

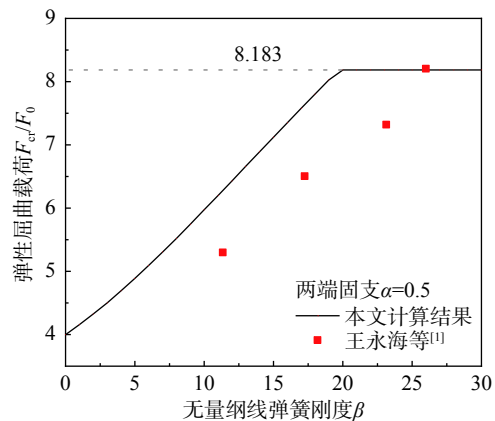
当  $AB$  杆发生面外 ( $xy$  平面) 屈曲时，由 Chen 等<sup>[11]</sup> 的工作可知受拉 (压) 支撑对角线  $CE$  提供的线刚度为：

$$k_1 = \frac{P \lambda \sinh(\lambda)}{l[(1-\alpha)\alpha \lambda \sinh(\lambda) - \sinh(\lambda - \lambda\alpha) \sinh(\lambda\alpha)]} \quad (19)$$

式中： $\lambda = \sqrt{\frac{Pl^2}{E_1 I_1}}$ ； $\alpha = \frac{l_1}{l}$ 。



(a) 两端铰支与数值计算结果的对比



(b) 两端固支与实验结果的对比

图 4 与数值结果和实验结果的对比

Fig. 4 Comparison between numerical and experimental results

式 (19) 中，当  $P=0$  时应该替换成下式：

$$k_1 = \frac{3E_1 I_1}{\alpha^2 (1-\alpha)^2 l^3}$$

面外支撑的线刚度为由  $DD'$  与  $ABCD$  对称的

无外力 X 支撑共同提供:

$$k_2 = k_{21} + k_{22} = \frac{3E_1 I_1}{l^3(1-\alpha')^2} + \frac{3E_1 I_1}{l^3(1-\alpha)^2},$$

$$k_3 = \frac{EA}{l}, k_4 = \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3}.$$

所以, AB 杆发生面外屈曲时的总线刚度为:

$$K_D = k_1 + k_4 \quad (20)$$

定义无量纲平动刚度因子  $m = K/Ke$ , 此处单位线弹簧刚度为  $Ke = \frac{3EI}{l^3}$ .

### 1.3 角刚度计算

当 AB 杆发生面内 (yz 平面) 屈曲时, 受拉杆件 CE 可通过对图 5 建立平衡微分方程, 通过推导得到 CE 杆提供的转动约束为:

$$\frac{Pl_1 \sinh(\lambda)}{\lambda \cosh(\alpha\lambda) \cosh(\alpha\lambda - \lambda) - \sinh(\lambda)} \quad (21)$$

式 (21) 中, 当  $P = 0$  时应转换成:

$$C_D = \frac{4E_1 I_1 l}{l_1 (l - l_1)}$$

当 AB 杆发生面外 (xy 平面) 屈曲时:

$$C_D = \frac{3E_1 I_1}{l_1 [3 + (1 - \alpha)^3 + \alpha^3]} \quad (22)$$

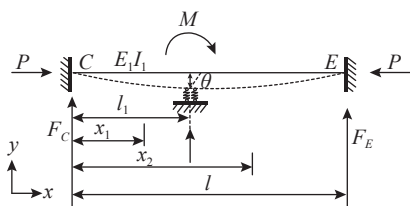
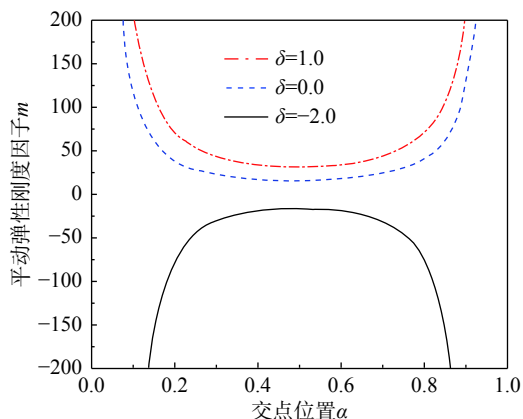


图 5 转动刚度计算模型  
Fig. 5 Rotational stiffness calculation model

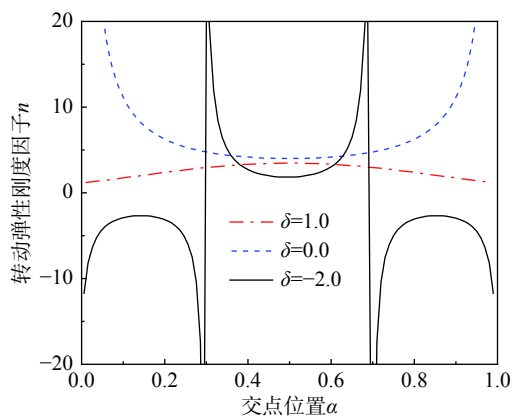
结合屈曲特征方程和 1.2 节线刚度的计算公式, 得到平动刚度因子与 X 撑交点位置 ( $\alpha$  的值) 的关系如图 6(a)。定义无量纲转动刚度因子  $n = C/Ce$ , 此处单位转动弹簧刚度为  $Ce = 4EI/l$ 。转动刚度因子与 X 撑交点位置 ( $\alpha$  的值) 的关系如图 6(b)。靠近端点处 ( $\alpha = 0.0, \alpha = 1.0$ ), 平动刚度趋于无穷, 这是由于端点处线位移为 0 导致的。平动刚度的变化趋势与挠度曲线中的变形量  $1/w(x)$  成正比。转动刚度与  $1/w'(x)$  成正比, 故可以看到随着受拉杆 CE 的受力不同, CE 杆在交点处提供的转动刚度有着明显不同的变化趋势。

X 撑交点位置与弹性刚度因子的关系中  $\delta$  表示无量纲拉力大小,  $\delta = P/F_0$ , 此处  $F_0 = \pi^2 EI/l^2$ 。从图 6(a) 可以看出, 平动刚度接近端点位置 ( $\alpha = 0, \alpha = 1$ ) 时, 平动刚度趋于无穷, 而转动刚度趋于定

值。但对于工程实际中, 通常  $\alpha$  的值在 0.5 左右。因此, 受拉杆件 BC 杆所能提供平动刚度和转动刚度都是有限值, 并随着拉力增大而增大, 随着压力增大而减小。



(a) 不同受力状态下的平动刚度



(b) 不同受力状态下的转动刚度

图 6 不同受力条件下 X 撑交点位置与弹性刚度因子的关系

Fig. 6 The relationship between the position of the X brace intersection and the elastic stiffness factor under different stress conditions

## 2 屈曲分析

首先, 考虑了跨中转动约束的非对称交叉支撑系统有效长度因子的数值解; 分析的目的是建立受压对角线的有效长度因子与压缩对角线和拉伸对角线的力比之间的关系, 考察了面外支撑杆件对结构屈曲的影响, 并且给出有效长度因子的理论推荐值。两端固支的跨中任意线弹性屈曲模型, 可采用屈曲特征方程式 (17) 进行迭代求解。首先, 考察了弹性支撑的位置对杆件屈曲长度系数的影响。为了讨论方便, 定义了线弹性刚度因子  $m = K/Ke$ , 此处  $K$  是支撑点处的平动刚度。同时也定义了转动弹性刚度因子  $n = C/Ce$ , 此处  $C$  是

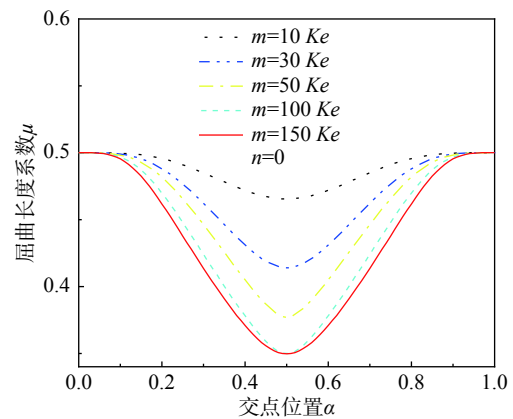
支撑点处的转动刚度。

由于 X 撑交点处的平动刚度  $K$  和转动刚度  $C$  都会对结构屈曲产生影响。这里为了更好地对结果进行讨论, 对平动刚度和转动刚度分别独立进行考察。即考察平动刚度位置 (即  $\alpha$  值) 对杆件屈曲长度系数的影响时, 忽略转动刚度的影响 ( $n=0$ )。同样的, 考察转动刚度位置对杆件屈曲长度系数的影响时, 忽略平动刚度的影响 ( $m=0$ )。

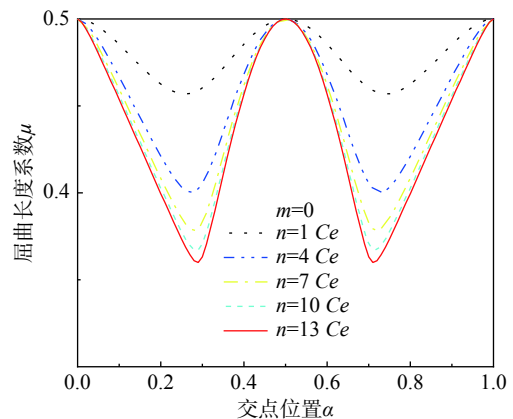
忽略 X 撑交点处转动约束的影响, 考察了不同平动刚度下交点位置与屈曲长度系数的关系, 如图 7(a) 所示。与两端铰支的情况类似, 从图 7(a) 中可以观察到, 图像具有很好的对称性, 从侧面也证明了程序的正确性。平动刚度对端点处 ( $\alpha=0, \alpha=1$ ) 没有影响, 而对跨中 ( $\alpha=0.5$ ) 影响最大。在端点处, 此时 X 撑结构屈曲长度系数与单跨的两端铰支压杆屈曲长度系数相同, 即  $\mu=0.5$ 。在跨中 ( $\alpha=0.5$ ), 此时平动刚度对屈曲长度系数的影响最大, 并随着平动刚度增大, 屈曲长度系数逐渐减小, 最终趋于 0.349, 以定性地解释为此时的平动刚度已经对结构有了足够的支撑作用 ( $m$  对应值为 150), 此时的模型为两端固支, 跨中铰支的连续杆模型。

忽略 X 撑交点处平动约束的影响, 考察了不同转动刚度下交点位置与屈曲长度系数的关系, 如图 7(b) 所示。从图 7(b) 中可以观察到, 图像也具有很好的对称性, 从侧面也证明了程序的正确性。转动刚度在  $\alpha=0.3, \alpha=0.7$  处影响达到最大, 而对跨中 ( $\alpha=0.5$ ) 和端点处 ( $\alpha=0, \alpha=1$ ), 此时平动刚度对屈曲长度系数没有影响, 这是由于端点固支边界条件和结构发生一阶屈曲引起的, 此时 X 撑结构屈曲长度系数与单跨的两端固支压杆屈曲长度系数相同, 即  $\mu=0.5$ 。而在  $0 < \alpha < 0.5$  和  $0.5 < \alpha < 1$  两个分段内, 转动刚度对结构屈曲长度系数的影响呈现先增大后减小的趋势, 分别在  $\alpha=0.3$  和  $\alpha=0.7$  两处影响达到最大。

当发生面内 ( $yz$  平面) 屈曲, 此时  $K_D = EA/l' \gg K_{cr}$ , 因此可考虑转角刚度  $C_D$  对屈曲载荷的影响; 定义无量纲转角刚度  $\eta = C_D/F_0 l'$  可得到  $\eta$  与屈曲载荷  $F_{cr}/F_0$  之间的关系, 这里只展示了  $\alpha' = 0.6$  的情况, 如图 8。从图 8 中可以看出, 屈曲载荷的大小随  $\beta$  增大而增大, 随  $\eta/\beta$  增大而增大。而在实际结构中, 一般  $\eta/\beta < 0.1$ 。此时转角刚度对结构屈曲的影响较小, 所以可以将其当做次要因素舍弃。



(a) 不同平动刚度对结构屈曲的影响



(b) 不同转动刚度对结构屈曲的影响

图 7 弹性支点的位置与屈曲长度系数的关系

Fig. 7 The relationship between the position of the elastic fulcrum and the buckling length factor

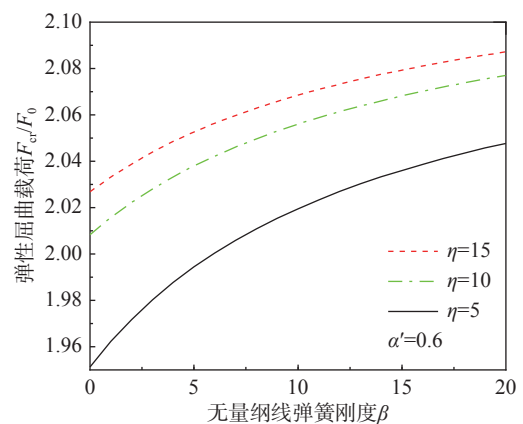


图 8 不同转动刚度对屈曲载荷的影响

Fig. 8 Effect of different rotational stiffness on buckling load

同时, 考虑到设计应该留有足够的安全余度, 通常忽略面外支撑杆件提供的跨中转动约束。

当发生面外 ( $xy$  平面) 屈曲, 对  $AB$  杆进行面外屈曲分析时, 此时转角刚度为小量。因为面外支撑  $A'B'$  杆与  $C'E'$  杆不受外力作用, 故对应的的线刚度  $k_4$  为常数, 其等价问题为单独研究  $AB$  杆

与  $CE$  杆的面外屈曲问题,  $CE$  杆提供的线刚度由式 (18) 求得。特别地, 与 Davaran 等<sup>[10]</sup> 所得的简化方法进行了对比, 认为  $\alpha' = \alpha$ 、 $l' = l$ ,  $E_1 I_1 = EI$ , 可得到两端固接的跨中任意线弹性支撑的屈曲长度系数 (或屈曲载荷) 与无量纲线拉力  $\delta = P/F_0$  与无量纲压力  $\xi = F/F_0$  之间的比值的关 系, 如图 9 所示。可以看出本计算方法与预测公式有较好的一致性。

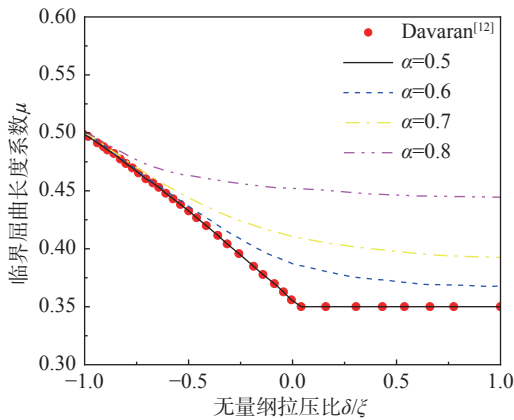


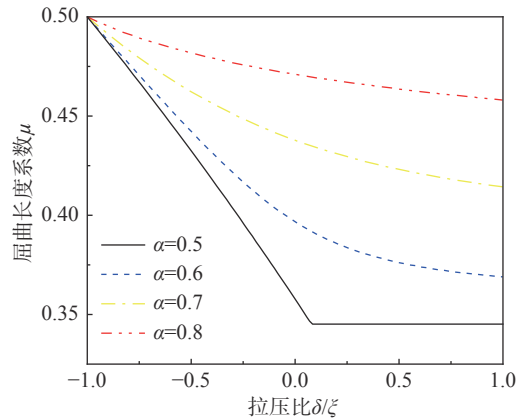
图 9 与数值结果进行对比  
Fig. 9 Compare with numerical results

在实际工程中, 通常  $X$  撑系统的交点  $D$  一般会比较靠近跨中, 即实际工程中  $\alpha$  的值在 0.5 左右, 此时平动刚度  $K$  的影响较大, 而转动刚度  $C$  的影响很小, 通常人们忽略转动刚度的影响而只考虑平动刚度对屈曲长度系数的影响。与两端铰支的情况不同, 值得注意的是, 在两端固支的跨中任意线弹性双跨压杆稳定问题中, 当  $\alpha$  的值在 0.3 或 0.7 附近时, 此时转动刚度对杆件屈曲长度系数的影响同样不可忽视。

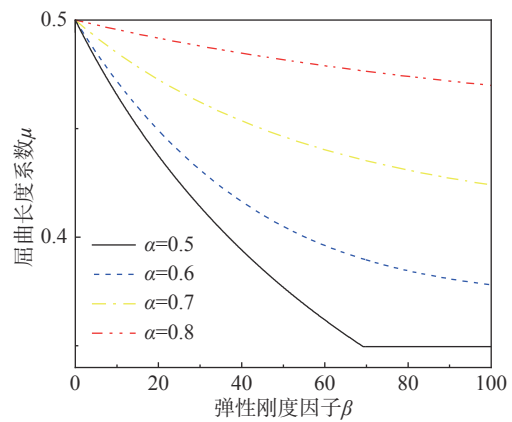
对两端固支的无面外支撑的  $X$  撑杆屈曲长度系数随拉压比的变化趋势, 如图 10(a) 所示, 展示了在  $X$  撑不同交点位置处屈曲长度系数随拉压比的变化趋势。其中:  $AE$  杆受压,  $BC$  杆受拉时, 拉压比为正; 当  $AE$  杆与  $BC$  杆同时受压时, 拉压比为负。从图 10(a) 中可知, 当  $AE$  杆与  $BC$  杆同时受压, 并且  $\delta/\xi = -1$ , 此时为最危险工况, 屈曲长度系数为 0.5。同时可以看到, 当  $X$  撑交点在跨中 ( $\alpha = 0.5$ ) 时, 此时结构利用效率最高, 在相同受力条件下结构拥有更高的承载力。因此, 在实际工程应用中, 对于两端固支的杆件, 也应尽量让  $X$  撑交点靠近跨中以提高结构承载力。

如图 10(b), 这里给出了  $X$  撑杆交点在不同位置时, 交点处的无量纲弹性刚度  $\beta$  与屈曲长度系数

之间的关系。从图 10(b) 中也可以明显得出与图 10(a) 分析结果类似的结论, 只需将拉压比替换成弹性刚度因子即可, 这里不再赘述。



(a) 拉压比与屈曲长度系数的关系



(b) 弹性刚度因子与屈曲长度系数的关系

图 10 跨中无量纲因子与屈曲长度系数的关系  
Fig. 10 Relationship between dimensionless factor in midspan and buckling length factor

对于两端固支的跨中任意线弹性双跨压杆稳定问题, 对面外支撑杆件进行参数化研究, 如图 11 所示。图 11 中横坐标  $\delta/\xi$  依然代表拉压比, 纵坐标  $\mu$  代表屈曲长度系数, 图中不同线型的曲线代表面外支撑杆所提供的不同平动刚度  $K$ 。值得注意的是, 当  $X$  撑发生面外屈曲 ( $yz$  平面) 时, 面外支撑杆所提供的转动刚度一般为定值, 不失一般性, 可以假定此时面外撑杆提供给交点的转动约束  $C=0$ 。由此, 从图 11 中看出, 面外撑杆的刚度可以有效降低结构的屈曲长度系数, 随着面外支撑刚度的增加, 结构的承载能力大大增强。例如, 在  $X$  撑交点在跨中 ( $\alpha = 0.5$ ), 当面外支撑杆提供的刚度大于  $100Ke$  时, 面外撑杆已经可以看成是一个固定的支点, 此时进行结构设计时, 可以取杆件长度的一半进行研究。而在实际工程应用



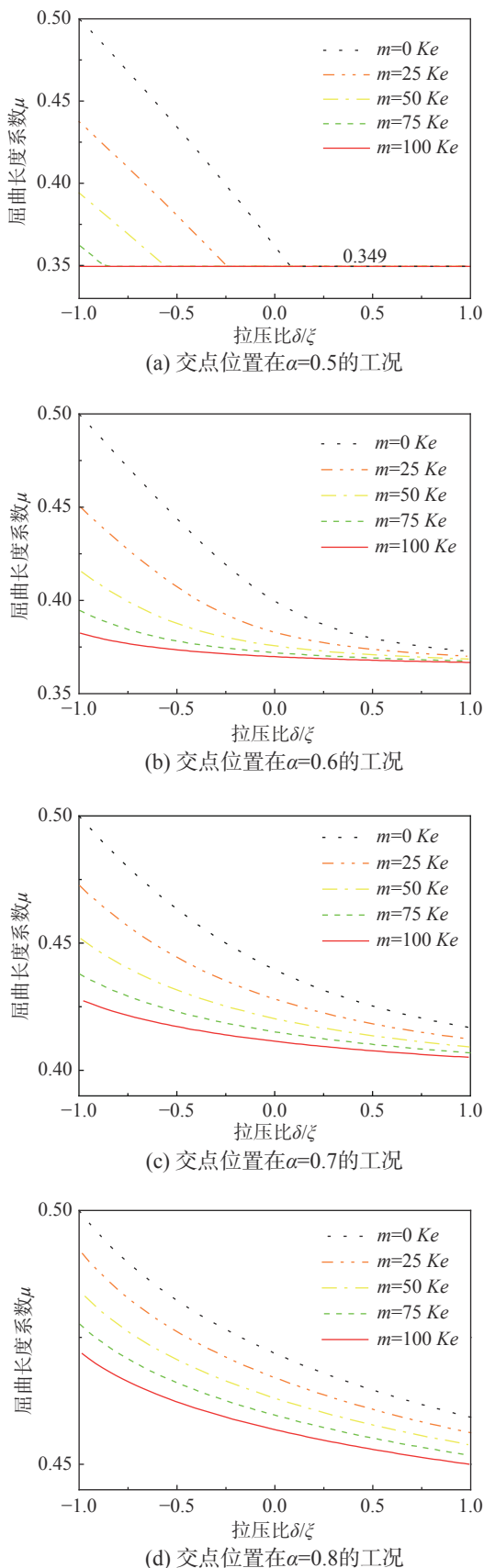


图 11 不同支承刚度时拉压比与屈曲长度系数的关系  
 Fig. 11 Relationship between tension-compression ratio and buckling length coefficient with different bearing stiffness

中，当面外支撑杆  $DD'$  杆的远端点  $D'$  连接在刚度较大的结构上时，此时面外支撑杆提供的刚度可看成轴向杆件的压缩刚度。为了讨论方便，假定面外支撑杆与面内 ( $xz$  平面) 撑杆拥有相同的材料属性和结构长度。面外撑杆提供的刚度为  $K = EA_c/l$ ，式中， $A_c$  为面外撑杆的面积。不难算出此时对应的线弹性平动刚度因子  $n > 100$  时，对应面外撑杆面积满足  $A_c/A > 0.08$ 。这里得出的结论与两端铰支的情况高度相似。当满足此条件时，进行屈曲分析时，可认为面外支撑杆为不动的支点，此时只需要对对单跨进行稳定性设计即可 (取长度较长一跨)。但是，值得注意的是，对于面外支撑杆件的设计不仅应该满足上述轴向刚度的要求，还应该满足其本身的稳定性设计要求，此时对于面外撑杆来说，稳定性要求给为关键。通常在满足面外撑杆稳定性设计以后得出的面外撑杆横截面面积  $K_D \gg EA/10l$ 。

### 3 结论

本文从理论分析和数值计算的角度研究了一种新型 X 支撑系统的稳定性问题，提出了一种简单高效的计算方法。取得的主要成果如下：

(1) 建立了两端固接的双跨受压杆件跨中任意位置的特征值矩阵，利用迭代算法进行屈曲载荷计算，详述了新型 X 支撑系统的屈曲荷载理论计算方法。推导了两端固接的双跨受拉 (压) 杆件跨中任意位置处的转角刚度计算公式，并通过数值计算讨论了不同端点约束和不同受力形式转动刚度对 X 支撑的屈曲长度系数的影响，得到了在实际结构中刚度与转动刚度的比值  $\eta/\beta < 0.1$ ，因此在进行屈曲分析时，可将转动刚度当做次要因素忽略。

(2) 进行比例加载屈曲分析，分析的目的是建立受压杆件的有效长度因子与压缩杆件和拉伸杆件的力比之间的关系。得到了任意位置处的非对称交叉支撑系统有效长度因子的数值解，并通过已有文献的退化结果验证了其有效性。

(3) 通过分析可知，对于有面外撑杆的 X 撑系统，其只需要满足面外撑杆的稳定性设计要求之后，即 X 撑体系在交点处有足够的支撑刚度，此时可将交点处当做铰支点进行结构屈曲设计。因此，只需要对对单跨进行稳定性设计即可 (取  $AD$  杆和  $BD$  杆中长度较长一跨)。同时，因为端点

一般固定在刚度较大的立柱上,端点处有非常大的转动刚度和较强的转动约束,所以结构接近于一端固支,一端铰支的情形。此时杆件的屈曲长度系数 $\mu \approx 0.7$ 。考虑到结构设计时应留有足够的安全余度,并结合已有相关规范中的关于单跨压杆稳定的设计值,对于有面外支撑杆的 X 支撑体系,推荐在结构设计中屈曲长度系数 $\mu$ 取值为 0.8 (此处参考长度为 AD 杆和 BD 杆中长度较长一跨)。

### 参考文献:

- [1] 王永海,郭彦林.十字型刚架中轴压柱面外稳定性设计方法研究[J].工程力学,2011,28(5):54-63.  
Wang Yonghai, Guo Yanlin. Out-plane buckling behavior and design method of axial loaded column in the cross-frame [J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(5): 54-63. (in Chinese)
- [2] Chen Y, Hu Z, Guo Y, et al. Ultimate bearing capacity of CHS X-joints stiffened with external ring stiffeners and gusset plates subjected to brace compression [J]. Engineering Structures, 2019, 181: 76-88.
- [3] Attia W A, Irheem M M M. Boundary condition effect on response modification factor of X-braced steel frames [J]. HBRC Journal, 2019, 14(1): 104-121.
- [4] 姜亚丽,杨刚,宋红红.地震作用下矮塔斜拉桥的动力优化设计[J].工程力学,2020,37(增刊1):313-319.  
Jiang Yali, Yang Gang, Song Honghong. Dynamic optimization design of short tower cable-stayed bridges under seismic effects [J]. Engineering Mechanics, 2020, 37(Suppl 1): 313-319. (in Chinese)
- [5] Vacharajittiphon P, Trahair N S. Direct stiffness analysis of lateral buckling [J]. Journal of Structural Mechanics, 2007, 3(2): 107-137.
- [6] 李振眠,余杨,余建星,等.基于向量有限元的深水管道屈曲行为分析[J].工程力学,2021,38(4):247-256.  
Li Zhenmian, Yu Yang, Yu Jianxing, et al. Analysis of flexural behavior of deepwater pipelines based on vector finite elements [J]. Engineering Mechanics, 2021, 38(4): 247-256. (in Chinese)
- [7] Stoman S H. Effective length spectra for cross bracings [J]. Journal of Structural Engineering, 1989, 115(12): 3112-3122.
- [8] Andre Picard, Denis Beaulieu. Theoretical study of the buckling strength of compression members connected to coplanar tension members [J]. Canadian Journal of Civil Engineering, 1988, 16(3): 239-248.
- [9] Thevendran V, Wang C M. Stability of nonsymmetric cross-bracing systems [J]. Journal of Structural Engineering, 1993, 119(1): 169-180.
- [10] Davaran A, Gélinas A, Tremblay R. Inelastic buckling analysis of steel x-bracing with bolted single shear lap connections [J]. Journal of Structural Engineering, 2014, 141(8): 04014204.
- [11] Chen Y, Guo Y, Hai-Wei X U. Effective length factor of a non-symmetrical cross-bracing system with a discontinuous diagonal [J]. Journal of Zhejiang University-Science, 2019, 20(8): 590-600.
- [12] Davaran A. Effective length factor for discontinuous x-bracing systems [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2001, 127(2): 106-112.
- [13] Moon J, Yoon K Y, Han T S, et al. Out-of-plane buckling and design of X-bracing systems with discontinuous diagonals [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2008, 64(3): 285-294.
- [14] Libove C. Buckling of a compression member in a rigid-joint truss. I-Equalend restraints [J]. Journal of Aircraft, 1966, 3(4): 347-353.
- [15] Murray N W. A method of determining an approximate value of the critical loads at which lateral buckling occurs in rigidly jointed trusses [J]. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, 1957, 7(2): 387-403.
- [16] Segal F, Levy R, Rutenberg A. Design of imperfect cross-bracings [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1994, 120(5): 1057-1075.
- [17] Davaran A, Hoveidae N. Effect of mid-connection detail on the behavior of x-bracing systems [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2009, 65(4): 985-990.
- [18] Chen Y, McFarland D M, Spencer B F, et al. Exact solution of free vibration of a uniform tensioned beam combined with both lateral and rotational linear subsystems [J]. Journal of Sound and Vibration, 2015, 341: 206-212.
- [19] 陆文发.近海导管架平台[M].北京:海洋出版社,1992.  
Lu Wenfa. Offshore jacket platform [M]. Beijing: Ocean Publishing House, 1992. (in Chinese)
- [20] 陈绍蕃.塔架交叉斜杆考虑屈曲相关性的稳定承载力[J].土木工程学报,2011,44(1):19-28.  
Chen Shaofan. Stability capacity of tower cross-bracings taking account of interaction in buckling [J]. Journal of Civil Engineering, 2011, 44(1): 19-28. (in Chinese)
- [21] 吴兆旗,魏源,王鑫涛,等.局部锈蚀圆钢管构件轴压力学性能正交试验研究[J].工程力学,2020,37(4):144-152.  
Wu Zhaoqi, Wei Yuan, Wang Xintao, et al. Orthogonal experimental study on the axial compression mechanical properties of locally rusted round steel pipe members [J]. Engineering Mechanics, 2020, 37(4): 144-152. (in Chinese)
- [22] 赵林鑫,江守燕,杜成斌.基于SBFEM和机器学习的薄板结构缺陷反演[J].工程力学,2021,38(6):36-46.  
Zhao Linxin, Jiang Shouyan, Du Chengbin. Inversion of structural defects in thin plates based on SBFEM and machine learning [J]. Engineering Mechanics, 2021, 38(6): 36-46. (in Chinese)