平面问题转轴公式适用性的讨论1)

李　敏*　李依伦†　陈伟民**,††,2)

*(北京航空航天大学航空科学与工程学院，北京 100191)
†(巴黎-萨克雷大学，土壤、结构与材料力学实验室，法国巴黎 91190)
**(中国科学院力学研究所，北京 100190)
††(中国科学院大学工程科学学院，北京 100049)

摘要　平面应力（应变）转轴公式是材料力学应力（应变）分析部分的主要教学内容，尽管转轴公式基于特定的应力（应变）状态导出，但在后续的应用，包括例题与习题中的引用并没有限定于平面应力（应变）状态。为了澄清学生常见疑惑，本文使用简单的方式对该问题进行说明，供教师教学时参考。

关键词　应力状态，应变状态，转轴公式

中图分类号: O341　　**文献标识码**: A　　doi: 10.6052/1000-0879-21-417

DISCUSSION ON THE APPLICABILITY OF TRANSFORMATION EQUATIONS FOR PLANE PROBLEM1)

LI Min*　LI Yilun†　CHEN Weimin**,††,2)

*(School of Aeronautic Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)
†(Lab. MSSMat, CentraleSupélec, Université de Paris-Saclay, Paris 91190, France)
**(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)
††(School of Engineering Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract　The transformation equation for plane stress (strain) is the main teaching content of the stress (strain) analysis of the mechanics of materials. Although the transformation equation is derived based on the specific stress (strain) state, it is not limited to the plane stress (strain) state in various applications, including examples and exercises. In order to clarify students' common doubts, this paper uses a simple method to explain the problem so as to provide reference for teaching.

Keywords　stress state, strain state, formula of axis of rotation

1　问题的由来

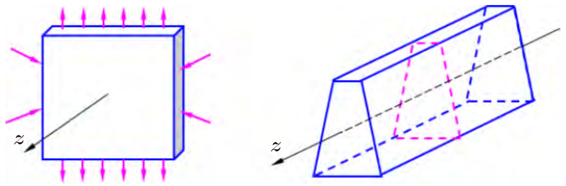
应力应变状态分析是材料力学课程（包括后续固体力学类课程）的重要内容之一，其中广为熟知也是占据绝大部分教材篇幅的教学内容，是平面问题的应力与应变转轴公式推导和应用。

在材料力学课程体系中，应力应变状态分析是强度理论的基础，其核心是找寻复杂应力应变状态的特征参量，即获取具有代表性、数量最少的表征参数描述复杂应力应变状态。为了展示分析思路，采用平面问题的模型无论在图形绘制清晰性还是推导过程简洁性方面都是不错的选择，当然，工程中也有大量实际问题满足平面问题的特征。

在固体力学领域，所有的教师都熟知平面问题分为平面应力问题与平面应变问题，也有工程

2021–10–11 收到第 1 稿，2021–12–14 收到修改稿。
1) 中科院先导项目（XDA22000000）资助。
2)E-mail：wmchen@imech.ac.cn
引用格式: 李敏, 李依伦, 陈伟民. 平面问题转轴公式适用性的讨论. 力学与实践, 2022, 44(3): 646-650
Li Min, Li Yilun, Chen Weimin. Discussion on the applicability of transformation equations for plane problem. *Mechanics in Engineering*, 2022, 44(3): 646-650

形象化称谓——前者为薄板问题，后者为水坝问题，两种平面问题的示意图如图 1 所示。



(a) 平面应力状态　　(b) 平面应变状态

图 1　平面问题示意图

平面应力状态

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \tag{1}$$

平面应变状态

$$\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \tag{2}$$

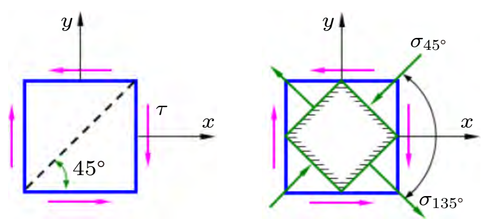
在笔者多年的上课、答疑与听课过程中，该部分容易引发学生疑惑的部分出现在转轴公式的典型应用，例如利用纯剪状态（图 2）推导各向同性材料弹性模量 E 、剪切模量 G 与泊松比 μ 的关系，这几乎是所有材料力学教材中都会出现的例题[1-4]，该问题的证明过程一般都会同时使用应变转轴公式与广义胡克定律

$$\varepsilon_{45^\circ} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 90^\circ - \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 90^\circ = -\frac{\gamma_{xy}}{2} = -\frac{\tau}{2G} \tag{3}$$

$$\varepsilon_{45^\circ} = \frac{1}{E}(\sigma_{45^\circ} - \mu\sigma_{135^\circ}) = \frac{1}{E}(-\tau - \mu\tau) = -\frac{1+\mu}{E}\tau \tag{4}$$

因此

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \tag{5}$$



(a)　　(b)

图 2　纯剪状态与应力应变分析

其中值得探究的问题是：图 2 所示的纯剪状态很明显是平面应力状态，但推导过程中使用了平面应变状态的应变转轴公式（式（3）），由平面应变状态获得的应变转轴公式是否可用于平面应力问题？与之对应的问题是由平面应力状态获得的应力转轴公式是否可用于平面应变问题？

除此之外，在材料力学教学实验与工程结构变形实测中，使用应变花测量物体表面的应变状态是电测法的常见模式。被测对象中处于平面应力状态的不是少数，特别是航空航天结构基本全是薄板，但是应变花的理论基础是平面应变状态获取的应变转轴公式。

这个问题之所以容易引发学生疑惑，主要原因在于教师讲解平面问题两种转轴公式之前，都会着重论述平面应力状态与平面应变状态是完全不同的两种状态，往往还会使用式（1）与式（2）结合图 1 进行比较，而后期使用转轴公式时却基本没有阐述“跨域”使用的原因。

2　问题的解释

理论上，转轴公式是应力（应变）分量在不同坐标系下的转换关系（弹性力学表述），或者某一点不同方位应力（应变）的表征（材料力学表述），这种转换关系或表征并不依赖于具体的应力（应变）状态。尽管转换关系总是成立的，但转换关系的具体表达式（例如转换矩阵中的系数）是否依赖于应力（应变）状态？换言之，处于平面应力（应变）状态下不同方位的应变（应力）之间一定有关联，但这种关系是否满足平面应变（应力）状态下得到的应变（应力）转轴公式？这是本文希望澄清的问题。

2.1　从平面应力到平面应变

首先说明由平面应力状态获得的应力转轴公式，是否适用于平面应变状态。

对于平面应变状态，由其应变特征（式（2））以及广义胡克定律（考虑到材料力学教学内容，以下讨论中使用各向同性材料的广义胡克定理，不涉及各向异性材料应力应变关系转换）

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z), \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_z - \mu\sigma_x), \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_x - \mu\sigma_y), \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx}
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

可知 $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$， $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$，一般情况下，其微体的应力状态如图 3 所示，类似图像经

常出现在求解主应力的例题与习题中，唯一的差异是 σ_z 并不是任意取值，其与 σ_x 和 σ_y 保持特定的关系。但这种差异并不影响针对该微体的平衡分析方法：在任一平行于 z 轴剖面（图 3（b）中 α 面）获取的部分微体力平衡分析中，z 向的力平衡自动满足，且不参与 x–y 面内的力平衡分析，即 σ_z 是否为零与应力转轴公式的推导过程无关。所以结论很清晰：由平面应力状态下推导的应力转轴公式可以用于平面应变状态，公式形式无需修改。

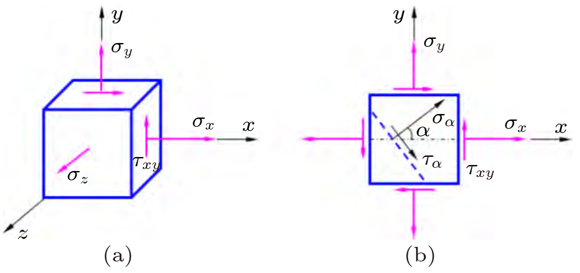


图 3　平面应变状态的微体应力分析示意图

2.2　从平面应变到平面应力

其次，证明由平面应变状态获得的应变转轴公式是否可用于平面应力状态。

比较平面应力微体与平面应变微体，面内应变的差异在于 σ_z 对 ε_x 与 ε_y 的影响，平面应变问题中

$$\begin{aligned}\varepsilon_x =& \frac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y-\mu\sigma_z)=\\ &\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\mu\sigma_y-\mu^2(\sigma_x+\sigma_y)\right]=\\ &\frac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_x-\frac{\mu}{1-\mu}\sigma_y\right)\end{aligned} \tag{7}$$

同理

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_y &= \frac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_y-\frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x\right)\\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

对于平面应力问题

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y)\\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_x)\\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

如果进行材料参数替换：$E\to\dfrac{E}{1-\mu^2}$，$\mu\to\dfrac{\mu}{1-\mu}$，平面应力问题与平面应变问题应力应变关系的形式完全一致，这是弹性力学中常规教学内容。

关于应变转轴公式的适用范围，材料力学经典教材均有以下或类似的描述：“应变分析建立在几何关系的基础上，因此所得各结论适用于任何小变形问题，而与材料的力学性能无关”[3]，换言之，材料弹性模量和泊松比的具体数值并不影响转轴公式的具体形式，所以由平面应变状态下推导的应变转轴公式应该可以用于平面应力状态。

也许部分读者认为以上的论述不够严密，这里给出一个推导过程，在平面应力状态下根据广义胡克定律与平面应力转轴公式（采用材料力学正负号模式）

$$\begin{aligned}\varepsilon_\alpha =& \frac{1}{E}\left(\sigma_\alpha-\mu\sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}\right)=\\ &\frac{1}{E}\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos(2\alpha)-\tau_{xy}\sin(2\alpha)\right)-\\ &\frac{\mu}{E}\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos(2\alpha)+\tau_{xy}\sin(2\alpha)\right)=\\ &\frac{1}{E}\left[(1-\mu)\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+(1+\mu)\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos(2\alpha)-\right.\\ &\left.(1+\mu)\tau_{xy}\sin(2\alpha)\right]\end{aligned} \tag{10}$$

使用广义胡克定律，对于以下应变进行代换（应变转轴公式的应变组合形式）

$$\begin{aligned}&\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos(2\alpha)-\frac{\gamma_{xy}}{2}\sin(2\alpha)=\\ &\quad\frac{1}{2E}(\sigma_x-\mu\sigma_y+\sigma_y-\mu\sigma_x)+\\ &\quad\frac{1}{2E}(\sigma_x-\mu\sigma_y-\sigma_y+\mu\sigma_x)\cdot\\ &\quad\cos(2\alpha)-\frac{1+\mu}{E}\tau_{xy}\sin(2\alpha)=\\ &\quad\frac{1-\mu}{E}\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{1+\mu}{E}\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cdot\\ &\quad\cos(2\alpha)-\frac{1+\mu}{E}\tau_{xy}\sin(2\alpha)=\\ &\quad\frac{1}{E}\left[(1-\mu)\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+(1+\mu)\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cdot\right.\\ &\quad\left.\cos(2\alpha)-(1+\mu)\tau_{xy}\sin(2\alpha)\right]\end{aligned} \tag{11}$$

所以

$$\varepsilon_\alpha=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos(2\alpha)-\frac{\gamma_{xy}}{2}\sin(2\alpha) \tag{12}$$

由以上推导可知，在平面应力状态下，面内任意一点不同方位的应变表达形式与平面应变状态下的表达形式完全一致。

事实上，基于平面应变状态推导应变转轴公式，国内经典教材有不同的描述，例如刘鸿文教

授主编的教材[1] 中明确指出："这里所指的平面应变状态，其实是平面应力所对应的应变状态。它与弹性力学中习惯上所说的平面应变并不完全相同，因为弹性力学中的平面应变要求 $\varepsilon_z=\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0$"；而单辉祖教授主编的教材[3] 中对于所研究的平面应变状态定义为："当构件内一点处的变形均发生在同一平面时，则称该点处于平面应变状态"，该描述与弹性力学的平面应变定义一致。笔者认为，刘鸿文教授采用平面应力状态推导应变转轴公式也是不错的方法，因为材料力学教材中涉及到的平面问题（例题与习题）均为平面应力问题，如果应力应变的转轴公式均基于平面应力状态，学生在学习时不会有适用范围的疑惑。当然，如果应变转轴公式基于平面应力状态导出，在弹性力学标准的平面应变状态下，其形式的一致性仍然可用上述方法证明，在平面应变状态下根据广义胡克定律与应力转轴公式（前面已经证明应力转轴公式可用于平面应变状态）

$$\begin{aligned}\varepsilon_\alpha=&\frac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_\alpha-\frac{\mu}{1-\mu}\sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}\right)=\\&\frac{1-\mu^2}{E}\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos(2\alpha)-\tau_{xy}\sin(2\alpha)\right)-\\&\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\mu}{1-\mu}\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos(2\alpha)+\tau_{xy}\sin(2\alpha)\right)=\\&\frac{1-\mu^2}{E}\left[\frac{1-2\mu}{1-\mu}\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{1}{1-\mu}\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cdot\right.\\&\left.\cos(2\alpha)-\frac{1}{1-\mu}\tau_{xy}\sin(2\alpha)\right]\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos(2\alpha)-\frac{\gamma_{xy}}{2}\sin(2\alpha)=\\&\quad\frac{1-\mu^2}{E}\frac{1-2\mu}{1-\mu}\frac{(\sigma_x+\sigma_y)}{2}+\frac{1-\mu^2}{E}\frac{1}{1-\mu}\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cdot\\&\quad\cos(2\alpha)-\frac{1+\mu}{E}\tau_{xy}\sin(2\alpha)=\\&\quad\frac{1-\mu^2}{E}\left[\frac{1-2\mu}{1-\mu}\frac{(\sigma_x+\sigma_y)}{2}+\frac{1}{1-\mu}\frac{(\sigma_x-\sigma_y)}{2}\cdot\right.\\&\quad\left.\cos(2\alpha)-\frac{1}{(1-\mu)}\tau_{xy}\sin(2\alpha)\right]\end{aligned}\tag{14}$$

所以$$\varepsilon_\alpha=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos(2\alpha)-\frac{\gamma_{xy}}{2}\sin(2\alpha)\tag{15}$$

即二者的表达形式完全一致。

2.3 从平面问题到空间问题

更进一步的问题是：对于所有复杂应力状态，平面转轴公式是否可用？当然，这里的转动还是限定于绕 z 轴，即剖面平行于 z 轴的应力应变表达。对于图 4 中平行于 z 轴的任意剖面，其外法线与 x 轴夹角为 α，研究该方位的正应力与切应力。

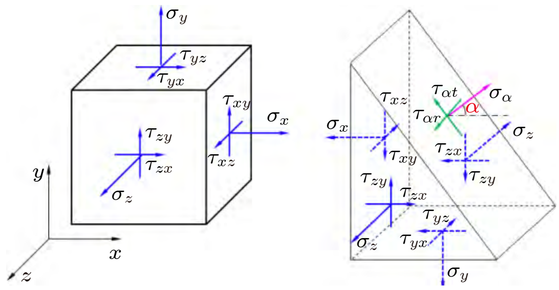


图 4　复杂应力状态微体与平行于 z 轴任意剖面应力分析示意图（局部放大）

以 α 面正应力 σ_α 为例，在 α 面外法矢方向的力平衡中（图 4(b)），z 方向的应力所组成的内力不参与，包括 z 面的 σ_z、x 面的 τ_{xz} 与 y 面的 τ_{yz}；另外 z 面正向与 z 面负向的 τ_{zx} 和 τ_{zy} 所组成的内力相互抵消也不出现在力平衡方程中，以上的情况对于面内切应力 $\tau_{\alpha t}$ 完全相同。以上分析表明该方向平衡方程的形式与平面应力模型完全一致，所以，平面应力状态下推出的应力转轴公式可表征任意应力状态下平行于面外轴线剖面上的应力。

如果授课教师已经讲述过应力张量（应变张量）的坐标分量变换公式

$$\begin{bmatrix}\sigma_\alpha&\tau_{t\alpha}&\tau_{r\alpha}\\\tau_{\alpha t}&\sigma_t&\tau_{rt}\\\tau_{\alpha r}&\tau_{tr}&\sigma_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_x&\alpha_y&\alpha_z\\t_x&t_y&t_z\\r_x&r_y&r_z\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sigma_x&\tau_{yx}&\tau_{zx}\\\tau_{xy}&\sigma_y&\tau_{zy}\\\tau_{xz}&\tau_{yz}&\sigma_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_x&t_x&r_x\\\alpha_y&t_y&r_y\\\alpha_z&t_z&r_z\end{bmatrix}\tag{16}$$

对于平行于 z 轴的任意剖面，$\alpha_x=\cos\alpha$，$\alpha_y=\sin\alpha$，$\alpha_z=0$，$t_x=-\sin\alpha$，$t_y=\cos\alpha$，$t_z=0$，$r_x=r_y=0$，$r_z=1$，代入可以获得与平面应力状态完全一致的转轴公式，例如 σ_α 表达式为（应力张量转换使用弹性力学的正负号规则，所以表达式中切应力前符号为正）

$$\sigma_\alpha=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos(2\alpha)+\tau_{xy}\sin(2\alpha)\tag{17}$$

按照完全类似的方式，同样可以说明应变转轴公式的适用性，这里不再赘述。

3 小结

转轴公式表征不同方位物理量之间的转换关系，理论上，无论基于力平衡的应力分量转换，还是基于小变形下几何关系的应变分量转换，均与材料性能无关，也与应力应变状态无关。为了推导过程的简洁与分析图像的清晰，材料力学教材使用平面应力（应变）状态推导应力（应变）转轴公式是十分自然的，但是这种转换关系的具体形式，例如基于平面应力（应变）状态下的应力（应变）转轴公式，能否涵盖所有应力（应变）状态，特别是材料力学教材中例题与习题经常出现的应力（应变）状态，这是本文讨论的问题。

本文针对绕 z 轴的转动情况，通过简单的转换分析，说明：

（1）由平面应力状态获得的应力转轴公式可用于平面应变状态（也适用于一般性的复杂应力状态）；

（2）由平面应变状态获得的应变转轴公式可用于平面应力状态（也适用于一般性的复杂应变状态）。

另外，对于涉及到该问题的教学有两点建议：

（1）如果考虑到本科学生的力学理论基础（特别是非力学专业本科学生），可以使用刘鸿文主编教材[1] 的模式，即应力与应变转轴公式均基于平面应力状态推导，避免在公式使用过程中引入适用性问题；

（2）如果教学中仅出现纯剪状态的分析，使用应力应变关系可以说明纯剪状态既是平面应力状态，也是平面应变状态，也可避免有关公式适用性讨论。

参 考 文 献

1 刘鸿文. 材料力学, 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2011
Liu Hongwen, Mechanics of Materials, 5th edn. Beijing: Higher Education Press, 2011(in Chinese)
2 孙训方. 材料力学, 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2009
Sun Xunfang. Mechanics of Materials, 5th edn. Beijing: Higher Education Press, 2009 (in Chinese)
3 单辉祖. 材料力学, 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2010
Shan Huizu. Mechanics of Materials, 3rd edn. Beijing: Higher Education Press, 2010 (in Chinese)
4 Gere JM. Mechanics of Materials, 第 5 版. 北京: 机械工业出版社, 2003
Gere JM. Mechanics of Materials, 5th edn. Beijing: Machinery Industry Press, 2003 (in Chinese)

(责任编辑: 胡 漫)