

# 材料力学冲击问题中结构参数影响的讨论<sup>1)</sup>

李 敏\* 李依伦† 陈伟民\*\*,††,2)

\* (北京航空航天大学航空科学与工程学院, 北京 100191)

† (巴黎-萨克雷大学, 巴黎 91190)

\*\* (中国科学院力学研究所, 北京 100190)

†† (中国科学院大学工程科学学院, 北京 100049)

**摘要** 结构承受位于一定高度重物无初速度释放的冲击响应是材料力学动应力部分的主体教学内容, 其结构形式的多样性, 特别是结构单独承受冲击与缓冲组合结构承受冲击两种模式的差异, 容易造成学生在规律理解上出现疑惑。本文通过几个经典例题剖析各组成部分的作用, 结合基本公式的参数方次分析, 为教学活动中解释相关问题提供参考。

**关键词** 动载荷, 冲击缓冲, 合理设计

中图分类号: O341 文献标识码: A doi: 10.6052/1000-0879-22-019

## DISCUSSION ON THE INFLUENCE OF STRUCTURAL PARAMETERS OF IMPACT PROBLEM IN MECHANICAL OF MATERIALS<sup>1)</sup>

LI Min\* LI Yilun† CHEN Weimin\*\*,††,2)

\* (School of Aeronautic Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

† (Paris-Saclay University, Paris 91190, France)

\*\* (Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

†† (School of Engineering Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

**Abstract** It is the main teaching content of the dynamic response part in mechanics of materials that the structure is subjected to the drop impact of object without initial velocity. The diversity of structural forms, especially the difference between structure withstanding impact independently and with buffer structure, tends to cause confusion in conceptual understanding. This paper analyzes the function of each component through several classic examples, combined with the parameter analysis of the basic formula, to provide reference for explaining related problems in teaching activities.

**Keywords** dynamic load, impact buffer, reasonable design

冲击问题作为能量方法的应用扩展, 尽管在材料力学中所占篇幅不多, 但代表载荷属性的另一种典型模式, 在分析方法与现象表征方面有其特色。材料力学冲击问题的重点讲授内容是分析梁结构承受位于一定高度  $H$  重物无初速度释放的冲击响应 (主要是位移与载荷), 基本公式为

$$\Delta_d = \Delta_{st} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{st}}} \right) = K_d \Delta_{st} \quad (1)$$

其中  $\Delta_d, \Delta_{st}$  与  $K_d$  分别为动态位移、静态位移与动荷因数。学生对于利用基本公式解算习题一般不存在问题, 也能根据冲击响应随静态位移变化的规律判断相关结构的危险程度, 其中核心理念是尽量降低结构刚度或增加静态位移, 达到降低

本文于 2022-01-10 收到。

1) 中科院先导项目资助 (XDA22000000)。

2) E-mail: wmchen@imech.ac.cn

**引用格式:** 李敏, 李依伦, 陈伟民. 材料力学冲击问题中结构参数影响的讨论. 力学与实践, 2022, 44(4): 935-940

Li Min, Li Yilun, Chen Weimin. Discussion on the influence of structural parameters of impact problem in mechanical of materials. *Mechanics in Engineering*, 2022, 44(4): 935-940

冲击响应的目的。

根据基本公式, 以上的描述应该是正确的, 但纵向比较时, 学生对于这种结论也存在疑惑之处: 根据前期已经学习的知识或者直观感受, 结构变形大对应着应变(应力)大, 造成变形的外力也应该大, 这与上面的结论似乎相悖。结合例题更为具体化地表述: 结构变形大对应着冲击重物下降更多距离, 更多机械能转化为被冲击梁结构的应变能, 为什么冲击造成的应力反而越小?

造成学生疑惑有多方面原因, 其中学生对于动态问题和使用能量法分析问题的能力弱于静力学分析是重要原因, 另外被冲击主结构与缓冲装置在讲述中分类不清也是一个方面。回答这类问题完全采用概述方式效果不佳, 本文试图基于常见的例题习题进行进一步地分析, 让学生从数据比较中总结归纳, 找到自我说服的逻辑。

为了契合学生对教学内容的熟悉程度, 本文首先列举简单例题和习题并挖掘其中的机理, 然后通过一般性表达式进行定性定量分析。

## 1 典型例题的进一步分析

### 1.1 附加结构在边界点支撑主结构

为了说明缓冲结构的效果, 冲击问题中常用简支梁  $AB$  (图 1(a)) 与弹簧支撑梁 (图 1(b)) 中点承受重物冲击进行比较<sup>[1-2]</sup>, 图中梁的弹性模量  $E$ , 长度  $l$ , 矩形截面  $h \times b$ , 重物重量  $F = mg$ , 与梁轴距离  $H$ , 支撑弹簧刚度  $k$  均已知。

该例题的解算步骤很清晰, 常见简洁模式如下。

(1) 梁  $AB$  中点垂直方向的静刚度  $k_1 = 48EI/l^3$ , 弹簧静表现刚度  $k_2 = 2k$ 。

(2) 对于简支状态 (图 1(a))

$$F(H + \Delta_{d1}) = \frac{1}{2}k_1\Delta_{d1}^2 \quad (2)$$

其中  $\Delta_{d1} = \Delta_{st1}(1 + \sqrt{1 + 2H/\Delta_{st1}})$ , 为梁  $AB$  中点垂直方向最大动态位移;  $\Delta_{st1}$  为该点静态位移。

(3) 对于弹簧支撑状态 (图 1(b))

$$F(H + \Delta'_{d1} + \Delta_{d2}) = \frac{1}{2}k_1\Delta'_{d1}{}^2 + \frac{1}{2}k_2\Delta_{d2}^2 \quad (3)$$

其中  $\Delta'_{d1}$  是梁  $AB$  弹性变形导致中点最大垂直位移 (与上面的  $\Delta_{d1}$  有差异, 因为冲击载荷不同),

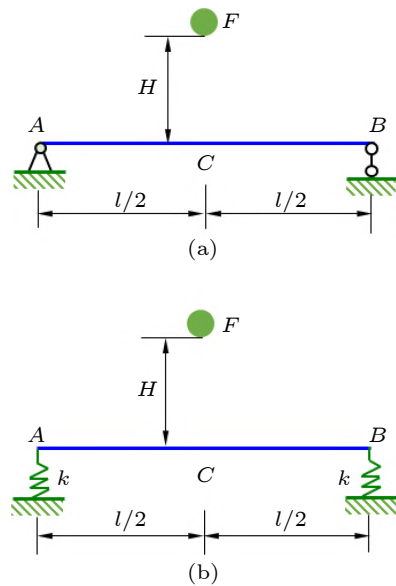


图1 展示缓冲效果的典型例题

$\Delta_{d2}$  为支撑弹簧的最大位移(变形)。

后续的解算过程与数据不再列出, 对比式 (2) 与式 (3), 很明显后者(有弹簧支撑)的机械能损失多出一项  $F\Delta_{d2}$ , 除非支撑弹簧储存的弹性势能  $k_2\Delta_{d2}^2/2$  大于由于弹簧带来的重物位置势能增量  $F\Delta_{d2}$ , 否则很难理解弹簧支撑的作用, 因为有弹簧支撑后重物下降了更多高度, 表明输入给系统的冲击能量增加了。由于

$$F\Delta_{d2} = k_2\Delta_{st2}\Delta_{d2}, \quad \frac{1}{2}k_2\Delta_{d2}^2 = \frac{1}{2}k_2\Delta_{d2}\Delta_{d2} \quad (4)$$

所以只需证明  $2\Delta_{st2} < \Delta_{d2}$ , 事实上, 该结论的成立很明显(教材中关于冲击动荷因数讨论的要点): 除非重物无高度无初速释放时  $\Delta_{d2} = 2\Delta_{st2}$ , 否则  $\Delta_{d2} > 2\Delta_{st2}$  一定成立。

以上简单推导揭示的基本规律: 无论支撑弹簧的刚度如何, 只要支撑模式为“串联”方式, 则弹簧吸收的能量大于由于弹簧出现引入的额外机械能增量, 导致被冲击主结构(该例中的梁  $AB$ ) 由于冲击造成的应变能与变形均减小, 即图 1(b) 相比图 1(a), 梁的变形更小 ( $\Delta_{d1} > \Delta'_{d1}$ )。

### 1.2 附加结构在冲击点支撑主结构

1.1 节中出现了“串联”方式, 为了解释其含义, 这里列出另外一个常见习题<sup>[1]</sup> (图 2), 原题一般有两种情况, 这里只讨论  $\delta = 0$  即两根梁接触的情况, 两根简支梁完全相同, 各项参数均已知。

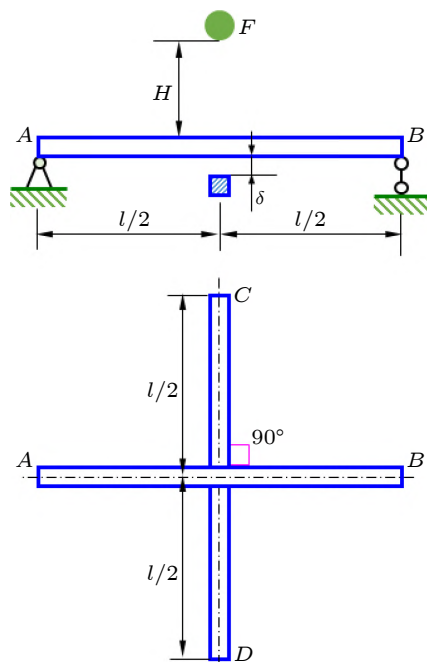


图 2 双梁组合冲击问题典型例题

这里比较两种模型：

(1) 模型一，简支梁 AB 和 CD 共同承受冲击；

(2) 模型二，仅有简支梁 AB 承受冲击。

模型一中梁 AB 和 CD 在冲击载荷作用下位移相同，其组合相当于等效弹簧“并联”方式，中点竖直方向表观刚度  $k_1 = 2k = 96EI/l^3$

$$F(H + \Delta_{d1}) = \frac{1}{2}k_1\Delta_{d1}^2 = \frac{1}{2}k\Delta_{d1}^2 + \frac{1}{2}k\Delta_{d1}^2 \quad (5)$$

这种模式可看作梁 AB 和 CD 各自承担一半质量的冲击过程，或者直接看作简支梁 AB 单独承受  $mg/2$  的冲击过程。

模型二中梁 AB 中点表观刚度  $k_2 = k$

$$F(H + \Delta_{d2}) = \frac{1}{2}k_2\Delta_{d2}^2 = \frac{1}{2}k\Delta_{d2}^2 \quad (6)$$

其中  $\Delta_{d2} = \frac{F}{k} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2Hk}{F}} \right)$ ，比较第一种模式中  $\Delta_{d1} = \frac{F}{2k} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4Hk}{F}} \right)$ ，得  $2\Delta_{d1} > \Delta_{d2} > \Delta_{d1}$ 。设  $\Delta' = \Delta_{d2} - \Delta_{d1}$ ，将式 (6) 改写为

$$F(H + \Delta_{d1} + \Delta') = \frac{1}{2}k(\Delta_{d1} + \Delta')^2 \quad (6a)$$

对比式 (6a) 与式 (5)，加入梁 CD 的作用表述为：

(1) 减小了机械能输入  $F\Delta'$ ，或减小了冲击能量；

(2) 分担了（吸收了）一部分机械能，分担部分与刚度成正比（此例中各自一半）。

### 1.3 两种附加结构缓冲模式的比较

以上两个题目代表了利用附加结构减缓主结构受冲击的两种典型模式，以主结构单独承受冲击为比较的标准（图 1(a) 和图 2 中的模型二）。

(1) 边界点支撑模式（串联模式）降低了整体表观刚度，导致冲击输入能量增加（重物下降高度增大），但附加结构（图 1 中的弹簧）存储的应变能超过冲击输入能量的增量，所以主结构（图 1 中的梁 AB）的应变能减小了，换言之，附加缓冲结构后主结构变形是减小的（这一点与学生直观感受不一样）。

(2) 冲击点支撑模式（并联模式）提高了整体表观刚度，导致冲击输入能量减少（重物下降高度减小），而且附加结构按照刚度比例吸收了一部分应变能，所以主结构（图 2 中的梁 AB）的应变能减小，对应的变形减小与直观感受一致。

(3) 以上的分析显示冲击点支撑模式对于减缓冲击似乎更有效，但须注意这种模式提高了接触点的冲击载荷，其效果没有出现在以上分析中的原因在于材料力学对冲击问题进行了简化假设：不考虑弹性波传播与冲击接触面塑性变形问题，所以附加结构（梁 CD）直接分担一半载荷，实际情况下使用边界支撑模式更合理。

另外，如果希望课堂讲授内容更具层次性，可以在两种模式中分别展示附加结构刚度变化的效果并进行比较，例如：

(1) 图 1 中随弹簧刚度增加，其极限就是主结构单独承受冲击（简支梁）；当弹簧刚度减小，弹簧在冲击过程中吸收应变能的比例增大，极限情况是主结构不变形。

(2) 图 2 中随着附加结构（梁 CD）刚度降低，极限情况是主结构（梁 AB）单独承受冲击；当附加结构刚度增大，在冲击过程中附加结构吸收应变能的比例增大，极限情况是主结构不变形（与图 1 模型规律正好相反）。

### 1.4 主结构单独承受冲击

1.3 节中提及当附加结构刚度取极大（或极小值）时，问题转变为主结构单独受冲击。事实上冲击问题引入时分析模型就是这种类型，只是

后续的例题习题多数附加缓冲结构削弱了这类问题的地位。

以 1.2 节的讨论为基础, 很容易理解承受冲击主结构刚度变化的效果, 以应变能或外力功的视角, 增加刚度就是在梁中心点添加等效刚度的梁  $CD$ , 减小刚度就是将梁分解为  $AB$  与  $CD$  (舍去)。对于结构刚度减小的状态 (刚度增大状态参照 1.2 节结论, 不再赘述), 参照应变能表达式

$$v_{\varepsilon,d} = \frac{1}{2} F_d \Delta_d = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{F} k} \right)^2 \quad (7)$$

或者应变能对结构刚度一阶导数

$$\frac{\partial v_{\varepsilon,d}}{\partial k} = \frac{F^2}{k^2} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{2H}{F} k} \right) \quad (8)$$

与具有附加缓冲结构模式相反, 主结构单独承受冲击时, 其应变能随结构刚度减小而单调增加, 尽管与静态问题中应变能反比例于结构刚度有差异, 但总趋势是反向非线性关系。

## 2 安全评估与合理设计

以上的讨论主要围绕应变能展开, 因为冲击问题在材料力学课程体系中更多作为能量方法的应用出现, 但归根结底材料力学的基本任务是解决安全性与经济性的矛盾, 所以在保证安全前提下的合理设计是终极目标。

从带有附加缓冲结构的例题习题中, 学生获得一种“感受”: 结构刚度越低、变形越大、冲击载荷越小, 结构就越安全, 这种结论是否全面? 试想: 纤细的梁受冲击会不会破坏?

在静态问题的强度分析中, 载荷为定值与结构参数无关; 而冲击问题中载荷与结构参数相关, 其强度和刚度分析模式与变化规律的展示有益于学生理解相关问题。

安全校核与合理设计的基础是应力、位移 (变形)、载荷 (关联接触应力与动态过程) 的基本公式, 为了便于理解与归类, 这里首先对冲击问题中各项公式进行简化。尽管理论上静态位移  $\Delta_{st}$  可以无限大, 但对于实际工程问题, 绝大部分情况下  $H$  远大于  $\Delta_{st}$  (物体或工具坠落等工程实例中前者一般在百毫米量级以上, 而后者

往往小于 1 mm, 甚至小于 0.1 mm), 所以二者比值  $H/\Delta_{st} \gg 1$ , 在此基础上可以对各项公式的形式进行简化, 例如第 1 节中列出的应变能可近似为

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon,d} &= \frac{1}{2} F \Delta_{st} (1 + \sqrt{1 + 2H/\Delta_{st}})^2 = \\ &= F (\Delta_{st} + H + \sqrt{\Delta_{st}^2 + 2H\Delta_{st}}) \approx \\ &= F (H + \sqrt{2H\Delta_{st}}) \approx FH \end{aligned} \quad (9)$$

与之类似, 基于  $H/\Delta_{st} \gg 1$ , 给出位移、应变、应力、外力、应变能 (外力功) 对各项参数的方次关系 (动态为近似关系, 静态为精确表达)

$$\Delta_d \approx f_{\Delta}^d \left( F^{\frac{1}{2}}, H^{\frac{1}{2}}, E^{-\frac{1}{2}}, l^{\frac{3}{2}}, h^{-\frac{3}{2}}, b^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (10a)$$

$$\Delta_{st} = f_{\Delta}^{st} (F, E^{-1}, l^3, h^{-3}, b^{-1}) \quad (10b)$$

$$\varepsilon_d \approx f_{\varepsilon}^d \left( F^{\frac{1}{2}}, H^{\frac{1}{2}}, E^{-\frac{1}{2}}, l^{-\frac{1}{2}}, h^{-\frac{1}{2}}, b^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (11a)$$

$$\varepsilon_{st} = f_{\varepsilon}^{st} (F, E^{-1}, l, h^{-2}, b^{-1}) \quad (11b)$$

$$\sigma_d \approx f_{\sigma}^d \left( F^{\frac{1}{2}}, H^{\frac{1}{2}}, E^{\frac{1}{2}}, l^{-\frac{1}{2}}, h^{-\frac{1}{2}}, b^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (12a)$$

$$\sigma_{st} = f_{\sigma}^{st} (F, l, h^{-2}, b^{-1}) \quad (12b)$$

$$F_d \approx f_F^d \left( F^{\frac{1}{2}}, H^{\frac{1}{2}}, E^{\frac{1}{2}}, l^{-\frac{3}{2}}, h^{\frac{3}{2}}, b^{\frac{1}{2}} \right) \quad (13a)$$

$$F_{st} = f_F^{st} (F) \quad (13b)$$

$$v_{\varepsilon,d} \approx f_{v_{\varepsilon}}^d (F, H) \quad (14a)$$

$$v_{\varepsilon,st} = f_{v_{\varepsilon}}^{st} (F^2, E^{-1}, l^3, h^{-3}, b^{-1}) \quad (14b)$$

通过静态与动态参数影响规律的比较, 除了参数方次有变化, 有些关系可能与过去的直观感受不同, 例如在静态问题中应力应变与梁的长度成正向比例关系, 但在动态问题中属于反向关系; 又如在静态问题中梁内应力与材料参数无关, 但在动态问题中与材料参数  $E$  相关; 另外在静态问题中刚度越大的结构存储应变能的能力越弱, 但动态冲击问题中大部分情况 ( $H/\Delta_{st} \gg 1$ ) 结构存储的应变能与结构材料和几何参数基本无关。

以上动态问题中当  $H \rightarrow 0$  时, 位移、应力、应变与载荷的下极限是 2 倍静态值, 应变能与外力功的下极限是 4 倍静态值, 此处不再赘述。

以上的公式与讨论对于常规教学不是必须的, 但针对材料力学主体任务——解决经济性与安

全性矛盾而言，其中部分公式可以解答学生疑惑，例如式 (12a) 显示，为了保证应力小于许用值的强度条件，当已知  $F, H, E, L$  要求设计截面尺寸时， $A = h \times b$  有确定的最小值，即梁的截面并不是越小越好，尽管基于降低动荷因子  $K_d$  的要求，希望更小的截面面积  $A$ 。所以，对于本节之初提出问题的结论是明确的：在冲击问题结构设计中应该减小结构刚度以降低冲击载荷，但其下限须保证动应力小于许用值所对应的几何参数。

更进一步，减小冲击载荷对于减缓冲击过程、避免接触面塑性变形都很重要（尽管在材料力学冲击部分没有涉及该方面的内容），根据式 (13a)，由于截面高度  $h$  与宽度  $b$  在动载荷中的地位不同，在保证  $A = h \times b$  不变的同时，应该尽量降低  $h$ 。

事实上，关于这个问题教材上也有例证<sup>[1]</sup>：在弯曲梁强度合理设计时有等强设计方法，中点承载简支梁的等强截面可以变化高度  $h$ （图 3(a)），也可以变化宽度  $b$ （图 3(b)），工程实际中使用变宽度模式并沿图 3(b) 中虚线分割后不焊不铆叠合形成看似变高度的等强度梁（图 3(c)）。

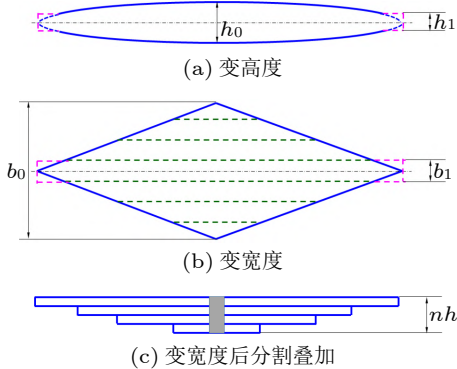


图 3 等强设计的不同模式示意图

变宽度分割叠合模式的最大惯性矩（单层厚度为  $h$ ，最厚处  $n$  层）

$$I_{\max} = n \frac{b_1 h^3}{12} \tag{15}$$

对比相同形状变高度梁的最大惯性矩

$$I'_{\max} = \frac{b_1 (nh)^3}{12} = n^3 \frac{b_1 h^3}{12} \tag{16}$$

二者比值为  $I'_{\max}/I_{\max} = n^2$ ，换言之这种变宽度分割叠合的模式在保证等强度设计的同时，极大降低了结构的弯曲刚度，有益于缓解冲击载荷，

这就是广泛应用于车辆和机械设备的叠板弹簧（图 4），这种模式与第 1 节的附加缓冲结构有相通之处，而且其形式介于边界支撑与冲击点支撑之间。在讲解冲击问题基本原理与例题后，回顾以往的知识并进行扩展，对于学生加深知识理解、认知理论应用是一种较好的课程内容设计模式。

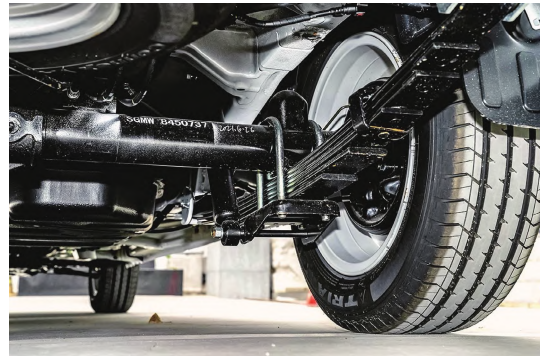


图 4 车用弹簧钢板位置安装图

另外，本节讨论基于  $H/\Delta_{st} \gg 1$ ，为了涵盖由于假设带来的范围缺失，这里利用教科书中例题对应数据<sup>[1]</sup>进行变参数分析，图 5 与图 6 分别对应  $H/\Delta_{st}$  与  $E$  的影响。其中，图 5 纵轴左侧为动荷因子  $K_d$  的标尺，纵轴右侧为归一化动态位移  $\Delta_d/H^{1/2}$  与应变能  $V_e$ （外力功）的标尺（采用  $H/\Delta_{st}$  最大值对应的  $\Delta_d/H^{1/2}$  或  $V_e$  进行归一化）；图 6 横轴为使用最大值归一化的  $E$ ，纵轴右侧为  $\Delta_d \times E^{1/2}$  和  $V_e$ ，使用最大  $E$  对应量归一化（ $\Delta_d/H^{1/2}$  与  $\Delta_d \times E^{1/2}$  的来历依据式 (10a)）。

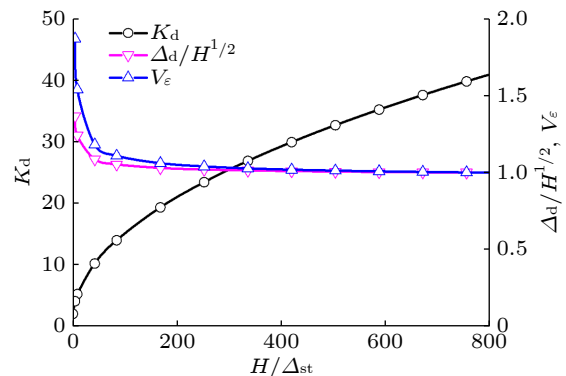


图 5 动态效果随  $H/\Delta_{st}$  的变化

图中数据显示，对于冲击高度与结构刚度的大幅度变化范围，尽管对应的冲击动荷因数有明显变化，但  $\Delta_d/H^{1/2}$ ， $\Delta_d \times E^{1/2}$ ， $V_e$  的归一化数据在绝大部分范围非常接近 1，证明以上根

据  $H/\Delta_{st} \gg 1$  进行的简化分析具有较广的适应性 ( $\sigma_d$  与  $\varepsilon_d$  有类似的规律, 不再列出)。

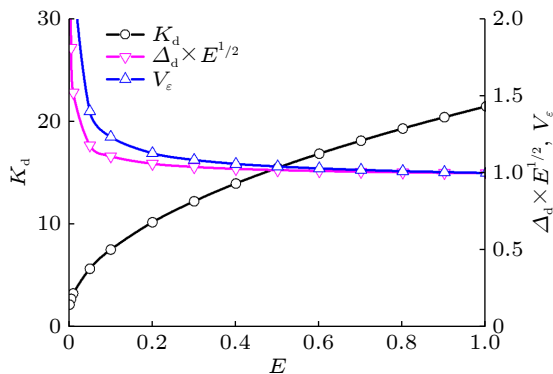


图6 动态效果随  $E$  的变化

### 3 小结

在材料力学动载荷教学内容中, 结构受位于一定高度重物无初速度释放的冲击响应是重点, 初期的理论分析针对单独的简支梁模型, 但后期的例题与习题多为带有缓冲装置的组合结构, 尽管基本公式通用, 但其中的参数影响规律不同。本文通过经典实例的深入分析与参数方次影响的定性定量展示, 说明了不同模型冲击响应的规律与差异。

对于单独的结构承受冲击, 结构应变能与结构刚度呈非线性关系, 在绝大部分工程冲击问题中应变能与  $\Delta_{st}$  弱相关, 尽管降低结构刚度对于减缓冲击载荷非常有效, 但其下限须保证强度条件对应的结构几何尺寸, 且依据参数方次关系可以指导合理化设计方向。

带有缓冲装置的组合结构承受冲击, 缓冲装置位于边界点的模式降低了整体表观刚度, 冲击输入能量增加, 但附加结构存储的应变能超过冲击输入能量的增量, 所以附加缓冲结构后, 主结构变形减小; 缓冲装置位于冲击点, 提高了整体表观刚度, 冲击输入能量减少, 附加结构按照刚度比例吸收应变能, 对应的变形减小, 但冲击载荷较大容易造成接触表面塑性变形。

### 参 考 文 献

- 1 单辉祖. 材料力学, 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2010  
Shan Huizu. Mechanics of Materials, 3th edn. Beijing: Higher Education Press, 2010 (in Chinese)
- 2 孙训方. 材料力学, 第5版. 北京: 高等教育出版社, 2009  
Sun Xunfang. Mechanics of Materials, 5th edn. Beijing: Higher Education Press, 2009 (in Chinese)

(责任编辑: 胡 漫)