

# 带有任意弹性支撑的大型有面外支撑杆 X 撑结构屈曲分析

崔哲华<sup>1,2,3</sup>, 康元顺<sup>1,3</sup>, 张伟为<sup>1,2,3</sup>, 曾晓辉<sup>1,3</sup>

(1. 中国科学院力学研究所, 北京 100190; 2. 中国科学院大学未来技术学院, 北京 100049; 3. 中国科学院大学工程科学学院, 北京 100049)

**摘要:** X 型支撑结构已成为许多超大型建筑主要承载部件, 如设计使用不当, 将有可能发生由支撑杆的屈曲失稳而引发的结构坍塌变形。在极限荷载下, X 撑杆的屈曲失稳本质上属于典型的多跨压杆稳定问题, 其极限承载力与撑杆的结构组成、几何参数以及端部约束密切相关。本文主要研究有(无)面外支撑的非对称交叉支撑体系在任意弹性支撑下 X 撑结构屈曲特性, 侧重于考察端部约束、受力形式、面外支撑刚度等因素的影响。首先基于线弹性理论框架, 建立了双跨受压杆件平衡方程, 利用牛顿迭代算法进行屈曲载荷计算。此外, 基于欧拉临界应力假设, 推导了两端固支的双跨受拉(压)杆件在跨中任意位置处的转角刚度计算公式, 从而得到跨中连续的非对称交叉支撑杆的有效长度因子数值解, 并对端点支撑刚度和跨中支撑刚度进行了敏感性分析。结合工程实践, 给出了杆件屈曲长度系数和临界屈曲载荷等关键设计参数。

**关键词:** 弹性支撑; 屈曲分析; 牛顿迭代法; 屈曲长度系数; X 撑结构

## BUCKLING ANALYSIS OF LARGE OUT-OF-PLANE X - BRACE STRUCTURE WITH ARBITRARY ELASTIC SUPPORT

CUI Zhe-hua<sup>1,2,3</sup>, KANG Yuan-shun<sup>1,3</sup>, ZHANG Wei-wei<sup>1,2,3</sup>, ZENG Xiao-hui<sup>1,3</sup>

(1. Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

2. School of Future Technology, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;

3. School of Engineering Science, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

**Abstract:** The x-braced structure has become the main connecting part of many super large buildings, the collapse deformation of the structure may be caused by the buckling instability of the support rod if it is not designed properly. Under ultimate load, the buckling instability of x-braced structure is a typical multi-span stability problem of columns in essence, and its ultimate bearing capacity is closely related to the structural composition, geometric parameters and end restraint of the strut. This paper mainly studies the buckling characteristics of x-braced structures with or without out-of-plane support under arbitrary elastic supports, focusing on the influence of end constraints, force forms and out-of-plane bracing stiffness. Firstly, based on the linear elastic theory framework, the equilibrium equation of double span compression bar was established, and the buckling load was calculated by newton iterative algorithm. In addition, based on Euler critical stress assumptions, the formula for calculating the angular stiffness of the double-span tension (compression) rod with fixed ends at any position in the span is derived, so as to obtain the numerical solution of effective length factor for continuous asymmetric cross struts in mid-span, and the sensitivity analysis of the end support stiffness and mid-span support

基金项目: 国家自然科学基金(11672306)

通讯作者: 曾晓辉(1972—), 男, 湖南人, 研究员, 博导, 主要从事结构动力响应、稳定性和流固耦合领域(E-mail: zzh@imech.ac.cn).

作者简介: 崔哲华(1998—), 男, 山西人, 博士生, 主要从事工程力学研究(E-mail: 648140597@qq.com);

康元顺(1997—), 男, 贵州人, 博士生, 主要从事工程力学研究(E-mail: kangyuanshun@imech.ac.cn);

张伟为(1996—), 男, 江苏人, 博士生, 主要从事工程力学研究(E-mail: zhangweiwei@imech.ac.cn).

stiffness is also carried out. Combined with engineering practice, the key design parameters such as buckling length coefficient and critical buckling load are given.

**Key words:** elastic support; buckling analysis; newton iteration method; buckling length coefficient; x-braced structure

X 型支撑结构因其具有良好的承载能力、抗侧性能、造价低廉且易于安装等优点,已广泛应用于现代工程建筑结构中,例如,海洋平台中导管架结构、桥梁工程中桁架梁桥的横向和纵向联接系、工业建筑中单层及多层厂房的屋盖和立柱结构、民用高层建筑中框架—支撑结构以及输电塔架的交叉斜材等<sup>[1]</sup>。伴随着现代建筑轻量化、多功能化的发展趋势,X 型支撑所受荷载形式也越来越复杂,如果设计、施工或应用不当,极有可能发生由支撑杆的屈曲失稳而引发的结构坍塌变形。同时从实际出发,避免因过度保守设计增加建造成本。因而需要进一步探究 X 型支撑在极限荷载环境下屈曲失稳机理,提高结构的承载力。

已有的研究中,X 撑的屈曲分析是基于线弹性屈曲理论并辅以数值计算进行的,即根据杆的受力分析建立其挠曲微分方程、其次代入杆的边界条件,通过求解特征值矩阵获得杆的屈曲长度系数<sup>[2]</sup>。针对海上导管架平台,国外学者 Knapp 和 Dixon 给出了任意跨中连接的 X 撑结构分别在两端简支和两端固定下的屈曲长度系数解,发现受压杆两端均为简支端时屈曲长度系数临界值趋近于 1.0,而受压杆两端均为固支端时屈曲长度系数临界值趋近于 0.5,即在固定端条件下更容易发生屈曲失稳,这表明当交叉构件提供的横向支撑得到适当利用时,可以有效提高结构的稳定性<sup>[3]</sup>。但是其结果仅仅适用于双杆截面属性和杆长相等的假设条件。Stoman 则考虑了更一般的情况,充分考虑了交叉杆的相对刚度以及受拉杆端约束条件,并基于能量法,得到了任意载荷比下受压撑杆临界载荷的封闭关系以及有效长度因子的解析表达式。根据计算公式,在任意约束条件下 X 撑杆的有效长度因子介于 0.35~1.0 之间<sup>[4-5]</sup>。Thevendran 针对非对称连接的 X 撑结构,基于能量法给出其受压构件临界屈曲载荷和有效长度系数,并得到了典型工况下 X 撑杆有效长度因子的曲线图<sup>[6]</sup>。Davaran 侧重考虑了中心连接对 X 撑结构平面外屈曲载荷的影响,给出了端部铰接、跨中铰接或半刚性(不连续)连接的 X 支撑有效长度因子的计算公式<sup>[7]</sup>。Moon 研究了拉压对角线在具有不同的截面特性、长度和轴向载荷时具有非连续连接的 X 撑系统的屈曲特性,给出了其有效长度因子的近似解<sup>[8]</sup>。朱永庆等针对国内外关于输电塔架中交叉斜材设计的计算长度因子进行了分析和验证,提出了斜材的布置、拉杆内力、受压和两杆交点变化对压杆稳定的影响,并给出相应的计算公式<sup>[9]</sup>。陈勇等针对一般非对称交叉支撑杆系的弹性屈曲临界荷载进行了数值分析,建立了有效长度因子的直接闭式经验方程,与理论计算结果相吻合<sup>[10-11]</sup>。目前针对具有面外支撑杆的 X 撑结构系统进行屈曲分析的研究较为少见,本组之前研究中只考虑了撑杆端部均为固定时的情形<sup>[12]</sup>。然而实际工程结构中撑杆端部支撑情况较为复杂,当端部无法提供适当的转动约束时,在极限荷载下使得撑杆屈曲方式发生改变,进而导致结构失效,因而在工程设计中,需要考虑更为一般地情形(任意弹性支撑),从而得到更具有工程实践意义的理论解。

目前工程实践中,对于海上导管架 X 撑结构设计,主要参考国外规范 API<sup>[13]</sup>、ISO<sup>[14]</sup>以及 ASCE<sup>[15]</sup>。而国内规范在这方面还有待发展。在已有的规范大多参照文献所给值,其分析方法是基于两端固支(铰支)的双跨受压杆件进行分析,在交点处仅考虑了平动刚度弹簧的约束,这种假设对于没有面外支撑的 X 撑结构是合理的。当在交点处存在面外支撑时,面外支撑杆的转动约束不能被忽略。此外,实际情况中端部约束一般不会是理想支座(固支、铰支),而应看作有限的平动刚度约束和有限的转动刚度约束组合。因此,本文主要侧重考察跨中带有任意线弹性的双跨受压杆件稳定性问题,基于数值计算给出了带有面外支撑杆 X 撑结构屈曲长度系数的理论推荐值,为指导工程设计提供理论支撑。

## 1 建模与求解

### 1.1 模型建立

在侧向力作用下,X 支撑的两条支撑对角线通常分别承受拉力和压力。利用初参数法对带有面外撑杆的 X 支撑进行理论分析和数值计算,这种 X 支撑的两条支撑对角线的交点处连接了一个面外撑杆。本研

究考察了两端任意线弹性支撑的双跨受压杆件稳定性问题,如图(1)。图中为两个对称的 X 支撑,  $AB = A'B'$ ,  $CE = C'E'$ , 面外撑杆  $DD'$  垂直于  $ABCD$  平面, 支撑对角线  $AB$  杆受压力作用,  $CE$  杆受拉力作用。为计算方便,假设  $A'B'$  杆与  $C'E'$  杆未受外力作用。采用不同长度的连续对角线考虑结构的几何不对称性,  $L_1+L_2 \neq L_1'+L_2'$ , 并且交点不一定在中点,  $L_1 \neq L_2 \neq L_1' \neq L_2'$ 。受力的不对称由两支撑对角线的不同受力情况进行考虑,  $|F| \neq |P|$ 。假设支撑对角线的弯曲刚度不一致考虑了材料的不对称,  $E_1 I_1 \neq EI$ 。其中模型可建模为任意线弹性的双跨受压杆件模型(图 2), 交点处和端点处均为任意线弹性支撑。

## 1.2 微分方程求解

在进行屈曲分析时, 支撑对角线( $CE$  杆)受到恒定轴力作用。因此, 支撑对角线将在连接处提供恒定的横向弹性支撑刚度  $K_D$  和转动弹性支撑刚度  $C_D$ <sup>[16]</sup>。

如图 1 所示, 在有面外支撑的 X 支撑系统中, 通过 Libove 等人提出的屈曲平面判定准则<sup>[17]</sup>,  $AB$  杆受压屈曲模式主要分为面内屈曲( $yoz$  平面)和面外屈曲( $xoy$  平面)两种情形。假设  $AB$  杆两端受压,  $CE$  杆两端受拉。针对受压杆  $AB$  进行受力分析, 依据端部约束条件, 可考虑两端铰支、固支和任意线弹性支撑的在交点处有横向支撑与转动支撑的计算模型。支撑刚度和由拉伸杆件或面外支撑杆件提供。

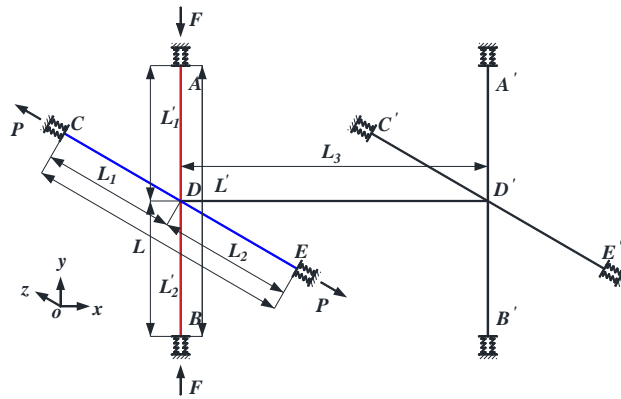


图 1 端点不同支撑情况的几何模型

首先假设杆件满足线弹性, 小变形条件,  $AB$  杆的弹性模量为  $E_1$ , 截面惯性矩为  $I_1$ ,  $CE$  杆的弹性模量为  $E$ , 截面惯性矩为  $I$ 。依据线弹性屈曲理论进行受力分析。

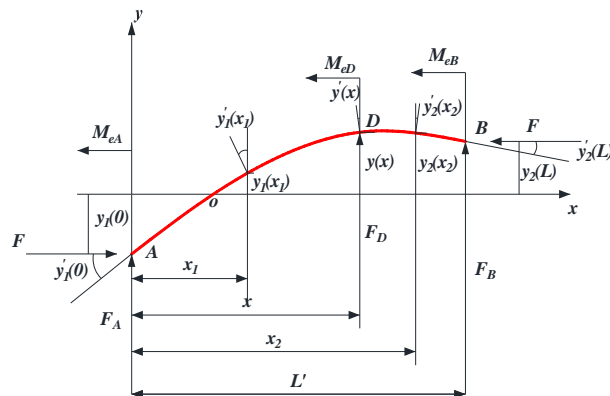


图 2 连续压缩杆件的分析模型

如图 2 所示, 建立平衡微分方程, 在  $AD$  段, 即  $0 \leq x_1 \leq x$  时, 控制微分方程为:

$$E_1 I_1 y_1''(x_1) = F_A x_1 - M_{eA} - F(y_1(x_1) - y_1(0)) \quad (1)$$

令  $\lambda'^2 = \frac{FL^2}{E_1 I_1}$ , 则  $y_1(x_1)$  的通解即  $AD$  段的挠曲线方程为( $a$ 、 $b$  为待定常数):

$$y_1(x_1) = a \cos\left(\frac{\lambda'}{L'} x_1\right) + b \sin\left(\frac{\lambda'}{L'} x_1\right) + \frac{F_A}{F} x_1 - \frac{M_{eA}}{F} + y_1(0) \quad (2)$$

上式对  $x_1$  取一阶导数, 可得  $AD$  段的转角方程:

$$y_1'(x_1) = -a \frac{\lambda'}{L'} \sin\left(\frac{\lambda'}{L'} x_1\right) + b \frac{\lambda'}{L'} \cos\left(\frac{\lambda'}{L'} x_1\right) + \frac{F_A}{F} \quad (3)$$

同理, 在  $BD$  段, 即  $x \leq x_2 \leq L'$  时, 挠曲线方程为( $c$ 、 $d$  为待定常数):

$$y_2(x_2) = c \cos\left(\frac{\lambda'}{L'} x_2\right) + d \sin\left(\frac{\lambda'}{L'} x_2\right) + \frac{F_B}{F}(L' - x_2) + \frac{M_{eB}}{F} + y_2(L') \quad (4)$$

同样对  $x_2$  取一阶导数, 可得  $BD$  段的转角方程:

$$y_2'(x_2) = -c \frac{\lambda'}{L'} \sin\left(\frac{\lambda'}{L'} x_2\right) + d \frac{\lambda'}{L'} \cos\left(\frac{\lambda'}{L'} x_2\right) - \frac{F_B}{F} \quad (5)$$

在式(2)、(3)中令  $x_1 = 0$ , 得到压杆  $A$  处的变形满足:

$$a - \frac{M_A}{F} = 0 \quad (6)$$

$$b \frac{\lambda'}{L} + \frac{F_A}{F} - y_1'(x) = 0 \quad (7)$$

在式(4)、(5)中令  $x_2 = L'$ , 得到压杆  $B$  处的变形满足:

$$c \cos(\lambda') + d \sin(\lambda') + \frac{M_B}{F} = 0 \quad (8)$$

$$-c \frac{\lambda'}{L} \cos(\lambda') + d \frac{\lambda'}{L} \sin(\lambda') - \frac{F_B}{F} - y_2'(L') = 0 \quad (9)$$

压杆在  $D$  处变形连续, 满足变形连续性条件, 即:

$$y_1(x) = y(x) = y_2(x) \quad (10)$$

$$y_1'(x) = y'(x) = y_2'(x) \quad (11)$$

在式(2)和式(3)中令  $x_1 = x$ , 得:

$$y_1(x) = a \cos\left(\frac{\lambda'}{L'} x\right) + b \sin\left(\frac{\lambda'}{L'} x\right) + \frac{F_A}{F} x - \frac{M_{eA}}{F} + y_1(0) \quad (12)$$

$$y_1'(x) = -a \frac{\lambda'}{L'} \sin\left(\frac{\lambda'}{L'} x\right) + b \frac{\lambda'}{L'} \cos\left(\frac{\lambda'}{L'} x\right) + \frac{F_A}{F} \quad (13)$$

在式(4)和式(5)中令  $x_2 = x$ , 得:

$$y_2(x) = c \cos\left(\frac{\lambda'}{L'} x\right) + d \sin\left(\frac{\lambda'}{L'} x\right) + \frac{F_B}{F}(L' - x) + \frac{M_{eB}}{F} + y_2(L') \quad (14)$$

$$y_2'(x) = -c \frac{\lambda'}{L'} \sin\left(\frac{\lambda'}{L'} x\right) + d \frac{\lambda'}{L'} \cos\left(\frac{\lambda'}{L'} x\right) - \frac{F_B}{F} \quad (15)$$

由静力平衡条件可知:

$$\sum F_y = 0: F_A + F_B + F_D = 0 \quad (16)$$

$$\sum M_o = 0: -F_A x + M_{eA} + M_{eB} + F_B(L' - x) + M_{eD} - y_1(0)F + y_2(L')F = 0 \quad (17)$$

根据线弹性屈曲理论, 杆端和连接处的变形符合胡克定律, 即:

$$F_i = K_i y(i) \quad (18)$$

$$M_i = C_i y'(i) \quad (19)$$

当  $i$  分别取  $0$ 、 $x$ 、 $L'$  时, 带入上式可得:

$$F_A + K_A y_1(0) = 0 \quad (20)$$

$$M_A + C_A y_1'(0) = 0 \quad (21)$$

$$F_D + K_D y(x) = 0 \quad (22)$$

$$M_D + C_D y_1'(x) = 0 \quad (23)$$

$$F_B + K_B y_2(L') = 0 \quad (24)$$

$$M_B + C_B y_2'(L') = 0 \quad (25)$$

在上式中, 支撑刚度系数  $K_A$ 、 $C_A$ 、 $K_D$ 、 $C_D$ 、 $K_B$  和  $C_B$  由端点连接杆件和面外支撑杆件提供。联立上述方程, 经整理化简可以得到一个关于 16 个参量的齐次线性方程组, 即  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $F_A/F$ 、 $F_B/F$ 、 $F_D/F$ 、 $M_A/F$ 、 $M_B/F$ 、 $M_D/F$ 、 $y_1(0)$ 、 $y_1'(0)$ 、 $y(x)$ 、 $y'(x)$ 、 $y_2(L')$ 、 $y_2'(L')$ , 有非零解的充要条件是方程组的系数行列式为零:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos kx & \sin kx & 0 & 0 & x & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -k \sin kx & k \cos kx & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos kx & \sin kx & 0 & 0 & 0 & 0 & L'-x & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k \sin kx & k \cos kx & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos kl & \sin kl & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k \sin kl & k \cos kl & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x & 1 & 0 & 1 & L'-x & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{K_A}{k^2 EI} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_A}{k^2 EI} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{K_D}{k^2 EI} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_D}{k^2 EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{K_B}{k^2 EI} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_B}{k^2 EI} \end{vmatrix} = 0 \quad (26)$$

在上式中, 中间支撑的刚度系数  $K_D$  和  $C_D$  由拉伸杆件杆或面外支撑杆件提供, 而  $K_A$ 、 $C_A$ 、 $K_B$  和  $C_B$  由端点约束决定,  $K = \infty$ ,  $C = 0$  代表铰支端约束,  $K = \infty$ ,  $C = \infty$  代表固定端约束。对端点弹性约束的数值分析, 将在本章第三节进行详细讨论。

### 1.3 面外支撑刚度计算

#### 1.3.1 线刚度 $K_D$

当  $AB$  杆发生面内( $yoZ$  平面)屈曲时, 线刚度由  $CE$  杆提供:

$$K_D = EA / L \quad (27)$$

当  $AB$  杆发生面外( $xoy$  平面)屈曲时, 由 Chen<sup>[11]</sup>的工作, 可知受拉(压)支撑对角线  $CE$  提供的线刚度为:

$$k_1 = \frac{P\lambda \sinh(\lambda)}{L[(1-\alpha)\alpha\lambda \sinh(\lambda) - \sinh(\lambda - \lambda\alpha)\sinh(\lambda\alpha)]} \quad (28)$$

式中:

$$\lambda^2 = Pl^2 / (EI) \quad (29)$$

$$\alpha = L_1 / L \quad (30)$$

特别地, 当  $P = 0$  时  $CE$  杆的线刚度为:

$$k_1 = \frac{3EI}{\alpha^2(1-\alpha)^2 L^3} \quad (31)$$

面外支撑的线刚度为由  $DD'$  与  $ABCE$  对称的无外力  $X$  支撑共同提供:

$$k_2 = k_{21} + k_{22} = \frac{3EI}{L'^3(1-\alpha')^2} + \frac{3EI}{L^3(1-\alpha)^2} \quad (32)$$

$$k_3 = \frac{E_1 A_1}{L} \quad (33)$$

$$k_4 = \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3} \quad (34)$$

所以,  $AB$  杆发生面外屈曲时的总线刚度为:

$$K_D = k_1 + k_4 \quad (35)$$

定义无量纲平动刚度因子:

$$m = K / K_e \quad (36)$$

其中,  $K_e$  代表单位线弹簧刚度:

$$K_e = 3EI / L^3 \quad (37)$$

### 1.3.2 角刚度 $C_D$

当  $AB$  杆发生面内( $yo$ z 平面)屈曲时, 受拉杆件  $CE$  可通过对图 1 建立平衡微分方程, 通过推导得到  $CE$  杆提供的转动约束为:

$$C_D = \frac{PL_1 \sinh(\lambda)}{\lambda \cosh(\alpha\lambda) \cosh(\alpha\lambda - \lambda) - \sinh(\lambda)} \quad (38)$$

上式中, 当  $P=0$  时应转换成:

$$C_D = \frac{4E_1 I_1 L}{L_1 (L - L_1)} \quad (39)$$

当  $AB$  杆发生面外( $xoy$  平面)屈曲时:

$$C_D = \frac{3E_1 I_1}{L_1 (3 + (1 - \alpha)^3 + \alpha^3)} \quad (40)$$

定义无量纲转动刚度因子:

$$n = C / C_e \quad (41)$$

其中,  $C_e$  代表单位转动弹簧刚度:

$$C_e = 4EI / L \quad (42)$$

综上, 特征值矩阵中跨中的弹性刚度  $K_D$  和  $C_D$  由 2.3 小节中的方法进行计算。由此, 可对无量纲刚度系数, 长度比例系数和拉压比等进行参数化研究, 并给出屈曲分析关键性设计参数的理论值。

## 2 程序验证

为便于结果讨论, 定义无量纲线刚度系数:

$$\beta = K_D L' / F_0 \quad (43)$$

其中:

$$F_0 = \pi^2 EI / L'^2 \quad (44)$$

另外, 定义无量角刚度系数为:

$$\eta = C_D / (F_0 L') \quad (45)$$

将屈曲荷载无量纲化为  $F_{cr} / F_0$ 。而杆件长度比例系数为:

$$\alpha' = L'_1 / L' = x' / L' \quad (46)$$

$$\alpha = L_1 / L = x / L \quad (47)$$

须定义无量纲拉压比( $CE$  杆受力与  $AB$  杆受力之比):

$$\delta / \xi = \tilde{P} / \tilde{F} \quad (48)$$

其中:  $\delta = \tilde{P}$ ,  $\xi = \tilde{F}$ 。

此处,  $\tilde{P}$  为  $CE$  杆的无量纲受力大小:

$$\tilde{P} = P / F_0 \quad (49)$$

而  $\tilde{F}$  为  $AB$  杆的无量纲受力大小:

$$\tilde{F} = F / F_0 \quad (50)$$

对受压  $AB$  杆, 假设  $L'_1 / L'_2 \geq 1$ , 即只讨论  $\alpha' = 0.5$  的情况。同时认为  $\alpha' = \alpha$ 、 $L' = L$ 、 $E_1 I_1 \neq EI$ 。此外, 在分析同一工况时, 认为受压(拉)杆  $AB(CE)$  的两端约束情况一致。

为验证上述理论方法的有效性, 令交叉点刚度为 0, 即不考虑面外支撑杆的作用, 此时可将其视为无面外支撑的 X 撑杆结构。并将其计算结果和现有文献结果——Picard 所做的实验(受压杆件与受拉杆件的端点均为铰支, 交点处连续固接)<sup>[18]</sup>和 Knapp 提出的导管架 X 撑结构屈曲长度系数计算公式(两端均固定和两端均铰支)<sup>[3]</sup>作了对比。通过调整受压杆件  $AB$  两端约束情况,  $K_A = K_B = \infty$ 、 $C_A = C_B = 0$  代表铰支支座,  $K_A = K_B = \infty$ 、 $C_A = C_B = \infty$  代表固定支座。

如图 3(a)所示, 给出屈曲长度系数  $\mu$  和拉压比  $\delta / \xi$ (规定受拉为正)的变化曲线, 可以看出, 当杆两端均为简支时, 理论计算结果与 Picard 实验结果以及 Knapp 关于两端简支的计算公式吻合良好, 即当撑杆两端简支时, 压杆的屈曲长度系数随着拉压比的增加而降低, 最终趋于 0.5。如图 3(b)和 3(c)所示, 当杆两端均为固定时, 不论整杆还是半杆, 其理论计算结果与 Knapp 关于两端固定的计算公式吻合良好, 即当撑杆两端固定时, 压杆的屈曲长度系数随着拉压比的增加而降低, 最终趋于 0.35。此外, 在现行规范中给定<sup>[13,14]</sup>, 对于整杆长而言, 当撑杆两端固定且两端受压时, 屈曲长度系数规范参考值为 0.70; 而对于半杆长而言, 当撑杆两端固定且撑杆一端受压、一端受拉时, 屈曲长度系数规范参考值为 0.80, 这些规范设计值相对于本文的理论分析值尚且存在一定的安全裕度, 可以有效的证明本文理论计算的合理性。基于上述方法, 本文给出了其余两类工况(拉杆简支、压杆固定和压杆简支、拉杆固定)的理论计算值, 可以作为工程设计的参考依据。

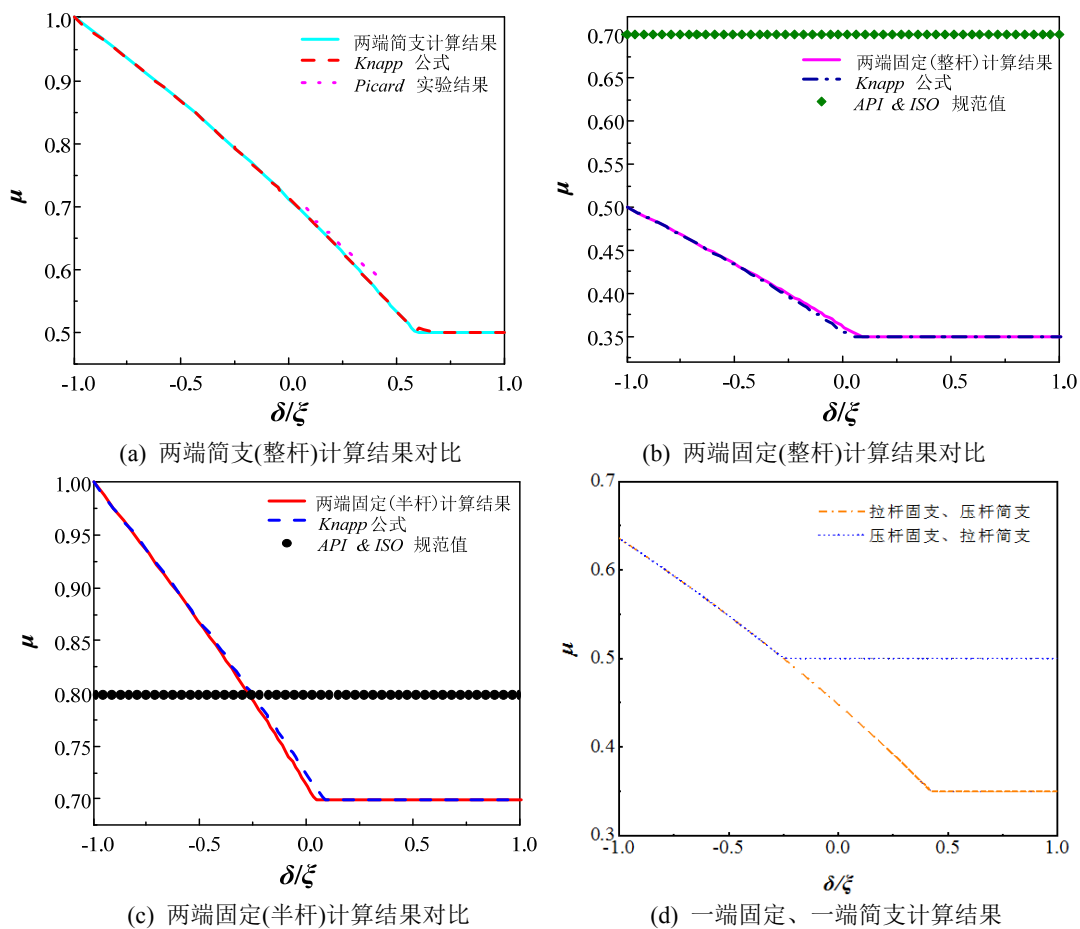


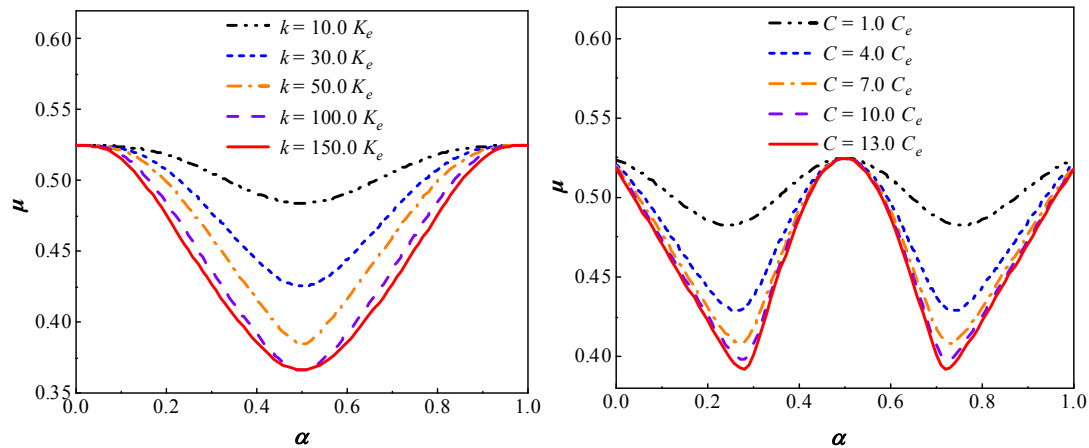
图 3 与实验结果的对比

### 3 结果分析

#### 3.1 敏感性分析

针对两端任意线弹性连接的分析模型，分别讨论了跨中弹性连接刚度对结构屈曲的影响，由此可以对面外支撑杆是否对结构有效支撑进行评判。在本小节中分别讨论了端点弹性约束和跨中弹性约束对结构屈曲的影响。使用屈曲特征方程式(26)进行迭代求解，本文考察在两端为弹性约束时，跨中交点处弹性约束所在位置对屈曲长度系数的影响。同时也对端点处的弹性刚度进行了敏感性分析，探讨了端点处不同弹性刚度因子对 X 撑杆件屈曲长度系数的影响。

在实际工程中，X 撑系统的四个端点 A、B、C、E 一般焊接在刚度比较大的立柱上。因此假设四个端点的平动刚度为  $EA/L \gg K_e$ ，并假设端点处转动刚度为  $10 C_e$ 。图 4 分别给出 X 撑杆结构屈曲长度系数在不同刚度下的计算结果，此处考察了 X 撑交点处不同弹性刚度下，交点位置对屈曲长度系数的影响，如图 4(a)所示。从图中可以看出，图像具有很好的对称性，从侧面也证明了程序的正确性。平动刚度对端点处( $\alpha = 0.0, \alpha = 1.0$ )没有影响，而对跨中( $\alpha = 0.5$ )影响最大。在端点处，此时 X 撑结构屈曲长度系数介于两端铰支和两端固支的极限屈曲长度系数之间，即  $0.5 < \mu < 1.0$ 。在跨中( $\alpha = 0.5$ )，此时平动刚度对屈曲长度系数的影响最大，并随着平动刚度增大，屈曲长度系数逐渐减小，以定性地解释为此时的平动刚度已经对结构有了足够的支撑作用( $m = 100$ )。



(a) 平动刚度对结构屈曲的影响

(b) 转动刚度对结构屈曲的影响

图 4 弹性支点的位置与屈曲长度系数的关系

可以发现，在弹性约束中，交点处提供的平动刚度对端点处( $\alpha = 0, \alpha = 1.0$ )屈曲长度系数几乎没有影响，这是由于端点的平动刚度为  $EA/L \gg K_e$ 。若端点处平动刚度较小且非远大于交点所提供的平动刚度，交点处提供的平动刚度将对屈曲长度系数产生影响，并随着  $K_D/K_A$  的比值增大，产生的影响也越大，这一点也可以从图 4(b)中进一步论证。由于假定的端点转动约束为有限值  $10C_e$ ，并没有远大于交点所提供的转动约束。因此，交点处提供的转动约束对屈曲长度系数产生了明显影响。端点处平动刚度无穷大时，从数学上可以解释为端点处的挠度  $w(0) = w(L) = 0$ 。但是，端点处的转动刚度和交点处的转动刚度对跨中( $\alpha = 0.5$ )的屈曲长度系数几乎没有影响。这是由于撑杆结构发生了半波形屈曲，此时对应  $w'(0) = 0$ ，故支点处的转动刚度对跨中的屈曲长度系数没有影响。交点在跨中的屈曲长度系数只取决于端点处的平动刚度和 X 撑杆交点处的平动刚度。这对于结构设计有十分重要的意义。

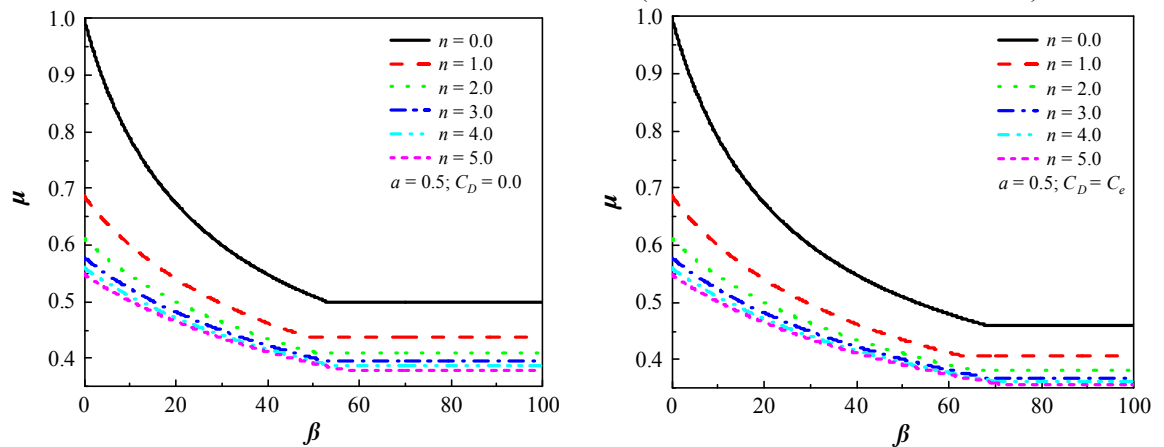
#### 3.2 案例分析

结合工程实际进行了理论计算，在实际工程结构中，X 撑的四个端点通常被固定在刚度较大的立柱或梁上。此时端点处(A 点、B 点、C 点、E 点)平动刚度可设置为  $EA/L \gg K_e$ ，而端点处的转动刚度因子  $n$  通常大于 5，即  $C_A > 5C_e$ ，基于此，分别考察了端点处线弹性转动刚度因子为  $n = 1.0, n = 2.0, n = 3.0, n = 4.0, n = 5.0$  五种工况。同时，当发生面外(yoz 平面)屈曲时，此时面外撑杆提供的转动刚度一般为定值，不失一般性，这里分别讨论了 X 撑交点提供的转动刚度为  $C_D = 0$  和  $C_D = C_e$  两种工况。各个工况下交点处提供



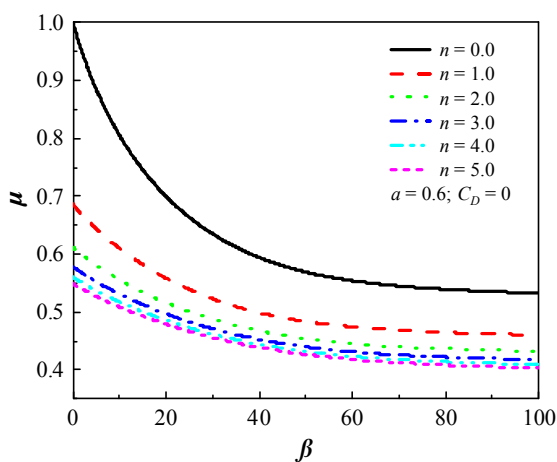
的无量纲的线弹性平动刚度与屈曲长度系数的计算结果图如图 5 所示。从图中可以看出, 当  $\alpha = 0.5$  时, 交点提供的转动约束对屈曲长度系数几乎没有影响, 当  $\alpha$  值远离 0.5 时, 其对屈曲长度系数的影响逐渐增大, 在  $\alpha = 0.9$  时影响超过 25%。由图 5(a)~5(d) 可得,  $C_A = 5C_e$  时, 结构屈曲长度系数已趋于收敛, 而实际工程中端点处的转动约束往往会更大。因此, 此时端点约束可以做固支进行分析。

同时, 对于交点处面外支撑提供的平动刚度  $K_D$ , 只需  $K_D > 100.0 K_e$  可起到很好的约束作用。而这意味着面外支撑杆的横截面积只需满足  $A_c / A > 0.08$  ( $A_c$  为面外支撑杆  $DD'$  杆的横截面积,  $A$  为受压杆  $AB$  杆的横截面积), 就可以起到良好的支撑效果。而这个条件是很容易达到的。此时进行屈曲分析时, 认为面外支撑杆为稳固支点, 此时只需对单跨进行稳定性设计即可(取  $AD$  和  $BD$  中长度较长一跨)。



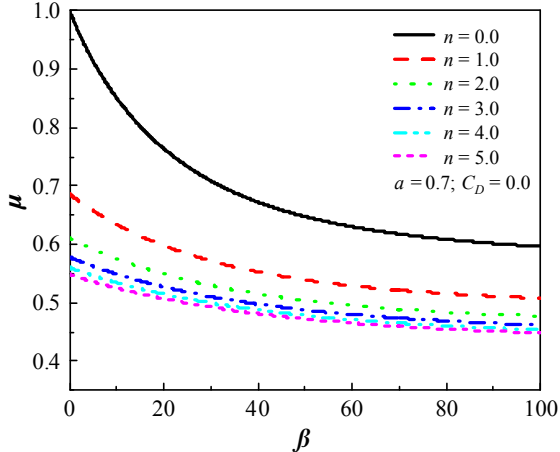
(a) 交点无转动约束, 长度因子  $\alpha = 0.5$

(b) 交点转动约束为  $C_e$ , 长度因子  $\alpha = 0.5$



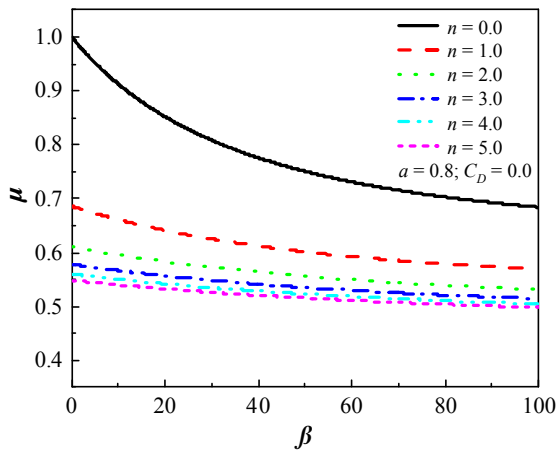
(c) 交点无转动约束, 长度因子  $\alpha = 0.6$

(d) 交点转动约束为  $C_e$ , 长度因子  $\alpha = 0.6$

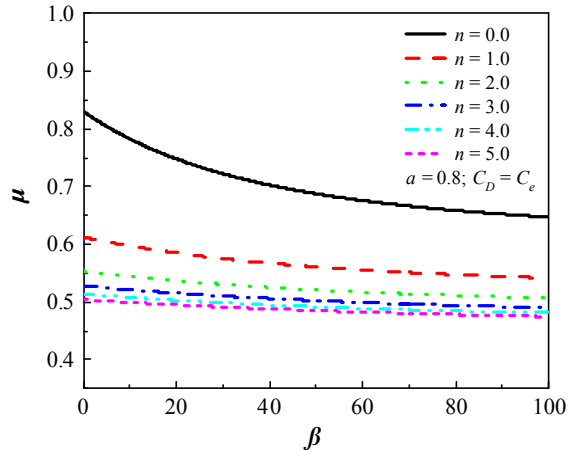


(e) 交点无转动约束, 长度因子  $\alpha = 0.7$

(f) 交点转动约束为  $C_e$ , 长度因子  $\alpha = 0.7$



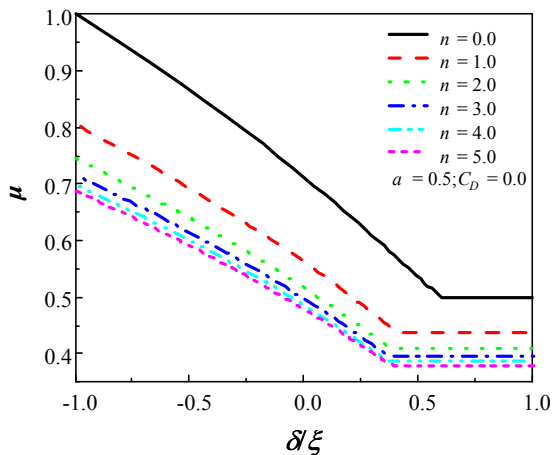
(g) 交点无转动约束, 长度因子  $\alpha=0.8$



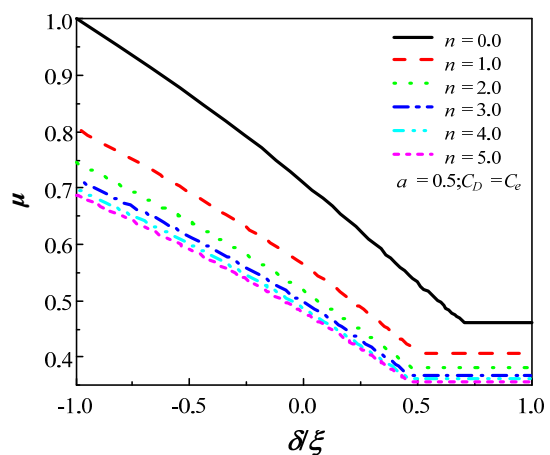
(h) 交点转动约束为  $C_e$ , 长度因子  $\alpha=0.8$

图5 X撑结构屈曲长度系数与交点处无量纲线弹性平动刚度的关系

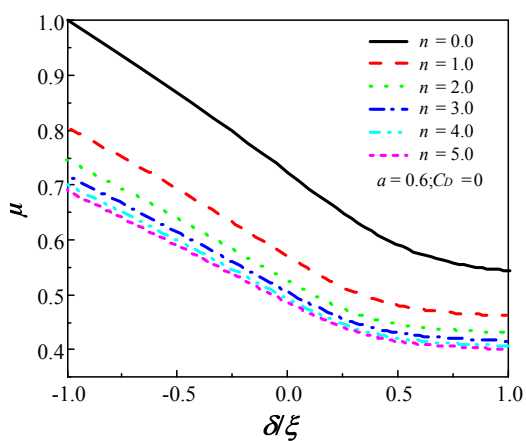
以下针对转动约束的刚度敏感性进行了考察。如前所述, 由于面外支撑提供的平动刚度大小只会是屈曲曲线在横坐标(拉压比)上发生平移, 对结构的屈曲长度系数临界值并不产生影响。不失一般性, 选取无面外支撑的X撑来考察转动约束对结构屈曲的影响, 即认为面外撑杆提供的平动刚度为0( $m=0$ )。点处(A点、B点、C点、E点)的动刚度可设置为  $EA/L \gg K_e$ 。分别考察了端点处线弹性转动刚度因子为  $n=1.0, n=2.0, n=3.0, n=4.0, n=5.0$  五种工况。同时, 当发生面外( $yoz$  平面)屈曲时, 此时面外撑杆提供的转动刚度一般为定值, 这里分别讨论了X撑交点提供的转动刚度为  $C_D=0$  和  $C_D=C_e$  两种工况。各个工况下X撑拉压比与屈曲长度系数的计算结果图如图6所示, 从图中可以得出与上述一致的结论。



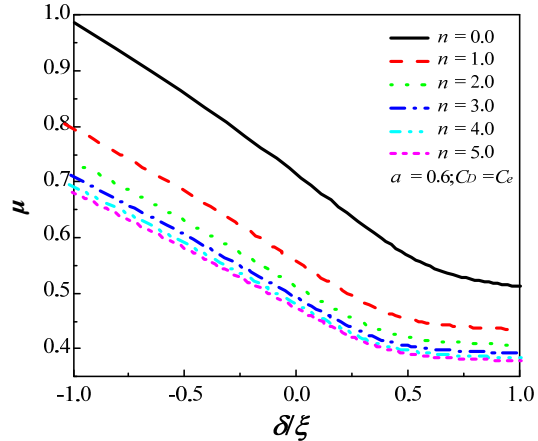
(a) 交点无转动约束, 长度因子  $\alpha=0.5$



(b) 交点转动约束为  $C_e$ , 长度因子  $\alpha=0.5$



(c) 交点无转动约束, 长度因子  $\alpha=0.6$



(d) 交点转动约束为  $C_e$ , 长度因子  $\alpha=0.6$

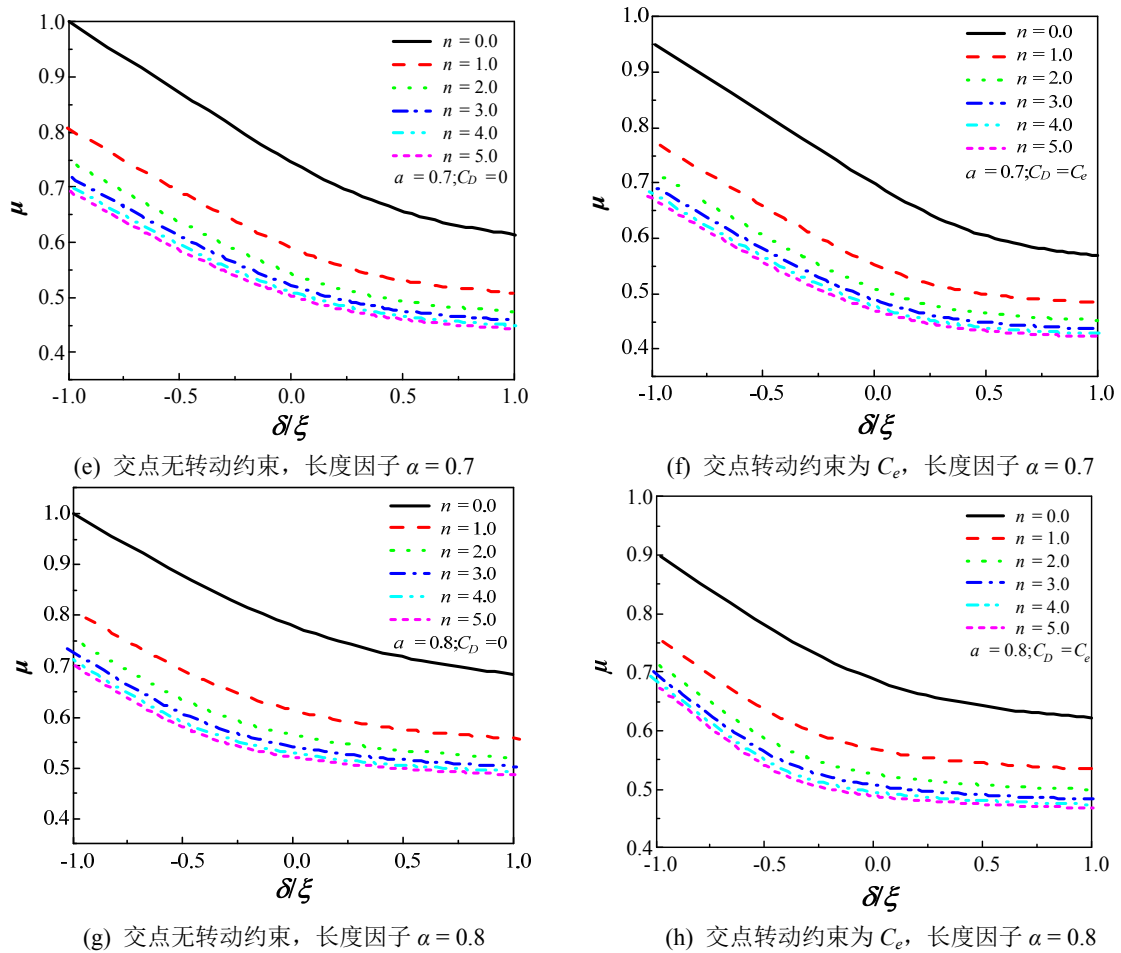


图6 X撑结构屈曲长度系数与两杆所受拉压比的关系

## 4 结论

本文推导了任意线弹性的双跨压杆稳定的屈曲特征方程，与现有研究中关于无面外支撑杆屈曲长度系数计算结果进行了对比，验证了其有效性。在此基础上，考察了极限状态下压杆的屈曲长度系数随支撑刚度、拉压比、长度因子等因素的变化关系，并针对不同支撑刚度(平动刚度)和(转动刚度)进行了敏感性分析，分析得到屈曲长度系数随这些因素的变化规律，并结合工程实践，给出了结构设计的理论推荐值，其主要结论如下：

(1) 当面外撑杆刚度无限大时，此时可近似将其看作无面外支撑结构。计算发现，在端部固定或端部简支条件下，其屈曲长度系数随拉压比的增加(拉压比小于0代表两端受压、拉压比大于0代表一端受压、另一端受拉)，呈现出先减小，而后趋于某一稳定值。即表明一端受压、另一端受拉时杆件可承受相对较大的承载力、稳定性优于两端受压工况，且在同等受力条件下，不容易发生屈曲。这与现有的研究结果以及规范参考值相符，进一步验证程序的正确性。

(2) 假定杆端为任意弹性支撑(平动刚度无限大，转动刚度有限值)，当面外撑杆只提供有限的平动刚度时，X撑交点位置越靠近跨中，其屈曲长度系数值越小，反之交点越靠近两端，杆的屈曲长度系数趋于稳定值，其数值大小只取决于端部的弹性支撑(介于两端固定极限值0.5和两端简支极限值1.0)。当交点位置不变时，增加撑杆的平动刚度使得屈曲长度系数减小，当无量纲平动刚度系数趋于100时，屈曲长度系数已经达到稳定，为此时的平动刚度已经对结构有了足够的支撑作用。

(3) 假定杆端为任意弹性支撑(平动刚度无限大，转动刚度有限值)，当面外撑杆只提供有限的转动刚度时，X撑交点位置越靠近跨中和两端，其屈曲长度系数值趋于稳定值，而其最小值发生在跨中两侧。这表明端点处的转动刚度和交点处的转动刚度对跨中( $\alpha = 0.5$ )的屈曲长度系数几乎没有影响。当交点位置不变

时, 增加撑杆的转动刚度使得屈曲长度系数减小, 当无量纲转动刚度系数趋于 10 时, 屈曲长度系数已经达到稳定, 为此时的转动刚度已经对结构有了足够的支撑作用。

(4) 当 X 撑交点提供有限的刚度(平动或转动)时, 在不同端点转动刚度下, 压杆的屈曲长度系数随着端点的平动刚度的增加, 呈现先加速下降, 后趋于稳定值的变化趋势。而当平动刚度一定时, 屈曲长度系数随着端点转动刚度的增加, 同样呈现先加速下降, 后趋于稳定值的变化趋势。特别地, 计算发现, 当无量纲平动刚度系数达到 100 左右, 无量纲转动刚度系数达到 5 左右时, 对于撑杆具有较好的约束作用。

(5) 其余条件一定时, 增加 X 撑杆的转动刚度, 使得杆件屈曲长度系数减小, 这种效应在交叉点位置偏离跨中位置越远越明显。

(6) 其余条件一定时, X 撑杆的屈曲长度系数和拉压比的变化关系和其与平动刚度的变化规律类似。

综上, 对于有面外撑杆的 X 撑系统, 当端点处有较大的转动刚度, 即结构端部支撑接近于一端固支, 一端铰支的情形, 其屈曲长度系数临界值  $\mu \approx 0.7$ 。考虑到结构设计时应留有足够的安全余度, 推荐在结构设计中屈曲长度系数  $\mu$  取值为 0.8。

## 参考文献:

- [1] 张伟为, 康元顺, 崔哲华, 曾晓辉. 基于正交试验方法的大型有面外支撑杆 X 撑结构的屈曲分析和优化设计[J]. 工程力学, 2022, 39.  
Zhang Wei-wei, Kang Yuan-shun, Cui Zhe-hua, Zeng Xiao-hui. Buckling analysis and optimal design of large-scale x-brace structure with out-of-plane support bars based on orthogonal test method[J]. Engineering Mechanics, 2022, 39. (in Chinese)
- [2] Timoshenko S P. Theory of Elastic Stability. /-second ed[M]. McGraw-Hill Book Co, 1961.
- [3] Knapp A E. The Use of X-Bracing in Fixed Offshore Platforms[J]. Society of Petroleum Engineers Journal, 1973, 13(02).
- [4] Stoman S H. Stability Criteria for X-Bracing Systems[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1988, 114(8): 1426-1434.
- [5] Stoman, S H. Effective Length Spectra for Cross Bracings[J]. Journal of Structural Engineering, 1989, 115(12): 3112-3122.
- [6] Thevendran V, Wang C M. Stability of Nonsymmetric Cross - Bracing Systems[J]. Journal of Structural Engineering, 1993, 119(1): 169-180.
- [7] Davaran A. EFFECTIVE LENGTH FACTOR FOR DISCONTINUOUS X-BRACING SYSTEMS. J Eng Mech[J]. 2001;127:106-112
- [8] Moon J, Yoon K-Y, Han T-S, Lee H-E. Out-of-plane buckling and design of X-bracing systems with discontinuous diagonals. Journal of Constructional Steel Research[J]. 2008;64(3):285-94
- [9] 朱永庆, 何守理, 何明胜. 输电塔交叉斜材计算长度的分析和计算[J]. 特种结构, 2013, 30(01): 18-23, 108.  
Zhu Yongqing, He Shouli, He Mingsheng. Analysis and calculation of the calculation length of the cross inclined beam of transmission tower [J]. Special Structures, 2013, 30(01): 18-23 + 108. (in Chinese)
- [10] 郭勇, 陈勇, 胡文侃, 徐意娟, 王激扬. 输电铁塔非对称交叉支撑杆系的面外弹性稳定分析[J]. 工业建筑, 2017, 47(06): 131-137, 173.  
Guo Yong, Chen Yong, Hu Wen-kan, XU Yi-juan, WANG Ji-yang. Out-of -plane buckling ansysis of non-symmetric cross-bracing systems of transmission towers [J]. Industrial Architecture, 2017, 47(06): 131-137, 173. (in Chinese)
- [11] Yong CHEN, Yong GUO, Hai-wei XU. Effective length factor of a non-symmetrical cross-bracing system with a discontinuous diagonal[J]. Journal of Zhejiang University-Science A (Applied Physics & Engineering), 2019, 20(08): 590-600.
- [12] 康元顺, 张伟为, 刘梦娟, 曾晓辉. 基于牛顿迭代算法的大型有面外支撑杆 X 撑结构的屈曲分析[J]. 工程力学. 2022, 39.  
Kang Yuan-shun, Zhang Wei-wei, Liu Meng-juan, Zeng Xiao-hui. Buckling analysis of a large x-supported structure with out-of-plane braces based on newton's iteration[J]. Engineering Mechanics, 2022, 39. (in Chinese)
- [13] American Petroleum Institute. API RP 2A-LRFD[M]. Washington: API, 2019.
- [14] EN ISO 19902-2007, Petroleum and natural gas industries — Fixed steel offshore structures [S], 2007.
- [15] ASCE 10—2015 Design of latticed steel transmission structures[S]. USA: American Society of Civil Engineers, 2015.
- [16] Attia WA, Irheem MMM. Boundary condition effect on response modification factor of X-braced steel frames. HBRC Journal[J]. 2019; 14(1): 104-21.
- [17] LIBOVE, C. Buckling of a compression member in a rigid- joint truss. I - Equalend restraints.[J]. Journal of Aircraft, 1966, 3(4): 347-353.
- [18] Picard, Andr'ue, Beaulieu, et al. Experimental study of the buckling strength of compression members connected to coplanar tension members[J]. Canadian Journal of Civil Engineering, 1989, 16(3): 249-257.