

doi:10.11988/ckyyb.20210790

2022,39(11):94-101

考虑尺寸效应和加载方式的砂岩抗拉强度统计模型

杨立云¹,王志斌¹,张鹏^{1,2},钱桂安³,张东宾¹,林长宇¹

(1.中国矿业大学(北京)力学与建筑工程学院,北京 100083; 2.中煤第七十一工程处有限责任公司,安徽 宿州 234000; 3.中国科学院力学研究所,北京 100190)

摘要:针对岩石抗拉强度测试过程中的尺寸效应问题,设计了3组不同直径(50、75、100 mm)的灰砂岩劈裂试验和一组三点弯试验。基于广义最弱链累积失效概率理论,研究了灰砂岩劈裂抗拉强度在几何相似和非几何相似条件下所测抗拉强度相互转换问题。研究表明:①当圆盘试样直径从50 mm增大到100 mm时,对应的劈裂抗拉强度均值逐渐减小,呈现先陡后缓的变化趋势,三点弯法所测抗拉强度均值约为劈裂抗拉强度均值的1.18~1.4倍;②使用尺寸效应统计方法建立的灰砂岩试样尺寸效应统计模型,能够在给定失效概率前提下得到不同尺寸下的灰砂岩劈裂抗拉强度。通过近似积分方法计算了劈裂加载方式下的等效强度系数,得到了该加载方式下的等效强度系数计算公式,结合三点弯加载方式下等效强度系数的计算方法,实现了巴西劈裂和三点弯加载方式所测抗拉强度的转换。

关键词:灰砂岩;抗拉强度;尺寸效应;加载方式;巴西劈裂;三点弯;统计模型

中图分类号:TU458 文献标志码:A

文章编号:1001-5485(2022)11-0094-08

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



A Statistical Model of Tensile Strength of Sandstone in Consideration of Size Effect and Loading Mode

YANG Li-yun¹, WANG Zhi-bin¹, ZHANG Peng^{1,2}, QIAN Gui-an³, ZHANG Dong-bin¹, LIN Chang-yu¹

(1.School of Mechanics and Civil Engineering, China University of Mining and Technology (Beijing), Beijing 100083, China; 2.China Coal No.71 Engineering Co., Ltd., Suzhou 234000, China; 3. Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract: In view of the size effect in the process of rock tensile strength testing, we designed three groups of grey sandstone split tests with different diameters (50 mm, 75 mm and 100 mm) and a group of three-point bending tests. Based on the theory of cumulative failure probability of generalized weakest chain, we investigated into the mutual conversion of the measured tensile strength of grey sandstone splitting tensile strength under geometrically similar and non-geometrically similar conditions. Results show that: 1) When the diameter of disc sample increased from 50 mm to 100 mm, the corresponding average value of split tensile strength gradually decreased in a steep first and then gentle trend. The average tensile strength measured by the three-point bending method is about 1.18-1.4 times of the average split tensile strength. 2) The statistical model of grey sandstone established by the size-effect statistical method can obtain the splitting tensile strength of grey sandstone of different sizes under the premise of a given failure probability. Furthermore, we calculated the equivalent strength coefficient under split loading mode by the approximate integration method, and obtained the calculation formula of equivalent strength coefficient. In association with the calculation method of equivalent strength coefficient under the three-point bending loading mode, the conversion of tensile strength measured by Brazilian splitting and three-point bending loading is realized.

Key words: grey sandstone; tensile strength; size effect; loading mode; Brazilian splitting; three-point bending; statistical model

收稿日期:2021-07-30;修回日期:2021-10-12

基金项目:国家自然科学基金项目(51974316);旧桥检测与加固交通行业重点实验室(北京)开放课题(2020-JQKFKT-5);中央高校基本科研业务费资助项目(2021YJSLJ12)

作者简介:杨立云(1983-),男,河北邢台人,教授,博士,博士生导师,主要从事岩土工程方面的研究工作。E-mail:yangly@cumb.edu.cn

1 研究背景

抗拉强度是表征岩石强度特性的重要参数之一,同时是岩土工程安全与稳定性分析的控制参数。1978 年国际岩石力学学会 (ISRM) 以规范的形式确定了通过室内试验获得岩石单轴抗拉强度的方法——直接拉伸法和巴西劈裂试验法^[1]。除此以外,部分学者还采用三点弯^[2]、点荷载经验公式^[3]等方法获得抗拉强度。但所有这些测试抗拉强度的方法都会因为试验过程中所用岩石试样尺寸不同,所测得强度数据存在差异,即存在尺寸效应问题,并且不同测试方法所得抗拉强度差异较大。因此,解决岩石尺寸效应问题和实现不同加载方式下所测抗拉强度的互相转换具有重要工程意义。而岩石作为一种典型的准脆性材料具有以下两个显著特征:强度的离散性和尺寸效应。岩石强度的离散性是岩石内部裂隙在空间位置、方向、几何形状和尺寸等方面的随机性造成的。同时,大量试验表明,岩石尺寸效应往往表现为强度随着试件几何尺寸的增大逐渐减小。从概率统计的角度出发,岩石尺寸越小,包含微观缺陷的概率就越小,对应岩石破坏时的强度越高;相反,对于尺寸越大的岩石结构,岩石内部包含的微观缺陷越多,对应岩石破坏时的强度越低。这就使得采用统计方法来评价岩石强度尺寸效应是十分必要的。

目前,大量学者进行了岩石尺寸效应研究。刘宝琛等^[4]对 7 种类型岩石材料进行了单轴抗压试验,提出了采用指数函数形式表征的尺寸效应经验公式。伍法权等^[5]对小尺寸岩样单轴压缩尺寸效应开展研究,发现不同岩样中孔隙的大小、形状和分布情况对尺寸效应变化趋势有影响。Thuro 等^[6]在研究尺寸效应对岩石强度特性的影响时,进行了不同厚径比的巴西劈裂试验,结果表明试样抗拉强度随厚径比的增加而减小。邓华锋等^[7]通过对不同厚径比的砂岩圆盘试样进行劈裂试验发现:当厚径比约 <0.3 时,抗拉强度增大并趋于一个相对稳定值。徐快乐等^[8]通过试验发现劈裂试样的直径对劈裂抗拉强度的影响显著,甚至超过了厚径比的影响效应,并发现对应抗拉强度呈现先陡后缓的降低趋势。以上研究虽然在一定程度上得出了尺寸与强度之间的关系,但在分析岩石尺寸效应时没有考虑强度的离散性,而且也只针对同一种加载方式下的尺寸效应进行研究。黄正均等^[9]虽对 3 种测试岩石抗拉强度的方法进行了比较研究,但也仅分析了造

成测试结果不同的原因,对于如何消除加载方式所造成的尺寸效应并未考虑。

针对以上研究的不足,本文选取典型的灰砂岩材料,进行劈裂抗拉强度试验和三点弯抗拉强度试验,结合 Lei 等^[10-15]提出的广义最弱链公式,利用统计的方法,研究岩石劈裂抗拉强度尺寸效应和不同加载方式所测抗拉强度的转换问题。

2 理论背景

Weibull 理论^[16-17]是解释材料尺寸效应的经典统计理论,该理论基于最弱链模型,认为材料内部结构是由若干体积或面积的单元串联而成的,只有当所有这些单元都完整时结构才不会破坏,反之,任意单元的破坏将导致整个结构破坏。因此,材料中最薄弱的环节及其空间分布将直接影响脆性断裂的失效概率。又由格里菲斯理论^[18]可知,材料断裂时所受应力 σ 与裂纹长度 a 的关系为 $\sigma = b/\sqrt{a_c}$, a_c 为临界裂纹长度, b 为阻止缺陷发生扩展的系数。基于最弱链和格里菲斯理论,Lei 等^[10]将缺陷的尺寸和形状因素对材料的破坏产生的效果转换为由应力 σ 表示的函数,并假设材料内部缺陷分布位置和方向服从均匀分布,推导出广义最弱链统计公式,即

$$P(V) = 1 - \exp\left\{\int_V \left[\ln(1 - p(\sigma, V_0)) \frac{\delta V}{V_0}\right]\right\} \quad (1)$$

式中: V 代表断裂过程区的体积,即结构可能发生破坏的部分,其范围主要与材料破坏时服从的破坏准则有关,例如在最大主应力准则下,我们认为其可能发生破坏的区域为最大主应力 >0 的部分,即 V 代表了试件最大主应力 $\sigma_1 > 0$ 的体积^[10]; $P(V)$ 为断裂过程区部分破坏概率; $p(\sigma, V_0)$ 为材料内部某一个体积为 V_0 的微单元在应力 σ 作用下发生破坏的概率,显然 $p(\sigma, V_0)$ 取决于微缺陷尺寸 a 或所受应力 σ 的特定分布形式。如果将微观缺陷所受应力的分布形式由下面的 Weibull 分布的概率密度函数表示,即

$$g(\sigma) = m \left[(\sigma - \sigma_{th})^{m-1} / \sigma_0^m \right] \cdot \exp\left[-(\sigma - \sigma_{th})^m / \sigma_0^m\right] \quad (2)$$

那么,

$$p(\sigma, V_0) = \int_{\sigma_{th}}^{\sigma} g(\sigma) d\sigma = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma - \sigma_{th}}{\sigma_0}\right)^m\right] \quad (3)$$

式中: σ_{th} 为缺陷开始扩展时所受到的应力,又称作门槛值; m 和 σ_0 分别为 Weibull 分布的形状和尺度

参数。将式(3)代入式(1),则在假设材料内部缺陷均匀分布下全尺寸失效概率为

$$P = 1 - \exp\left[-\int_V \left(\frac{\sigma - \sigma_{th}}{\sigma_0}\right)^m \frac{\delta V}{V_0}\right] \quad (4)$$

根据所对应的累计失效概率进一步分析:由第一积分中值定理,式(1)可改写为

$$\frac{1}{V} \ln \frac{1}{1-P} = \frac{1}{V_0} \ln \frac{1}{1-p(\xi, V_0)} = \frac{h(\sigma_N)}{V_0} \quad (5)$$

式中: σ_N 为名义强度; ξ 是一个应力值, $\sigma_{th} \leq \xi \leq \sigma_N$, $\xi = k(\sigma_N - \sigma_{th})$, 其中 $0 < k \leq 1$, k 为等效强度系数^[15], 与材料性质和加载方式有关; $h(\sigma_N)$ 是名义强度 σ_N 的函数。从式(5)可以看出, 等式的左边与材料内部缺陷的分布形式有关, 等式的最右边只与名义强度有关, 若知道与名义强度有关的表达式 $h(\sigma_N)$, 该等式就可以用来评价同一加载方式下材料的尺寸效应。同理, 令单位体积 $V_0 = 1$, 式(4)可以写成

$$\frac{1}{V} \ln \frac{1}{1-P} = \ln \frac{1}{1-p(\xi, V_0)} = \left(\frac{\sigma_N - \sigma_{th}}{\sigma_0}\right)^m \quad (6)$$

通过以上推导可以看出, 建立 $\frac{1}{V} \ln \frac{1}{1-P}$ 与名义强度 σ_N 之间的关系, 可以用统计的手段来评价材料的尺寸效应^[15]。但由于名义强度 σ_N 的计算与加载方式有关, 因此该方法仅能评价同一加载方式下的尺寸效应。

在材料破坏服从最大主应力准则条件下, 为了得到不同加载方式下的尺寸效应统计模型, 进一步推导, 当 $\sigma_{th} = 0$ 时, 式(4)简化为

$$P = 1 - \exp\left[-\int_V \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^m \frac{\delta V}{V_0}\right] \quad (7)$$

再将式(7)转换成

$$1 - P = \exp\left[-\left(\frac{\sigma_N}{\sigma_0}\right)^m \frac{V}{V_0} \int_V \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_N}\right)^m \frac{\delta V}{V}\right] = \exp\left[-\left(\frac{k\sigma_N}{\sigma_0}\right)^m \frac{V}{V_0}\right] \quad (8)$$

从式(8)可知, 通过引入系数 k , 在同一破坏准则(最大拉应力准则)下, 令 $\sigma_1 = k\sigma_N$, 消除了因加载方式不同所造成的名义强度 σ_N 不同的影响^[15]。所以, 为了得到材料在不同加载方式下所得抗拉强度的尺寸效应统计模型, 需要确定等效强度系数 k , 即

$$k = \left[\frac{1}{V} \int_V \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_N}\right)^m dV\right]^{\frac{1}{m}} \quad (9)$$

为了更直观地反映尺寸与强度之间的关系, 式(9)可以进一步写成以下3种不同形式^[15]:

$$\ln\left(\frac{1}{V} \ln \frac{1}{1-P}\right) = m \ln(\sigma_N) - \ln[V_0 (\sigma_0/k)^m] \quad (10)$$

$$\ln\left(\frac{1}{V} \ln \frac{1}{1-P}\right) = m \ln(k\sigma_N) - \ln(\sigma_0^m V_0) \quad (11)$$

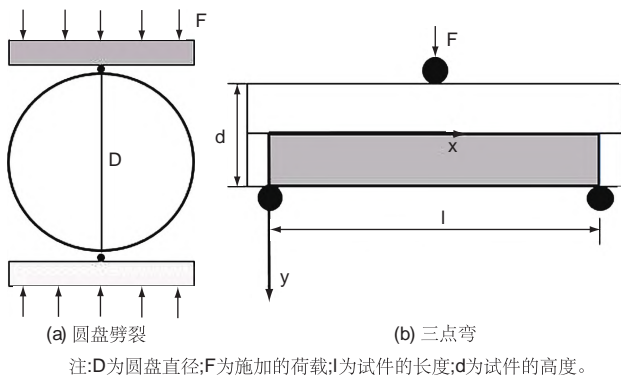
$$\ln\left(\frac{1}{k^m V} \ln \frac{1}{1-P}\right) = m \ln(\sigma_N) - \ln(\sigma_0^m V_0) \quad (12)$$

这3个表达式等效, 可以被用于描述不同情况下的尺寸效应。式(10)可以用来描述加载方式相同、几何尺寸相似条件下的尺寸效应, 而在描述加载方式不同所造成的尺寸效应时可采用式(11)或式(12)。

3 试验设计及试验结果分析

3.1 试验设计

对灰砂岩试件进行3种尺寸的劈裂试验和一种尺寸的三点弯试验, 所有试件均取自同一块石材。劈裂试验中圆盘试件直径选取50、75、100 mm 3种尺寸, 厚径比统一取0.5, 试件个数分别为20、14、8; 三点弯试件的长、宽、高分别为100、40、20 mm, 试件个数为10。本试验在CMT5305微机控制电子万能试验机上完成, 加载速率为0.1 mm/min。加载示意图如图1所示。



注: D为圆盘直径; F为施加的荷载; l为试件的长度; d为试件的高度。

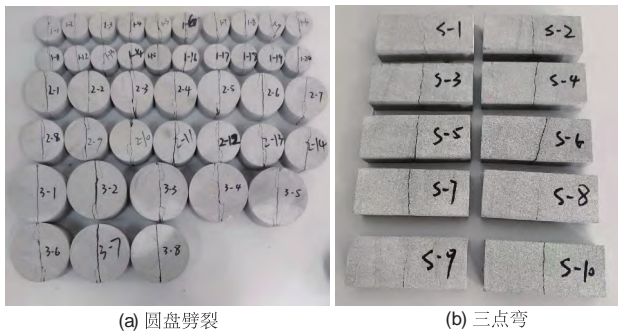
图1 2种加载方式示意图

Fig.1 Schematic diagram of two loading modes

3.2 试验结果

试验过程中, 圆盘试样劈裂破坏形式为上下贯穿破坏, 破坏面垂直于加载面, 与理论破坏形式相符; 三点弯试件开裂处均位于试件中心线处。试样破坏结果如图2所示。

由于传统的圆盘劈裂抗拉强度的计算方法



(a) 圆盘劈裂 (b) 三点弯

图 2 破坏后的岩样

Fig.2 Rock samples after fracture

$2F/(\pi DB)$ (其中 F 为破坏时的峰值荷载, D 为圆盘直径, B 为圆盘厚度) 是在二维平面中推导出来的, 而许多学者^[7,19-20] 研究发现三维状态下试件的端部所受拉应力最大, 从试件端部到试件中心拉应力逐渐减小, 并且端部所受到的真实拉应力比二维状态下给出的计算结果要大。因此为了得到劈裂加载方式下试件破坏时的真实情况, 在计算劈裂抗拉强度时使用文献[7]给出的关于三维条件下巴西圆盘劈裂抗拉强度修正系数公式进行修正(式(13)), 其中 k^* 为试样端面中心点的等效力与 $2F/(\pi DB)$ 的比值, t 为厚径比。将试验中试件厚径比 0.5 代入, 所得结果为 1.126, 这与文献[19]通过理论分析认为厚径比为 0.5 时试件端部拉应力比二维状态下结果高 12% 接近。

$$k^* = -0.332 5t^3 + 0.715 2t^2 - 0.028 3t + 1.003 2 \quad (13)$$

基于以上分析, 以下采用修正后圆盘劈裂抗拉强度计算公式 $\sigma_{N,P}^{[1]}$, 即

$$\sigma_{N,P} = 2k^* F/(\pi DB) \quad (14)$$

三点弯所测抗拉强度 $\sigma_{N,B}$ 计算公式^[2] 为

$$\sigma_{N,B} = 3Fl/(2bd^2) \quad (15)$$

式中: l 为跨长; b 为试件宽度; d 代表试件的高。

根据式(14)计算得到不同岩样劈裂抗拉强度, 如图 3 所示, 为更直观表现强度随尺寸的变化趋势, 将每组数据均值用折线连接。数据分析见表 1。根据式(15)计算得到三点弯试件抗拉强度, 如表 2 所示。

(1) 从图 3 可以看出, 厚径比相同条件下, 灰砂岩圆盘试件直径为 50 mm 时, 劈裂强度均值为 8.58 MPa, 岩样直径增大到 75、100 mm 时, 对应的劈裂抗拉强度均值分别下降了 11.42%、4.3%。劈裂抗拉强度随试样直径的增大逐渐减小, 尺寸效应明显, 且呈现先陡后缓的减小趋势。该变化趋势与文献[8]中所得到的绢云母中粒石英砂试样劈裂抗拉强度随直径的变化趋势相同。

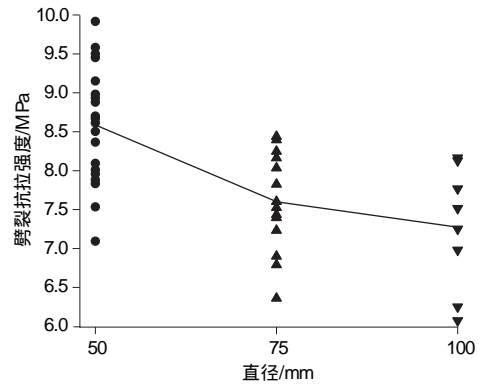


图 3 3 种尺寸岩样的劈裂抗拉强度

Fig.3 Splitting tensile strength of rock samples with three different sizes

表 1 3 种尺寸岩样劈裂抗拉强度数据分析

Table 1 Data analysis of splitting tensile strength of rock samples with three different sizes

直径/mm	劈裂抗拉强度/MPa			
	最小值	最大值	平均值	极差
50	7.09	9.91	8.58	2.82
75	6.36	8.44	7.60	2.08
100	6.07	8.16	7.27	2.09

表 2 三点弯试件试件抗拉强度

Table 2 Tensile strength of samples under three-point bending mode MPa

计算值	11.66、10.69、9.56、10.54、9.68、9.00、9.41、9.98、10.46、10.13
均值	10.11

(2) 3 种尺寸试件所测得劈裂抗拉强度的极差分别为 2.82、2.08、2.09 MPa, 同一尺寸下所测劈裂强度离散性较大。这反映出以往所采用的强度平均值代表该尺寸下材料的强度不够精确。

(3) 通过表 1 和表 2 中的试验数据可看出, 三点弯法所测弯拉强度比巴西劈裂法所测劈裂抗拉强度大, 其均值约为劈裂抗拉强度均值的 1.18~1.4 倍。黄正均等^[9] 研究表明, 造成这种差异的原因是三点弯曲作用下岩样实际为拉、压应力共同作用, 所得结果实际为抗折强度。虽然两种加载方式所测名义拉应力不同, 但在两种加载方式下, 岩石实质上也为拉伸破坏, 依然遵循最大主应力准则。以下将在非几何相似尺寸效应分析中来说明同一破坏准则下, 不同加载方式所测抗拉强度的转换。

4 尺寸效应统计分析

4.1 劈裂抗拉强度尺寸效应统计分析

在使用统计方法研究尺寸效应之前, 需要知道每一个强度所对应试件发生破坏的概率。用概率统计的方法对每一个名义强度所对应的破坏概率进行

估计,每一组试件破坏时的强度所对应的累计失效概率由式(16)计算^[10],其中 σ_i 为每一组 n 个强度由小到大排列的第 i 个强度。圆盘不同尺寸试件的个数 n 分别为20、14、8;三点弯试件的个数 n 为10。

$$P(\sigma_i, i) = \frac{i - 0.3}{n + 0.4} \quad (16)$$

从劈裂加载方式下最大主应力云图(图4)可以看出,劈裂加载方式下断裂过程区的体积 V (最大主应力 $\sigma_1 > 0$ 的部分)接近于全体积。为了便于计算,将圆盘试样的全体积作为断裂过程区体积;三点弯加载方式下,根据材料力学理论^[21],其最大主应力 > 0 的区域位于试件截面中性层下方(图1(b)),故在此加载方式下 $V = lbd/2$ 。

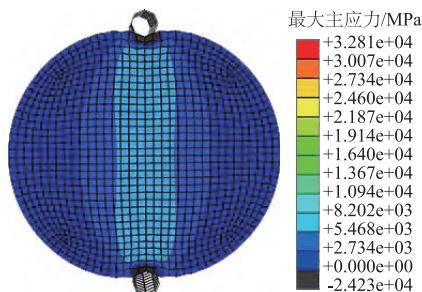


图4 劈裂加载方式下最大主应力云图
Fig.4 Contours of maximum principal stress under split loading mode

将图5(a)中的强度和对应概率代入式(8)得到两种加载方式下尺寸和概率的复合函数与名义强度对数值的线性关系,结果如图5(b)所示。从图5可以看出所有点均落在了一条直线上,并得到模型参数 $m = 12.20$, $V_0 (\sigma_0/k)^m = e^{34.55}$, 决定系数 $R^2 = 0.968$ 。对三点弯所测抗拉强度数据拟合(图5(b))得到 $m = 13.11$, $V_0 (\sigma_0/k)^m = e^{41.35}$, $R^2 = 0.907$ 。由此可以得到该种岩石材料在两种加载方式下尺寸与名义强度的关系式:

$$\ln\left(\frac{1}{V} \ln \frac{1}{1-P}\right) = 12.2 \ln(\sigma_N) - 34.55 \quad (17)$$

$$\ln\left(\frac{1}{V} \ln \frac{1}{1-P}\right) = 14.3 \ln(\sigma_N) - 43.95 \quad (18)$$

为了进一步验证上述尺寸效应统计分析方法对砂岩的适用性,本文对文献[8]中数据进行与上述相同的分析。文献[8]通过改变直径的方式得到了绢云母中粒石英砂岩(以下简称砂岩)5种尺寸的劈裂抗拉强度,每种尺寸包含3个试样,虽然该文献中每组试样较少,但依然可看出强度呈现出一定的离散性。试件尺寸和每个试件对应的劈裂强度如表3所示。

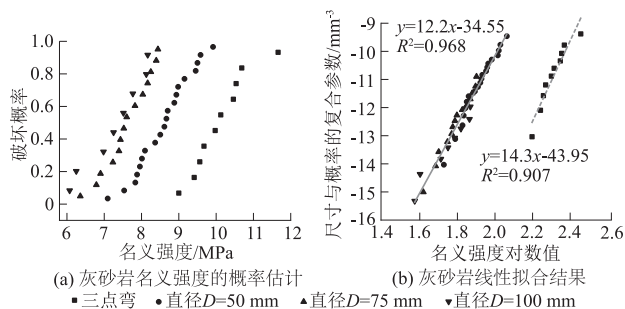


图5 灰砂岩尺寸效应统计分析

Fig.5 Statistical analysis of size effect of grey sandstone

表3 试件尺寸及试件劈裂强度

Table 3 Specimen's size and tensile splitting strength

直径/mm	劈裂强度试验值/MPa		
	试样1	试样2	试样3
25	9.05	8.38	7.47
30	6.88	7.78	8.16
50	3.86	4.73	4.56
100	3.04	2.53	3.27
150	2.18	1.63	1.52

从图6的尺寸效应统计分析结果可以看出,5种尺寸的砂岩劈裂抗拉强度也落在了一条直线上。虽然同种尺寸试样数量越多,破坏概率估计越精确,但在每组试样仅有3个的情况下决定系数 R^2 依然达到了0.943,这也更进一步反映出该方法对于砂岩试样尺寸效应的适用性。

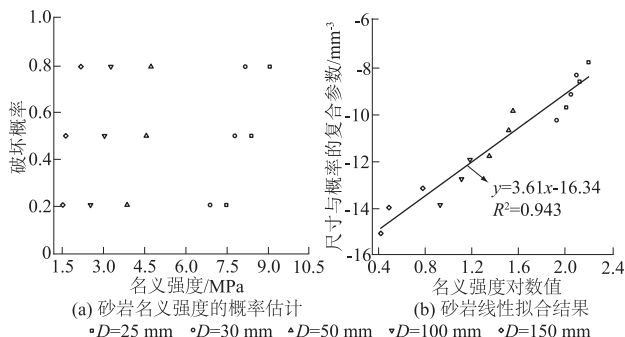


图6 砂岩尺寸效应统计分析

Fig.6 Statistical analysis of size effect of sandstone

由于本文所采用的广义最弱链公式是Lei基于材料内部缺陷服从均匀分布假设推导出的,以上试验与文献[8]中的两种砂岩劈裂强度数据在该公式的基础上所得出的线性关系拟合的决定系数 R^2 均达到了0.9以上,因此也从理论上验证了两种砂岩试样内部缺陷分布形式服从均匀分布。并且文献[5]通过对青砂岩使用CT扫描技术发现该种砂岩内部孔隙的大小和位置分布相对均匀,与本文验证的砂岩内部缺陷分布形式一致。

4.2 2种加载方式所测名义抗拉强度的转换

虽然本文试验中加载方式不同引起了名义抗拉强度不同,但我们假设这两种加载方式并不改变岩

石受拉破坏时的破坏准则。以下将采用非几何相似尺寸效应统计方法消除加载方式不同对测试结果所产生的影响。

由式(8)可知,如果要确定不同加载方式下强度与尺寸的关系,需要计算等效强度系数 k 。在最大主应力准则条件下,除非具有关于最大主应力的解析解,即通过式(9)直接积分求出 k ,否则通常需要进行数值计算来确定材料几何形状不同或所受加载方式不同情况下的 $k^{[15]}$ 。

在三点弯加载方式下,参考图 1(b),文献[15]给出了最大主应力的解析解为

$$\sigma_1(x, y) = \sigma_{N,B} \frac{2xy}{ld} \quad (19)$$

并由此得到了关于等效强度系数计算方法的计算公式^[15],即

$$k_B = (m + 1)^{-\frac{2}{m}} \quad (20)$$

从图 6(b)中数据拟合的结果可以看出,两种加载方式下材料常数 m 非常接近,范围在 12~14 之间。 m 作为模型参数,对其估计的精确程度必然随试样数量的增加而增大。由于本次试验圆盘试件数量较多,有理由判断对该种砂岩材料来说, m 更接近 12.2。将 $m = 12.2$ 代入式(19),可以得到 $k_B = 0.655$ 。

在巴西劈裂加载方式下,试件应力状态较为复杂,文献[22-23]给出了平面直角坐标系下的应力场解析解为 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} :

$$\begin{aligned} \sigma_x = & -\frac{2F}{\pi B} \left\{ \frac{x^2(R+y)}{[x^2+(R+y)^2]^2} + \frac{x^2(R-y)}{[x^2+(R-y)^2]^2} \right\} + \\ & \frac{F}{\pi RB}; \\ \sigma_y = & -\frac{2F}{\pi B} \left\{ \frac{(R+y)^3}{[x^2+(R+y)^2]^2} + \frac{(R-y)^3}{[x^2+(R-y)^2]^2} \right\} + \\ & \frac{F}{\pi RB}; \\ \tau_{xy} = & -\frac{2F}{\pi B} \left\{ \frac{x(R+y)^2}{[x^2+(R+y)^2]^2} - \frac{x(R-y)^2}{[x^2+(R-y)^2]^2} \right\} \quad (21) \end{aligned}$$

式中 R 为圆盘半径。将式(21)代入最大主应力表达式 $\sigma_1(x, y)$, 即

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (22)$$

再将最大主应力表达式代入式(9)计算等效强度系数 k 。由于表达式过于复杂,直接积分将存在困难。为此,本文采用近似积分的方法将式(21)和式(22)代入式(9)进行计算。如图 7 所示,对断裂过

程区的四分之一进行近似积分,将计算区域分成多个面积为 $dA = 1 \text{ mm}^2$ 的单元,并且令 $V_0 = 1, m = 12.2$,将每一个单元计算得到的

$\frac{\sigma_1^m}{\sigma_N^m} dA$ 累加,然后代

入式(9)可以得劈裂加载方式下等效强度系数 $k_p = 0.848$ 。

将以上得到的两种加载方式下的 k 、 σ_N 和 V 代入式(10)或式(11),可看出所有数据大致落在一条直线上(图 8),决定系数 $R^2 = 0.971$ 。显然,该模型可以反映出两种不同加载方式所测抗拉强度可以实现相互转化,既解决了尺寸效应问题,又消除了加载方式对测试结果的影响(三点弯的数据有些分散,这是

因为数据 n 较少,影响了概率 $p = \frac{i - 0.3}{n + 0.4}$ 的值)。

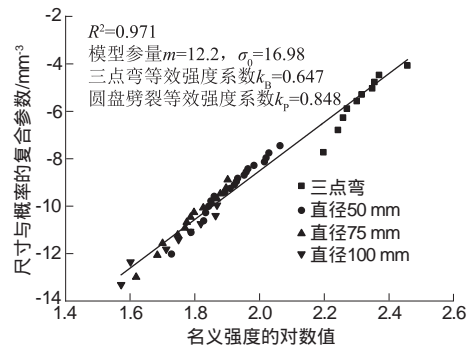


图 8 劈裂抗拉强度与三点弯抗拉强度转换

Fig.8 Conversion between splitting tensile strength and three-point bending tensile strength

通过以上分析可知,由于等效强度系数 k 只与加载方式和模型参数 m 有关,而 m 只与材料性质有关,因此若在已知三点弯加载方式下 m 值与 k 的对应关系(式 19)基础上,得到劈裂加载和直接拉伸加载下不同 m 值与 k 的对应关系,这将为确定不同类型岩石在不同加载方式下的抗拉强度提供便利。而在直接拉伸加载方式下,名义强度与最大主应力相等($\sigma_N = \sigma_1$),显然通过式(9)可得,在直接拉伸加载方式下的等效强度系数 $k_T = 1$ 。

对于劈裂加载,可以利用本文为计算劈裂加载方式下的等效强度系数提供的近似积分法,计算出模型参量 m 为 1~15 分别对应的等效强度系数 k_p ,然后通过非线性拟合得到巴西劈裂加载方式下不同 m 值与等效强度系数 k 的关系(式(23)),如图 9 所示。并且,从图 9 也可以看出巴西劈裂加载方式下等效强度系数 k 与模型参量 m 的函数表达形式与

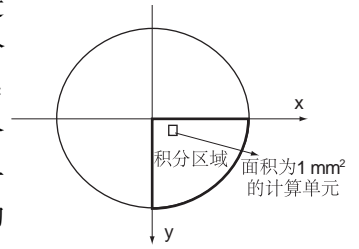


图 7 计算范围

Fig.7 Calculation range

三点弯加载方式下的表达形式(式(20))相同,决定系数 R^2 达到了0.995。

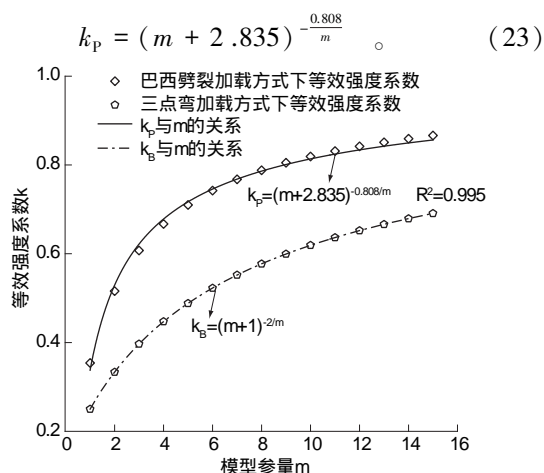


图9 等效强度系数与模型参量的函数关系

Fig.9 Functional relationship between equivalent strength coefficient and model parameters

同样,为了验证以上结论的有效性,下面将对文献[9]中采用直接拉伸、巴西劈裂和三点弯3种加载方式所测灰绿砂岩抗拉强度数据进行分析,其中直接拉伸强度平均值为5.67 MPa,劈裂抗拉强度平均值为6.61 MPa(厚径比为0.5,修正系数为1.26,修正后为8.33 MPa,以下分析采用修正后的值),弯拉强度平均值为10.60 MPa。由于文献中仅给了3组测试结果的平均值,与本试验结果较为接近,这里假设强度达到均值时破坏的概率为0.5,模型参量 m 依然为12.2。同样将数据代入式(10)计算,可看出所有数据大致落在一条直线上(图10),决定系数 $R^2 = 0.986$ 。

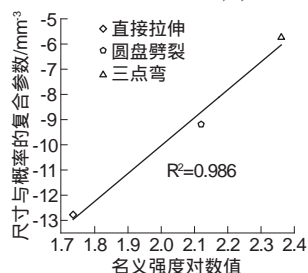


图10 3种加载方式的抗拉强度转换

Fig.10 Conversion of tensile strength among three loading methods

5 结论

(1)随着灰砂岩圆盘试样直径的增加,对应的劈裂抗拉强度均值减小,且呈现先陡后缓的降低趋势,尺寸效应明显,而且同一尺寸下所测劈裂抗拉强度离散性较大。另外,加载方式对抗拉强度影响显著,三点弯法所测灰砂岩抗拉强度均值约为劈裂抗拉强度均值的1.18~1.40倍。

(2)基于广义最弱链累计失效概率公式建立的灰砂岩劈裂抗拉强度尺寸效应统计模型,能够使劈裂加载方式下不同尺寸所测强度落在一条直线上,

不仅解决了尺寸效应问题,还考虑了相同尺寸下所测强度的离散性,实现了给定失效概率前提下对不同尺寸岩石劈裂抗拉强度的预测。结合以往学者对砂岩尺寸效应的研究,利用尺寸效应统计方法从理论上验证了砂岩内部缺陷分布形式服从均匀分布。

(3)通过计算出的模型中的等效强度系数,消除了同一破坏准则下加载方式对所测抗拉强度的影响,能够实现不同加载方式所测抗拉强度的转换。并且,利用近似积分的方法所得到的巴西劈裂加载方式下的等效强度系数计算公式,结合三点弯和直接拉伸状态下的等效强度系数,将为确定不同类型岩石在不同加载方式下的抗拉强度提供便利。

参考文献:

- [1] ISRM. Suggested Methods for Determining Tensile Strength of Rock Materials[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, 1978, 15(3): 99-103.
- [2] 杨同, 王宝学, 高谦, 等. 岩石弯曲拉伸试验研究[J]. 勘察科学技术, 2004(6): 3-5, 53.
- [3] MASOUMI H, ROSHAN H, HEDAYAT A. Scale-size Dependency of Intact Rock under Point-load and Indirect Tensile Brazilian Testing[J]. Science Letter, 2018, 15(3): 1-15.
- [4] 刘宝琛, 张寄生, 杜奇中. 岩石抗压强度的尺寸效应[J]. 岩石力学与工程学报, 1998, 17(6): 611-614.
- [5] 伍法权, 乔磊, 管圣功, 等. 小尺寸岩样单轴压缩试验尺寸效应研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2021, 40(5): 865-873.
- [6] THURO K, PLINNINGER R J, ZAH S, et al. Scale Effects in Rock Strength Properties. Part 1: Unconfined Compressive Test and Brazilian Test[C]//Rock Mechanics: A Challenge for Society: Proceedings of the ISRM Regional Symposium Eurock 2001, Espoo, Finland, June 4-7, 2001: 169-174.
- [7] 邓华锋, 李建林, 朱敏, 等. 圆盘厚径比对岩石劈裂抗拉强度影响的试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2012, 31(4): 792-798.
- [8] 徐快乐, 刘聪颖, 倪鑫, 等. 砂岩巴西劈裂抗拉强度的尺寸效应研究[J]. 长江科学院院报, 2020, 37(2): 126-129.
- [9] 黄正均, 任奋华, 李远, 等. 不同试验方法下岩石抗拉强度及破裂特性[J]. 实验技术与管理, 2020, 37(10): 45-49.
- [10] LEI W S. A Generalized Weakest-Link Model for Size Effect on Strength of Quasi-brittle Materials[J]. Journal of Materials Science, 2018, 53(2): 1227-1245.

- [11] LEI W S. A Framework for Statistical Modeling of Plastic Yielding Initiated Cleavage Fracture of Structural Steels [J]. *Philosophical Magazine*, 2016, 96(35): 3586–3631.
- [12] LEI W S. A Cumulative Failure Probability Model for Cleavage Fracture In Ferritic Steels [J]. *Mechanics of Materials*, 2016, 93: 184–198.
- [13] LEI W S. Fracture Probability of a Randomly Oriented Microcrack under Multi-Axial Loading for the Normal Tensile Stress Criterion [J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2016, 85: 164–172.
- [14] LEI W S. Evaluation of the Basic Formulations for the Cumulative Probability of Brittle Fracture with Two Different Spatial Distributions of Microcracks [J]. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 2016, 39(5): 611–623.
- [15] QIAN G, ZHAI J, YU Z, *et al.* Non-proportional Size Scaling of Strength of Concrete in Uniaxial and Biaxial Loading Conditions [J]. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 2018, 41: 1733–1745.
- [16] WEIBULL W. A Statistical Theory of Strength of Materials [J]. *Generalstabens Litografiska Anstalts Förlag*, 1939, 151: 1–45.
- [17] WEIBULL W. A Statistical Distribution of Function of Wide Applicability [J]. *Applied Mechanics*, 1951, 18: 293–297.
- [18] GRIFFITH A A. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids [J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society: Mathematical Physical and Engineering Sciences*, 1920, A221(4): 163–198.
- [19] CHAU K T. A Three-dimensional Analytic Solution for the Brazilian Test [C] // *Frontiers of Rock Mechanics and Sustainable Development in the 21st Century: Proceedings of the 2001 ISRM International Symposium, the 2nd Asian Rock Mechanics Symposium (ISRM 2001-2nd ARMS)*. Beijing, China. September 11-14, 2001: 157–160.
- [20] 喻 勇. 质疑岩石巴西圆盘拉伸强度试验 [J]. *岩石力学与工程学报*, 2005, 24(7): 1150–1157.
- [21] 孙训方. *材料力学* [M]. 北京: 高等教育出版社, 2009.
- [22] 叶剑红, 杨 洋, 常中华, 等. 巴西劈裂试验应力场解析解应力函数解法 [J]. *工程地质学报*, 2009, 17(4): 528–532.
- [23] YE J H, WU F Q, SUN J Z. Estimation of the Tensile Elastic Modulus Using Brazilian Disc by Applying Diametrically Opposed Concentrated Loads [J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2008, 46(3): 568–576.

(编辑: 罗 娟)

(上接第 93 页)

- [12] YANG Z, ZHU Y, JI D, *et al.* Discharge and Water Level Fluctuations in Response to Flow Regulation in Impounded Rivers: An Analytical Study [J]. *Journal of Hydrology*, 2020, 590: 125519.
- [13] 纪道斌, 刘德富, 杨正健, 等. 三峡水库香溪河库湾水动力特性分析 [J]. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2010, 40(1): 101–112.
- [14] 杨正健. 分层异重流背景下三峡水库典型支流水华生消机理及其调控 [D]. 武汉: 武汉大学, 2014.
- [15] 浦 祥. 长江河口重力环流、潮汐应变、混合与层化 [D]. 上海: 上海交通大学, 2017.
- [16] 熊龙兵. 长江河口环流与湍流混合: 数学模拟与理论计算 [D]. 上海: 上海交通大学, 2014.
- [17] WÜEST A, LORKE A. Small-scale Turbulence and Mixing: Energy Fluxes in Stratified Lakes [J]. *Encyclopedia of Inland Waters*, 2009, doi: 10.1016/B978-012370626-3.00084-3.
- [18] LORKE A, UMLAUF L, MOHRHOLZ V. Stratification and Mixing on Sloping Boundaries [J]. *Geophysical Research Letters*, 2008, 35(14): L14610.
- [19] SUTHERLAND G, REVERDIN G, MARIÉ L, *et al.* Mixed and Mixing Layer Depths in the Ocean Surface Boundary Layer under Conditions of Diurnal Stratification [J]. *Geophysical Research Letters*, 2014, 41(23): 8469–8476.
- [20] LÓPEZ M, IGLESIAS G, KOBAYASHI N. Long Period Oscillations and Tidal Level in the Port of Ferrol [J]. *Applied Ocean Research*, 2012, 38: 126–134.
- [21] BOCANIOV S A, UMANN C, RINKE K, *et al.* Internal Waves and Mixing in a Stratified Reservoir: Insights from Three-Dimensional Modeling [J]. *Limnologia*, 2014, 49: 52–67.

(编辑: 罗 娟)