

引用格式: 刘博, 李诗尧, 陈嘉禹, 等. 基于映射函数的新型五阶 WENO 格式[J]. 航空学报, 2022, 43(12): 126155. LIU B, LI S Y, CHEN J Y, et al. New fifth order WENO scheme based on mapping functions [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2022, 43(12): 126155 (in Chinese). doi: 10.7527/S1000-6893.2021.26155

基于映射函数的新型五阶 WENO 格式

刘博¹, 李诗尧^{2,3}, 陈嘉禹^{4,5}, 程启豪⁶, 时晓天^{1,*}

1. 中国航空气动力技术研究院, 北京 100074
2. 中国科学院力学研究所 高温气体动力学国家重点实验室, 北京 100190
3. 中国科学院大学 工程科学学院, 北京 100049
4. 天津大学 水利工程仿真与安全国家重点实验室, 天津 300072
5. 天津大学 建筑工程学院, 天津 300350
6. 天津大学 数学学院, 天津 300350

摘要: 研究高精度和高分辨率的差分格式对于复杂流场的数值模拟有重要意义。为了克服 WENO-JS 格式和 WENO-Z 在通量函数的一阶和二阶极值点处降阶的缺陷, 基于重构权重系数的思想, 设计一族映射函数并应用到五阶 WENO 格式中。近似色散关系表明, WENO-Pe 的色散误差和数值耗散均小于 WENO-JS、WENO-Z 以及其他基于映射函数的 WENO 格式。新格式与其他格式数值模拟变形的高斯波问题, Sod 激波管、Lax 激波管、激波密度干扰问题等一维算例, Riemann 问题、Rayleigh-Taylor 不稳定性问题、双马赫反射问题等二维算例的结果表明: 在精度阶相同的情况下, WENO-Pe 格式拥有更良好的捕捉间断能力, 分辨率更高, 适合应用于复杂流场的数值模拟。

关键词: WENO; 高精度; 高分辨率; 映射函数; 欧拉方程

中图分类号: V211.3; O357.1; O241.82 文献标识码: A 文章编号: 1000-6893(2022)12-126155-18

随着航空航天技术的发展, 计算流体力学 (CFD) 逐渐成为研究各类复杂气体流动问题的主要手段, 而计算机科技的进步为数值模拟提供了更广阔的前景。针对有强非线性效应的物理问题 (诸如激波问题), 使用拥有良好频谱性的线性格式计算会出现非物理振荡, 严重时甚至会使计算发散, 即使加密网格也不会减弱振荡^[1], 为解决此类问题需要发展非线性格式。TVD (Total Variation Diminishing) 格式^[2]具有良好的分辨率和稳定性, 但是精度较低。DG (Discontinuous Galerkin)^[3]、FR (Flux Reconstruction)^[4] 等有限元方法虽然可以适应非结构网格, 但在捕捉间断方面

仍有待完善。Harten^[5]和 Shu^[6]等把 TVD 格式要求降低为满足总变差有界 TVB (Total Variation Bounded) 的条件, 提出了 ENO (Essentially Non-Oscillatory scheme) 格式。在此基础上, Liu 等^[7]首次提出 WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory scheme) 思想, Jiang 和 Shu^[8]随后提出光滑因子和加权系数具体的表达式, 并提出了三阶和五阶的 WENO 格式, 此格式适合处理含有间断的问题, 被广泛使用^[9-14]。然而 WENO-JS 格式在极值点处的精度会降低, Henrick 等^[15]分析了其原因并通过引入映射函数重构加权系数, 提出了 WENO-M 格式, Borges^[16]和

收稿日期: 2021-07-26; 退修日期: 2021-08-17; 录用日期: 2021-09-06; 网络出版时间: 2021-09-26 16:29
网络出版地址: <https://hkxb.buaa.edu.cn/CN/Y2022/V43/I12/126155>
基金项目: 国家重点研发计划 (2019YFA0405300); 国家自然科学基金 (11872348, 11802297)
* 通信作者. E-mail: xxtshi@163.com

Castro^[17]等对光滑因子进行改进,形成 WENO-Z 格式,克服了极值点降阶的缺陷。随后有研究者提出一系列针对 WENO-Z 的改进方案^[18-20],但仍然改进不了耗散较大的缺陷。Wu 等^[21]通过数学推导指出 WENO-Z 格式在高阶极值点处会降阶。为了减少耗散,Fan^[22]提出 WENO- η 格式,Ha 等^[23]提出 WENO-NS 格式。另有研究人员基于 Henrick 的思想,构造新的映射函数,例如 Feng 等^[24]将 WENO-M 格式推广到更高阶情形,提出 WENO-IM 格式,随后 Feng 等^[25]又提出在端点处应接近 ENO 性质,改进得到 WENO-PM 格式。Li^[26]和刘朋欣^[27]等则认为在端点处应逼近恒等映射,提出 WENO-PPM 格式。Wang 等^[28]通过大量实验发现映射函数在右端点处的导数影响微小,从而改进出振荡更小的 WENO-RM 格式。Vevek 等^[29]提出基于变化因子 λ 的 WENO-AIM 格式。

基于映射函数思想重构加权因子,大多数已有的映射函数都是多项式型函数,为了提高函数在端点处的收敛速度与理想权重值处稳定性,以指数函数作为基函数构造分段映射函数 WENO-Pe(Piecewise exponential mapping function),使其匹配常用 WENO 格式,并以五阶为例通过若干经典算例验证,与其他格式对比来验证新格式的性能。

1 问题描述与数值离散

1.1 标量方程

一维对流方程是最简单的双曲线偏微分方程,该方程可分为线性与非线性两类:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

1.2 矢量方程

无黏性流体动力学中最重要的基本方程,即 Euler 方程组,是指对无黏性流体微团应用牛顿第二定律得到的运动微分方程。以一维守恒的情形为例:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

式中:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (E + p)u \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中: ρ 、 u 和 p 分别代表流体密度、速度与压强; E 为单位体积流体的总能量,其表达式为

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u^2 \quad (5)$$

式中: γ 为气体常数。

1.3 数值离散

在对 Euler 方程组离散时,采取 Steger-Warming 流通矢量分裂法,通量 \mathbf{F} 分解为正负两部分分别参与运算:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^+ + \mathbf{F}^- \quad (6)$$

此方法具体步骤详见文献^[30]。将求解空间分成若干网格点 x_j ,并在半网格点 $x_{j+\frac{1}{2}}$ 处利用高阶迎风差分格式重构通量 $\hat{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}}$,进而将方程(3)半离散化:

$$\frac{\partial \mathbf{U}_j}{\partial t} + \frac{\hat{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{\mathbf{F}}_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = \mathbf{0} \quad (7)$$

再对时间导数项进行离散,为了与空间项精度匹配,所用的五阶格式均采用三阶精度的 Runge-Kutta 格式^[30]:

$$\begin{cases} \mathbf{U}_j^{(1)} = \mathbf{U}_j^n + \Delta t L_h(\mathbf{U}_j^n) \\ \mathbf{U}_j^{(2)} = \frac{3}{4} \mathbf{U}_j^n + \frac{1}{4} \mathbf{U}_j^{(1)} + \frac{\Delta t}{4} L_h(\mathbf{U}_j^{(1)}) \\ \mathbf{U}_j^{n+1} = \frac{1}{3} \mathbf{U}_j^n + \frac{2}{3} \mathbf{U}_j^{(2)} + \frac{2\Delta t}{3} L_h(\mathbf{U}_j^{(2)}) \end{cases} \quad (8)$$

式中: $L_h(\mathbf{U}_j^n)$ 为 \mathbf{U}_j^n 关于空间的离散格式。由于正负通量的重构手段一致,下文将以正通量为例介绍重构方法。

2 通量重构

2.1 WENO 格式思想

以五阶 WENO 格式为例,该算法是对 ENO 格式的各备选模板上重构函数进行非线性加权,使其在光滑区域达到更高阶精度,并减少数值解在间断附近的非物理振荡。在计算 $x_{j+\frac{1}{2}}$ 点通量 f 时,需要 3 个子模板上的重构函数:

$$\begin{cases} q_0^+(x_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{3}f_{j-2}^+ - \frac{7}{6}f_{j-1}^+ + \frac{11}{6}f_j^+ \\ q_1^+(x_{j+\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{6}f_{j-1}^+ - \frac{5}{6}f_j^+ + \frac{1}{3}f_{j+1}^+ \\ q_2^+(x_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{3}f_j^+ + \frac{5}{6}f_{j+1}^+ - \frac{1}{6}f_{j+2}^+ \end{cases} \quad (9)$$

该函数是通过每个子模板上使用 Lagrange 插值多项式得到代数多项式,正负通量模板如图 1(a)和图 1(b)所示。

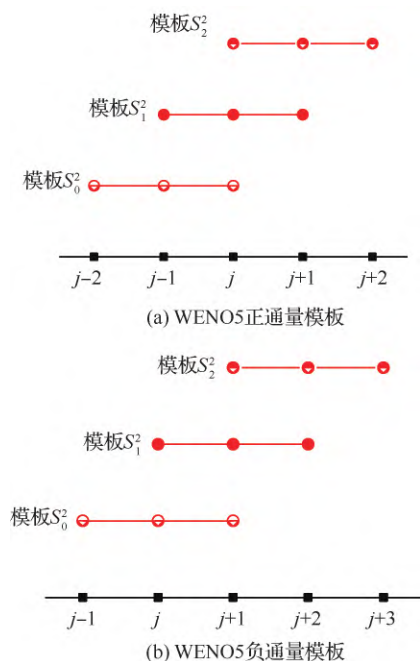


图 1 WENO5 总模板与子模板

Fig. 1 General and sub templates of WENO5 scheme

另一方面, $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}$ 是由 3 个子模板共 5 个节点重构而成,由其线性插值多项式可得 5 点重构通量:

$$q^+(x_{j+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{30}f_{j-2}^+ - \frac{13}{60}f_{j-1}^+ + \frac{47}{60}f_j^+ + \frac{9}{20}f_{j+1}^+ - \frac{1}{20}f_{j+2}^+ \quad (10)$$

由此得出理想权重系数: $C_0^+ = \frac{1}{10}, C_1^+ = \frac{3}{5},$

$$C_2^+ = \frac{3}{10}。$$

但真实权重 $\omega_k^+ (k = 0, 1, 2)$ 并非总与理想权重相等,故得到重构函数为

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^+ = \sum_{k=0}^2 \omega_k^+ q_k^+(x_{j+\frac{1}{2}}) \quad (11)$$

并要求非线性权在光滑区域充分接近理想权重,在间断附近退化为 ENO 格式,以保证减小振荡,因此构造合适的非线性权成为关键问题。

2.2 各类非线性权

2.2.1 WENO-JS 格式

为了获取合适的非线性权重系数,Shu^[31] 建议引入度量函数光滑性的光滑度函数 IS_k^+ :

$$\begin{cases} IS_0^+ = \frac{13}{12}(f_{j-2}^+ - 2f_{j-1}^+ + f_j^+)^2 + \frac{1}{4}(f_{j-2}^+ - 4f_{j-1}^+ + 3f_j^+)^2 \\ IS_1^+ = \frac{13}{12}(f_{j-1}^+ - 2f_j^+ + f_{j+1}^+)^2 + \frac{1}{4}(f_{j-1}^+ - f_{j+1}^+)^2 \\ IS_2^+ = \frac{13}{12}(f_j^+ - 2f_{j+1}^+ + f_{j+2}^+)^2 + \frac{1}{4}(3f_j^+ - 4f_{j+1}^+ + f_{j+2}^+)^2 \end{cases} \quad (12)$$

并提出一种非线性权构造方案:

$$\alpha_k^+ = \frac{C_k^+}{(\epsilon + IS_k^+)^p}, \omega_k^+ = \frac{\alpha_k^+}{\sum_{i=0}^2 \alpha_i^+} \quad (13)$$

式中: p 为 ≥ 2 的正整数; ϵ 为防止分母为 0 的充分小正数,通常取 10^{-6} 。

2.2.2 WENO-M 格式

Henrick 等^[15] 注意到 WENO-JS 格式在极值点处精度会降低,主要原因是 ω_k^+ 仅能一阶逼近理想权重 C_k^+ ,通过大量数值实验进一步发现,在极值点处五阶 WENO-JS 的精度只有三阶左右,为使格式仍在极值点处保持原有精度,Henrick 等设计出一种映射函数,将 WENO-JS 的权重经过一个简单函数映射,得到新的权重,此格式称为 WENO-M 格式,其映射函数为(由于表达式一致,以下省略正负号)

$$g_{M,k} = \frac{\omega_k(C_k + C_k^2 - 3C_k\omega_k + \omega_k^2)}{C_k^2 + \omega_k(1 - 2C_k)} \quad (14)$$

再将新得到的函数值重构为权重系数:

$$\omega_{M,k} = \frac{g^M(\omega_k)}{\sum_{i=0}^2 g^M(\omega_i)} \quad (15)$$

注意到该映射函数在(0,1)区间内严格单调递增且具有二阶连续导数,同时还应当满足如下性质:

$$\begin{cases} g(0) = 0, g(1) = 1 \\ g(C_k) = C_k \\ g'(C_k) = g''(C_k) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

通过将 $\omega_{M,k}$ 表达式在 C_k 点做 Taylor 展开可以证明:

$$\omega_{M,k} = C_k + O(\Delta x^3) \quad (17)$$

2.2.3 WENO-PPM 格式

Li 等^[26]认为映射函数应经过映射以后的非线性权在定义域边界处应尽快地收敛到 0 或者 1,于是提出分段多项式函数作为映射函数:

$$g^{PPM}(\omega) = \begin{cases} C_k \left[1 + \left(\frac{\omega}{C_k} - 1 \right)^5 \right] & \omega \leq C_k \\ C_k + \frac{(\omega - C_k)^5}{(1 - C_k)^4} & \omega > C_k \end{cases} \quad (18)$$

其重构加权因子为

$$\omega_{PPM,k} = \frac{g^{PPM}(\omega_k)}{\sum_{i=0}^2 g^{PPM}(\omega_i)} \quad (19)$$

2.2.4 WENO-PM 格式

Feng 等^[25]注意到, Henrick 等提出的映射函数(14)在端点处导数值偏大:

$$g'(0) = 1 + \frac{1}{C_k}, g'(1) = 1 + \frac{1}{1 - C_k} \quad (20)$$

这样会使靠近端点处的权重被放大,出现较大误差,为了修正此问题,Feng 等在式(16)基础上对映射函数补充了新要求,即端点处函数的趋近速度:

$$g'(0) = g'(1) = 0 \quad (21)$$

并设计出新的映射函数:

$$g^{PM}(\omega) = \begin{cases} C_k + \frac{(-1)^n (n+1)}{C_k^{n+1}} \left(\omega + \frac{C_k}{n+1} \right) (\omega - C_k)^{n+1} & \omega \leq C_k \\ C_k - \frac{(n+1)}{(1 - C_k)^{n+1}} \left(\omega - \frac{1 - C_k}{n+1} - 1 \right) (\omega - C_k)^{n+1} & \omega > C_k \end{cases} \quad (22)$$

使用五阶 WENO 格式时推荐参数 $n = 4$,重

构权重系数为

$$\omega_{PM,k} = \frac{g^{PM}(\omega_k)}{\sum_{i=0}^2 g^{PM}(\omega_i)} \quad (23)$$

2.2.5 WENO-RM 格式

Wang 等^[28]认为分段函数的全局光滑性不足,应使用全局高阶连续函数克服来自不光滑模板的影响,故提出新的映射函数:

$$g^{RM}(\omega) = C_k + \frac{(\omega - C_k)^{n+1}}{\sum_{i=0}^{m+1} a_i \omega^i} \quad (24)$$

式中: $a_i = \binom{n+1}{i} (-C_k)^{n-i}$; $a_{m+1} = (1 - d)^n -$

$\sum_{i=0}^m a_i$; $\binom{n+1}{i}$ 代表组合数。类似的其重构权重系数为

$$\omega_{RM,k} = \frac{g^{RM}(\omega_k)}{\sum_{i=0}^2 g^{RM}(\omega_i)} \quad (25)$$

函数(24)仍然具备如下性质:

$$\begin{cases} g(0) = g'(0) = \dots = g^{(m)}(0) = 0 \\ g(1) = 1 \\ g(C_k) = C_k \\ g'(C_k) = g''(C_k) = \dots = g^{(n)}(C_k) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

2.2.6 WENO-Pe 格式

总结以上的研究,一个好的映射函数应具有如下特点:

- 1) 在(0,1)区间内具有良好的光滑性。
- 2) 在各阶极值点处精度不下降。
- 3) 有较强的克服不光滑模板的能力。
- 4) 在 $g(0)$ 处平缓收敛到 0。
- 5) 在 $g(1)$ 处接近恒等映射。

多项式函数在固定区间的增长速率依赖次数与系数,故考虑使用其他类型函数替代,而指数函数具有无穷次可导且增长率较大的良好性质,可考虑使用其构造映射函数,使该函数具有如下性质:

$$\begin{cases} g(0) = g'(0) = \dots = g^{(m)}(0) = 0 \\ g'(\omega) \geq 0 \\ g(1) = g'(1) = 1 \\ g(C_k) = C_k \\ g'(C_k) = g''(C_k) = \dots = g^{(n)}(C_k) = 0 \end{cases} \quad (27)$$

2.3 构造 WENO-Pe 格式的非线性权

以 C_k 为分界点, 将 $[0, 1]$ 区间分为 $[0, C_k)$ 和 $[C_k, 1]$, 在左半端内设

$$t_L(\omega) = \frac{e^{-A_L(\omega-C_k)} - 1}{e^{A_L C_k} - 1} \quad (28)$$

$$g_L^{Pe}(\omega) = C_k \left(1 + \sum_{i=0}^{m_L} \alpha_{L,i} t_L^{n+1+i} \right) \quad (29)$$

在右半段内设

$$t_R(\omega) = \frac{e^{A_R(\omega-C_k)} - 1}{e^{A_R(1-C_k)} - 1} \quad (30)$$

$$g_R^{Pe}(\omega) = (1 - C_k) (\alpha_{R,0} t_R^{n+1} + \alpha_{R,m_R+1} t_R^{n+m_R+1}) + C_k \quad (31)$$

式中: A_L 和 A_R 为正实数; m_L, m_R, n 是正整数 ($n \geq m \geq 2$); $\alpha_{L,i}$ 和 $\alpha_{R,i}$ 是由 A_L, A_R, m_L, m_R 和 n 确定的系数, 对于五阶 WENO 而言, 取 $n = 5, m_L = m_R = 2$ (一般情况下取 $m_L = m_R$, 以下简称 m), 并且 $A_L = A_R$ 即可。易证

$$\begin{cases} g_L^{Pe}(C_k) = C_k \\ g_L^{Pe'}(C_k) = g_L^{Pe''}(C_k) = \dots = g_L^{Pe^{(n)}}(C_k) = 0 \end{cases} \quad (32)$$

为使在左端点处表现为 ENO 性质, 需满足

$$g_L^{Pe}(0) = g_L^{Pe'}(0) = g_L^{Pe''}(0) = 0 \quad (33)$$

则 $\alpha_{L,i}$ 应满足:

$$\begin{cases} \alpha_{L,0} = -\frac{(n+2)(n+3)}{2} \\ \alpha_{L,1} = (n+1)(n+3) \\ \alpha_{L,2} = -\frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{cases} \quad (34)$$

同样, 为使右端点满足 WENO 性质, 需满足:

$$g_R^{Pe}(1) = g_R^{Pe'}(1) = 1 \quad (35)$$

$\alpha_{R,i}$ 应满足

$$\begin{cases} \alpha_{R,0} = \frac{n+m_R+1-\beta}{m_R} \\ \alpha_{R,m_R+1} = \frac{-(n+1)+\beta}{m_R} \end{cases} \quad (36)$$

式中:

$$\beta = \frac{1 - e^{-A_R(1-C_k)}}{A_R(1-C_k)} \quad (37)$$

因此整体有

$$g^{Pe}(\omega) = \begin{cases} g_L^{Pe}(\omega) & 0 \leq \omega \leq C_k \\ g_R^{Pe}(\omega) & C_k \leq \omega \leq 1 \end{cases} \quad (38)$$

$$\omega_{Pe,k} = \frac{g^{Pe}(\omega_k)}{\sum_{i=0}^2 g^{Pe}(\omega_i)} \quad (39)$$

图 2 是 $A_L = A_R = 15$ 时, 五阶 WENO-Pe 格式关于 3 个理想权重的映射函数图像。

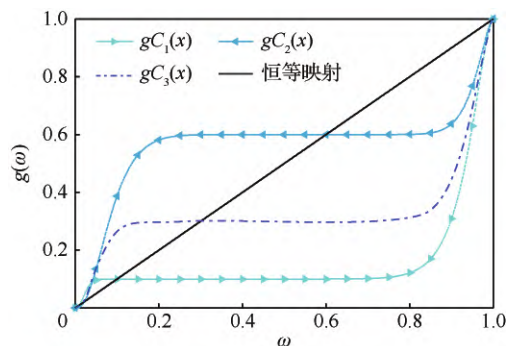


图 2 WENO5-Pe 的映射函数

Fig. 2 Mapping functions in WENO-Pe

图 3 是映射函数 g_{Pe} 同其他映射函数 (按其文献中推荐的最佳参数) 图像对比, 其中各函数的具体参数如下:

$$\begin{cases} g_{Pe}: A_L = 15, m = 2, n = 5 \\ g_{IM}: A = 0.1, n = 2 \\ g_{PPM}: n = 6, m = 1 \\ g_{RM}: n = 6, m = 2 \\ g_{PM}: n = 6 \end{cases} \quad (40)$$

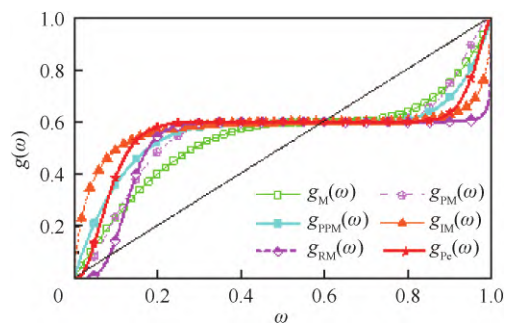


图 3 WENO5 格式中第 2 个模板的 Pe 格式的映射函数与 M、IM、PPM、RM 和 PM 函数的对比

Fig. 3 Function of Pe compared with fun M, fun IM, fun PPM, fun RM, fun PM for second model in WEN05

如果应用于 $(2r-1)$ 阶 WENO 格式, 可取 $n=r+2, m=r-1$, 相应的系数为

$$\alpha_{L,i} = (-1)^{i+1} \frac{(n+m+1)}{(n+1+i)} \cdot P(n+m; n, i, m-i) \quad (41)$$

式中: $i = 0, 1, \dots, m$; $\alpha_{R,0}$ 和 $\alpha_{R,m_{R+1}}$ 表达式同式 (36); $P(n; q_1, q_2, \dots, q_k)$ 为多重全排列:

$$P(n; q_1, q_2, \dots, q_k) = \frac{n!}{q_1! q_2! \dots q_k!} \quad (42)$$

3 格式性能分析

3.1 截断误差

对于五阶 WENO 格式而言, WENO-JS 的权重系数 ω_k^{JS} 有

$$\omega_k^{JS} = C_k + O(\Delta x^2) \quad (43)$$

将光滑函数 IS 在 x_j 处做 Taylor 展开

$$\begin{cases} IS_0 = f'^2 \Delta x^2 + \left(\frac{13}{13} f''^2 - \frac{2}{3} f' f''' \right) \Delta x^4 + \\ \quad \left(\frac{1}{2} f' f^{(4)} - \frac{13}{6} f'' f''' \right) \Delta x^5 + O(\Delta x^6) \\ IS_1 = f'^2 \Delta x^2 + \left(\frac{13}{13} f''^2 + \frac{1}{3} f' f''' \right) \Delta x^4 + O(\Delta x^6) \\ IS_2 = f'^2 \Delta x^2 + \left(\frac{13}{13} f''^2 - \frac{2}{3} f' f''' \right) \Delta x^4 + \\ \quad \left(\frac{13}{6} f'' f''' - \frac{1}{2} f' f^{(4)} \right) \Delta x^5 + O(\Delta x^6) \end{cases} \quad (44)$$

Henrick 等^[16]指出在 f 的一阶极值点 x_0 处, 即 $x \rightarrow x_0$ 时有

$$f'(x) \sim O(\Delta x) \quad (45)$$

此时 ω_k^{JS} 仅能一阶逼近真实权重, 即

$$\omega_k^{JS} = C_k + O(\Delta x) \quad (46)$$

根据映射函数重构的权重系数, 在 $\omega = C_k$ 处进行 Taylor 展开有

$$\begin{aligned} g_k^{Pe}(\omega) &= g_k^{Pe}(C_k) + g_k^{Pe'}(C_k)(\omega - C_k) + \dots + \\ &\quad \frac{g_k^{Pe^{(n+1)}}(C_k)(\omega - C_k)^{n+1}}{(n+1)!} + O((\omega - C_k)^{n+2}) \end{aligned} \quad (47)$$

即有

$$\begin{cases} g_k^{Pe}(\omega) = \\ \quad C_k + \frac{g_k^{Pe^{(n+1)}}(C_k)(\omega - C_k)^{n+1}}{(n+1)!} + O(\Delta x^{n+2}) \\ \omega_k^{Pe} = C_k + O(\Delta x^3) \end{cases} \quad (48)$$

只要 n 取不小于 2 的正整数, 该格式就能在极值点处达到空间上的五阶精度。

3.2 频谱性

WENO 是非线性格式, 其频谱性分析与线性

格式 Fourier 频谱分析类似, 可以使用 Pirozzol 提出的近似法色散关系 (ADR)。令 $f_j = e^{ikx_j}$, 其中 i 为虚数单位, 则

$$f_{j+n} = e^{ikx_{j+n}} = f_j e^{ikx_n} \quad (49)$$

由此可以推出修正波数:

$$K = \text{Re}(k) + i\text{Im}(k) \quad (50)$$

具体可参照文献[32-33]。其中, 实部 $\text{Re}(k)$ 代表色散误差, 虚部 $\text{Im}(k)$ 代表耗散误差。图 4 是格式 WENO-Pe 与其他格式的频谱性对比, 系数同式 (34) 和式 (35), 其中 WENO-AIM 系数选择 $k=4, m=2, C=10^4$ 。

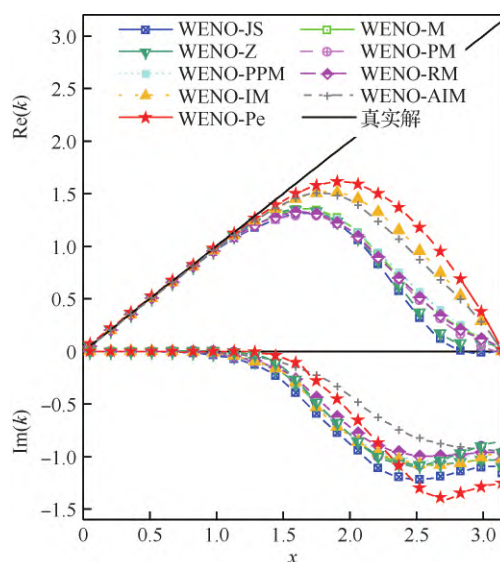


图 4 ADR 法的色散曲线与耗散曲线

Fig. 4 Dispersion and dissipation curves in ADR

从图 4 可见, WENO-Pe 格式的色散误差与数值耗散性均小于其他格式。

4 数值实验

无特殊说明, 本文的算例均采用无量纲形式的方程。

4.1 精度验证

4.1.1 定常问题

下面验证 WENO5-Pe 格式捕捉高阶极值点的性能, 仿照文献[34], 构造如下函数族:

$$u_0(x) = e^{a(x+1)} x^{n+1} \quad (51)$$

式中: $a = 0.5$; n 为非负整数, 当 $n=0$ 时, 该函数在 $[-1, 1]$ 上无极值点; 当 $n=1$ 时, 在此区间上

只有唯一的一阶极值点 0; 当 $n > 1$ 时, 仅有唯一的一阶、二阶极值点 0。设 N 为网格数, 分别使用 WENO5-Pe、WENO5-PPM、WENO5-RM 和 WENO5-IM 格式, 具体格式参数同式(40), 在不同网格下计算其一阶导数, 选取 $n = 0, 1, 2$ 时的函数, 统计数值解在 $x = 0$ 处与真实值的误差并计算误差阶, 结果如表 1 所示, 关于 WENO5-Z 在极值点处降阶可参考文献[21]。由表 1 可见, WENO5-PPM 格式在无极值点或仅有一阶极值点情况下能达到五阶, 但有二阶极值点时, 明显下降到三阶左右; WENO5-RM 和 WENO5-IM 在一阶极值点处就会降阶到三阶, 有二阶极值点时甚至降到更低的二阶; 而 WENO5-Pe

格式无论有无二阶极值点均能保持在五阶左右精度, 且在相同网格下, WENO5-Pe 格式的误差更小, 这表明提出的格式具备更高的精度。

4.1.2 非定常问题

本节验证一维线性对流方程, 该算例选自文献[15]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & -1 \leq x \leq 1 \\ u(x, 0) = \sin\left(\pi x - \frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right) \end{cases} \quad (52)$$

此问题存在精确解:

$$u(x, t) = \sin\left[\pi(x-t) - \frac{\sin(\pi(x-t))}{\pi}\right] \quad (53)$$

显然, 这是一个周期为 2 的函数, 且存在 2 个一阶极值点和一个二阶极值点, 无三阶极值点。选取时间步长为 $\Delta t = h^{5/3}$ (匹配精度)。分别使用 WENO5-Pe、WENO5-PPM、WENO5-RM、WENO5-IM 和 WENO5-Z 格式计算到时间 $t = 2.2$ 和 $t = 3$ (均无量纲, 下文同), 统计 L_2 误差及精度阶, 如表 2 所示。

$$er_{L_2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |u_{\text{exact},j} - u_{\text{num},j}|^2} \quad (54)$$

由表 2 可以看出, WENO5-Pe、WENO5-PPM、WENO5-RM、WENO5-IM 和 WENO5-Z 格式均能达到预期精度, 但 WENO5-Pe 的精度要优于其他 4 种格式。

4.2 耗散验证

为了验证 WENO5-Pe 格式长时间计算的稳定性, 选取如下一维对流方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x, 0) = e^{-C(x-a)^4} \end{cases} \quad (55)$$

式中: 取 $C = 10\,000$, $a = -0.5$; 分别使用 WENO5-Z、WENO5-PPM、WENO5-RM、WENO5-IM 和 WENO5-Pe 格式计算到时间 $t = 100$, 计算域为 $[-1, 1]$, 选取网格 $N = 100, N = 200, CFL = 0.5$, 得到计算结果如图 5 所示。

由图 5 可见, 使用同阶格式时, WENO5-PPM 与 WENO5-RM 效果相似, 其耗散均小于 WENO5-IM, WENO5-IM 在网格加密后会出现较大非物理振荡, 而 WENO5-Pe 更接近于真实值, 比其他 4 个格式的耗散更小, 能够更精确地捕

表 1 4 种数值格式计算结果对比(定常问题)

Table 1 Accuracy comparison of calculated by four schemes(steady)

WENO5-Pe	$N=100$	$N=200$	$N=400$
$n=0$	误差 6.0348×10^{-12}	1.8852×10^{-13}	1.5543×10^{-15}
	阶数	5.0003	6.9223
$n=1$	误差 6.0292×10^{-11}	1.8897×10^{-12}	5.9075×10^{-14}
	阶数	4.9957	4.9995
$n=2$	误差 1.6254×10^{-7}	6.2654×10^{-9}	2.5163×10^{-10}
	阶数	4.6937	4.6368
WENO5-PPM	$N=100$	$N=200$	$N=400$
$n=0$	误差 7.4970×10^{-10}	2.3382×10^{-11}	0.8174×10^{-13}
	阶数	5.0066	4.8693
$n=1$	误差 7.1382×10^{-9}	2.5187×10^{-10}	8.6292×10^{-12}
	阶数	4.7997	4.8672
$n=2$	误差 6.5312×10^{-6}	8.6329×10^{-7}	1.0825×10^{-7}
	阶数	2.8843	3.1043
WENO5-RM	$N=100$	$N=200$	$N=400$
$n=0$	误差 3.7171×10^{-10}	1.1658×10^{-11}	3.8348×10^{-13}
	阶数	4.9992	4.9320
$n=1$	误差 7.8158×10^{-9}	7.8750×10^{-10}	8.8027×10^{-11}
	阶数	3.1112	3.1617
$n=2$	误差 6.5950×10^{-6}	1.6487×10^{-6}	4.1217×10^{-7}
	阶数	2.0000	2.0000
WENO5-IM	$N=100$	$N=200$	$N=400$
$n=0$	误差 3.1394×10^{-10}	1.1862×10^{-11}	4.8453×10^{-13}
	阶数	4.8167	4.6196
$n=1$	误差 4.8373×10^{-9}	4.9164×10^{-10}	5.5319×10^{-11}
	阶数	3.2921	3.1517
$n=2$	误差 1.8696×10^{-6}	4.6757×10^{-7}	1.1691×10^{-7}
	阶数	1.9995	2.0877

表 2 5 种数值格式计算的结果对比(非正常问题)

Table 2 Accuracy comparison of calculated by five schemes (unsteady)

WENO5-Pe		$N = 50$	$N = 100$	$N = 200$
$t = 2.2$	误差	2.6760×10^{-5}	6.6478×10^{-7}	1.6152×10^{-7}
	阶数		5.3382	5.3219
$t = 3$	误差	3.0752×10^{-5}	8.6828×10^{-7}	2.4621×10^{-8}
	阶数		5.1444	5.1423
WENO5-PPM		$N = 50$	$N = 100$	$N = 200$
$t = 2.2$	误差	8.6726×10^{-5}	2.6477×10^{-6}	8.6150×10^{-8}
	阶数		5.0374	4.9401
$t = 3$	误差	1.8251×10^{-4}	5.2720×10^{-6}	1.4665×10^{-7}
	阶数		5.1293	5.1674
WENO5-RM		$N = 50$	$N = 100$	$N = 200$
$t = 2.2$	误差	7.6621×10^{-5}	2.3565×10^{-6}	7.3150×10^{-8}
	阶数		5.0270	5.0096
$t = 3s$	误差	1.3410×10^{-4}	3.8494×10^{-6}	1.0032×10^{-7}
	阶数		5.1215	5.2584
WENO5-IM		$N = 50$	$N = 100$	$N = 200$
$t = 2.2$	误差	3.5780×10^{-4}	1.2626×10^{-5}	5.9088×10^{-7}
	阶数		4.8668	4.4144
$t = 3$	误差	2.2564×10^{-4}	7.5198×10^{-6}	2.8976×10^{-7}
	阶数		4.9072	4.6978
WENO5-Z		$N = 50$	$N = 100$	$N = 200$
$t = 2.2$	误差	5.6673×10^{-4}	1.6474×10^{-5}	4.151×10^{-7}
	阶数		5.1447	5.2863
$t = 3$	误差	3.0611×10^{-4}	1.0695×10^{-5}	3.6868×10^{-7}
	阶数		4.8390	4.8584

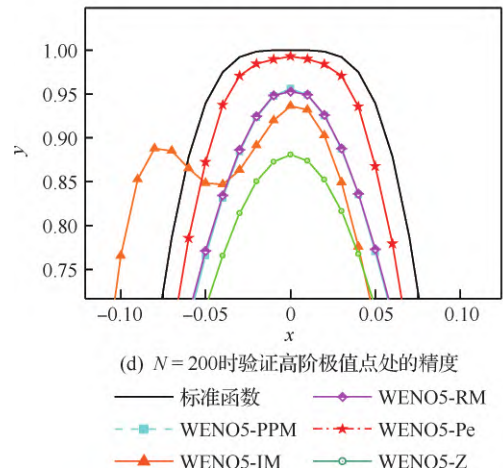
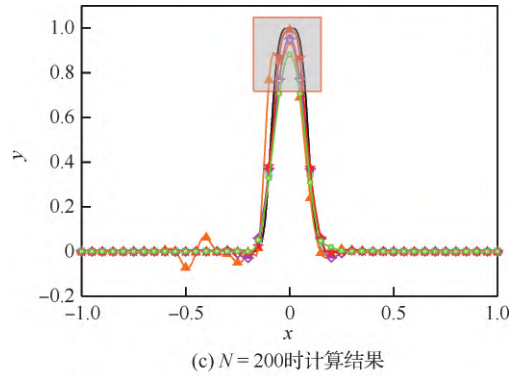
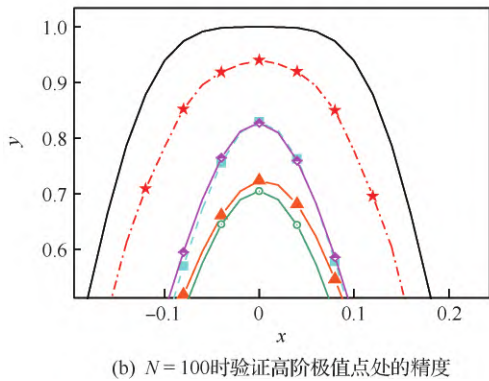
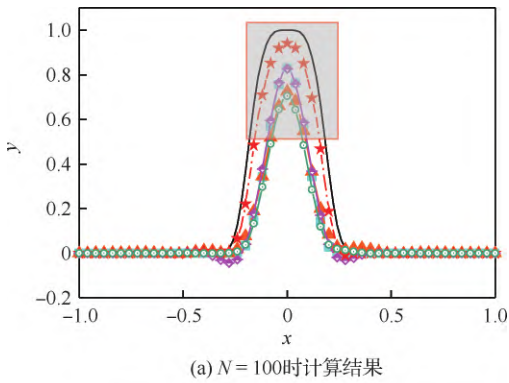


图 5 WENO5-Z、WENO5-PPM、WENO5-RM、WENO5-IM 和 WENO5-Pe 格式长时间计算的稳定性

Fig. 5 Comparison of stability in long time calculations with WENO5-Z, WENO5-PPM, WENO5-RM, WENO5-IM and WENO5-Pe

提高阶极值点。

4.3 Sod 激波管

该算例的初始条件为^[35]

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1, 0, 1) & 0 \leq x \leq 0.5 \\ (0.125, 0, 0.1) & 0.5 < x \leq 1 \end{cases} \quad (56)$$

设置两边界为流边界, 网格数 $J = 200$, 计算时间为 $t = 0.18$, $CFL = 0.4$, 并将 WENO5-JS 在 2000 个网格下的计算结果作为准确解, 分别使用 WENO5-Z、WENO5-PPM、WENO5-IM、WENO5-RM 和 WENO5-Pe 格式, 得到密度曲线如图 6 所示。由文献[16, 24, 26, 28]的数值实验可知, WENO5-Z、WENO5-PPM、WENO5-IM 和 WENO5-RM 均比 WENO5-Z 计算效果好, 而从图 6 可

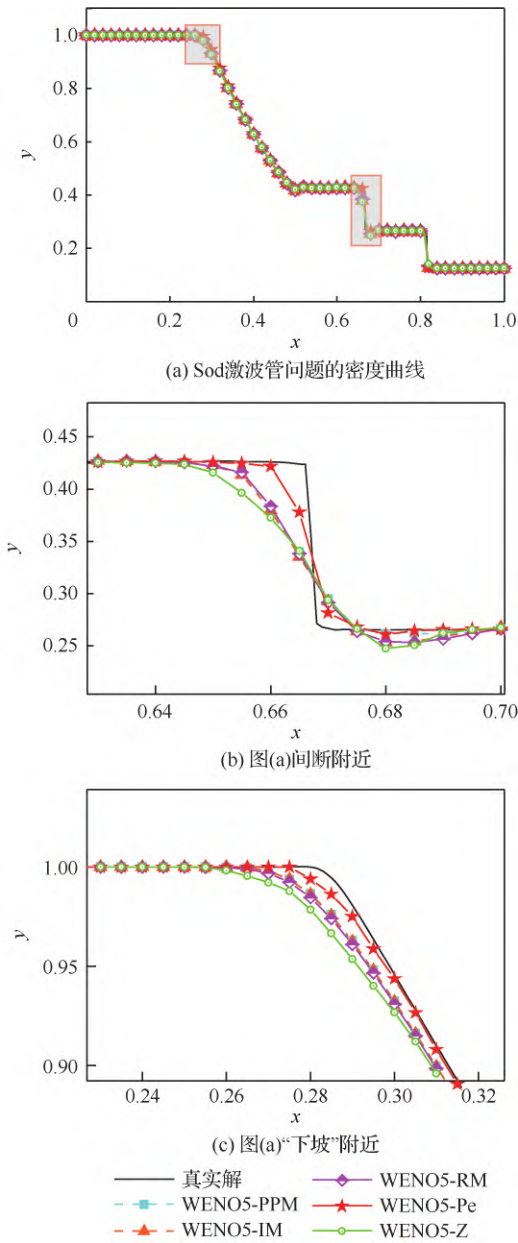


图 6 WENO5-Z、WENO5-PPM、WENO5-RM、WENO5-IM 和 WENO5-Pe 格式模拟 Sod 激波管
Fig. 6 Simulation results of Sod shock tube by using WENO5-Z, WENO5-PPM, WENO5-RM, WENO5-IM and WENO5-Pe

见, WENO5-Pe 的捕捉间断能力相较于以上格式有明显提升。

4.4 Lax 激波管

此算例^[36]描述的流场中同时包含有激波、接触间断、膨胀波和平滑区域,其初始条件为

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (0.445, 0.698, 0.3528) & -0.5 \leq x \leq 0 \\ (0.500, 0, 0.571) & 0 < x \leq 0.5 \end{cases} \quad (57)$$

网格数 $J=200$, $CFL=0.2$, 计算终止到 $t=0.16$, 并将 WENO5-JS 在 2000 个网格下的计算结果作为准精确解, 分别使用 WENO-Z、WENO5-PPM、WENO5-IM、WENO5-RM 和 WENO5-Pe 格式, 得到密度曲线如图 7 所示。由图 7

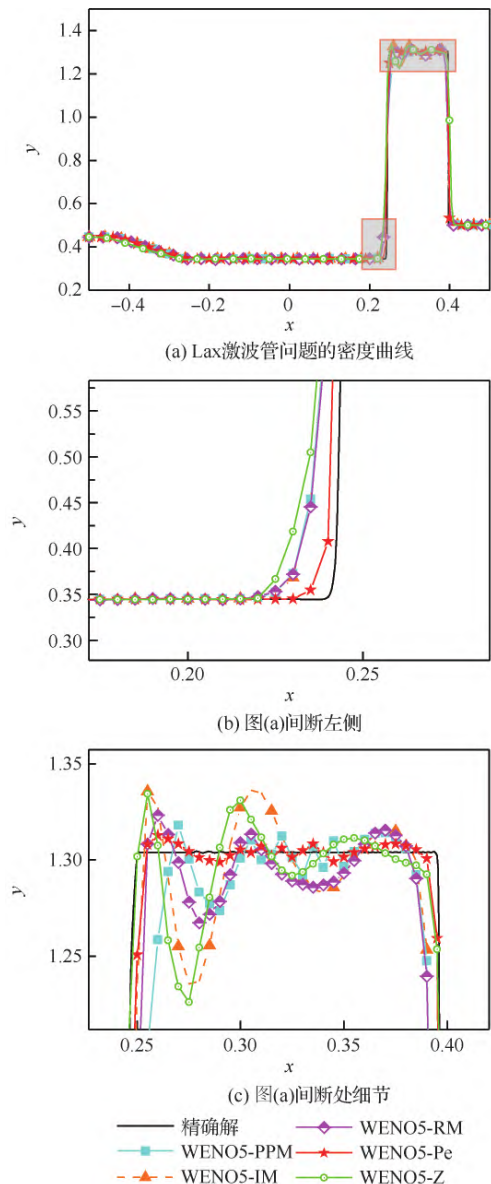


图 7 WENO5-Z、WENO5-PPM、WENO5-RM、WENO5-IM 和 WENO5-Pe 格式模拟 Lax 激波管
Fig. 7 Simulation results of Lax shock tube by using WENO5-Z, WENO5-PPM, WENO5-RM, WENO5-IM and WENO5-Pe

(a)~图 7(c)可见, WENO5-Pe 更接近于真实解, 产生的非物理振荡更小, 在间断处的识别更加敏感, 鲁棒性更强。

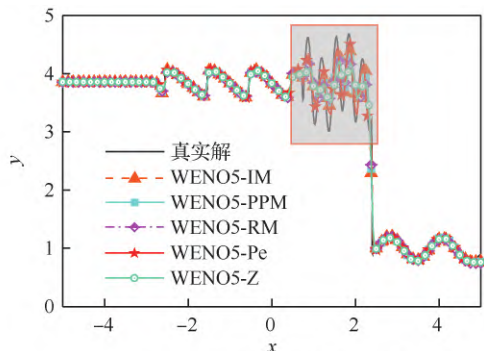
4.5 Osher-Shu 问题

该问题^[37]描述一道马赫数 3 的右行激波与熵波的相互作用, 熵波在激波作用下被压缩, 并向下游传播方向生成一系列声波。此算例可以检验数值格式的间断识别能力、稳定性和分辨率, 其初始条件为

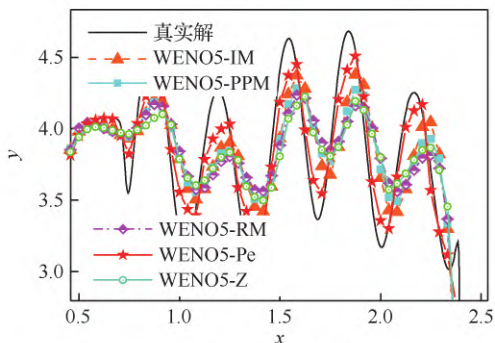
$$\begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix}^T = \begin{cases} (3.857143, 2.629369, 10.33333) & -5 \leq x \leq -4 \\ (1 + 0.2\sin(5x), 0, 1) & -4 < x \leq 5 \end{cases} \quad (58)$$

选取网格点 $J = 240$, CFL = 0.4, 计算终止时间为 $t = 1.8$, 分别使用 WENO5-Z、WENO5-PPM、WENO5-IM、WENO5-RM 和 WENO5-Pe 格式计算该问题, 选取 WENO5-JS 格式在 2000 个网格下计算结果为准精确解, 得到密度曲线如图 8 所示, 统计计算所用时间如表 3 所示。

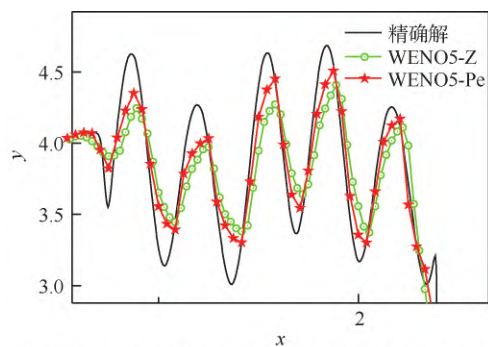
由图 8 可见, 在同样网格下 WENO5-Pe 格式具备更好的分辨率, 而且比其他 4 个格式计算出



(a) Osher-Shu 问题的密度曲线



(b) 图(a)局部放大



(c) $N = 240$ 的WENO5-Pe与 $N = 360$ 的WENO5-Z计算结果对比

图 8 WENO5-Z、WENO5-PPM、WENO5-RM、WENO5-IM 和 WENO5-Pe 格式模拟 Shu-Osher 问题

Fig. 8 Simulation results of Shu-Osher problem by using WENO5-Z, WENO5-PPM, WENO5-RM, WENO5-IM and WENO5-Pe

表 3 指定网格下各格式计算耗时

Table 3 Time taken to calculate data in specified grid for each scheme

格式(网格数)	CPU 耗时/s
WENO5-PPM(240)	8.6117
WENO5-IM(240)	8.2992
WENO5-RM(240)	8.5558
WENO5-Pe(240)	8.5670
WENO5-Z(240)	4.7580
WENO5-Z(360)	9.0481

的函数极值点偏移量明显的小, 而 WENO5-Z 的分辨率要略差于其他 4 种基于函数映射的 WENO 格式, 说明 WENO5-Pe 的色散误差更小。

另一方面, 使用网格 $N = 360$ 的 WENO5-Z 格式, 与 $N = 240$ 的 WENO5-Pe 格式计算结果对比, 可见在 CPU 耗时接近的情况下, 240 网格数的 WENO5-Pe 计算效果依旧优于 360 网格数的 WENO5-Z 计算效果。

从以上一维的算例中不难看出, WENO5-IM 与 WENO5-PPM 在精度与分辨率的表现上都优于 WENO5-RM 和 WENO5-Z, 而 WENO5-Pe 对极值点捕捉位置、识别间断的敏感性、数值精度以及计算的鲁棒性都要优于其他 4 个格式。

4.6 二维格式性能验证

二维欧拉方程的控制方程为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (59)$$

式中:

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E + p)u \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (E + p)v \end{bmatrix} \quad (60)$$

通量 F 与 G 的离散与分裂形式与一维情形一致。下面分别选取对流问题与定常问题分别验证格式精度与收敛性。

4.6.1 精度验证

二维对流问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ u(x, y, 0) = \sin(x + y) + 1.200 \end{cases} \quad (61)$$

该问题存在精确解:

$$u(x, y, t) = \sin(x + y - 2t) + 1.200 \quad (62)$$

且不需要通量分裂,可以更好地检验格式精度,分别使用 WENO5-Z、WENO5-PPM、WENO5-IM、WENO5-RM 和 WENO5-Pe 在不同网格下计算到 $t = 0.2$ 和 $t = 1.2$ 时刻,统计 L_2 误差并计算误差阶,结果如表 4 所示。通过表 4 可见,5 种格式在达到理论精度阶的同时,WENO5-Pe 的精度要略优于 WENO5-PPM、WENO5-IM 和 WENO5-RM,而它们均优于 WENO5-Z。

4.6.2 平板激波反射问题

有一道与 x 方向成 29° 角的激波射向平面上一壁面,并与壁面碰撞进而发生反射,形成入射波和反射波^[38],如图 9(a) 所示。当流动达到稳定后,该问题存在精确解,如图 9(b) 所示,该问题属于无黏流动,可以用 Euler 方程描述该过程。该问题的计算域为 $[0, 4] \times [0, 1]$ 的矩形区域,当 $t = 0$ 时,使激波刚好与底部壁面相遇,具体初始条件可以根据激波前后密度、压强等相关公式计算,其左侧初始条件:

$$[\rho, u, v, p] \Big|_{t=0}^{x=0} = [1.0, 2.90, 0, 0.71429] \quad (63)$$

顶部初始条件:

$$[\rho, u, v, p] \Big|_{t=0}^{y=1} = [1.69997, 2.61934, -0.50632, 1.52819] \quad (64)$$

表 4 5 种数值格式在二维算例下精度对比

Table 4 Accuracy comparison in case of two-dimensional problems calculated by five schemes

WENO5-Pe		$N=40$	$N=80$	$N=160$
$t=0.2$	误差	4.5328×10^{-4}	1.2657×10^{-5}	3.3580×10^{-7}
	阶数		5.1624	5.2362
$t=1.2$	误差	8.0650×10^{-4}	2.3281×10^{-5}	6.5381×10^{-7}
	阶数		5.1144	5.1541
WENO5-PPM		$N=40$	$N=80$	$N=160$
$t=0.2$	误差	7.5328×10^{-4}	2.4186×10^{-5}	7.2538×10^{-7}
	阶数		4.9609	5.0593
$t=1.2$	误差	3.3597×10^{-3}	9.7684×10^{-5}	2.7547×10^{-6}
	阶数		5.1041	5.1481
WENO5-RM		$N=40$	$N=80$	$N=160$
$t=0.2$	误差	8.7093×10^{-4}	2.4883×10^{-5}	6.9961×10^{-7}
	阶数		5.1293	5.1525
$t=1.2$	误差	3.2816×10^{-3}	1.0021×10^{-4}	3.0291×10^{-6}
	阶数		5.0333	5.0480
WENO5-IM		$N=40$	$N=80$	$N=160$
$t=0.2$	误差	9.4453×10^{-4}	2.7219×10^{-5}	7.7778×10^{-7}
	阶数		5.1169	5.1292
$t=1.2$	误差	3.5172×10^{-3}	1.0241×10^{-4}	2.8454×10^{-6}
	阶数		5.1021	5.1690
WENO5-Z		$N=40$	$N=80$	$N=160$
$t=0.2$	误差	8.3124×10^{-3}	3.5931×10^{-4}	1.6651×10^{-5}
	阶数		4.5320	4.4315
$t=1.2$	误差	1.9051×10^{-2}	7.4891×10^{-4}	3.2913×10^{-5}
	阶数		4.6689	4.5081

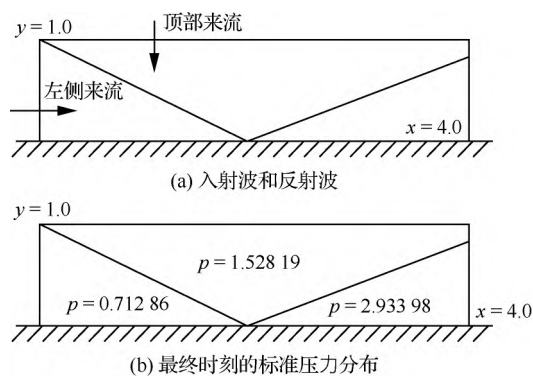


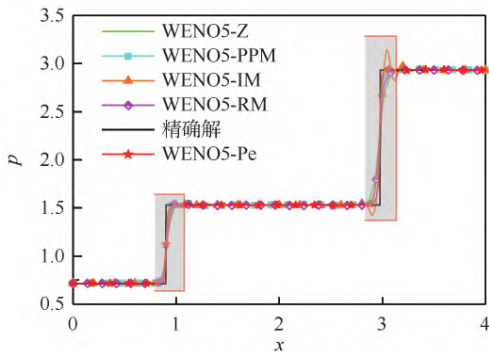
图 9 二维平板激波反射示意图

Fig. 9 Schematic of shock reflection problem

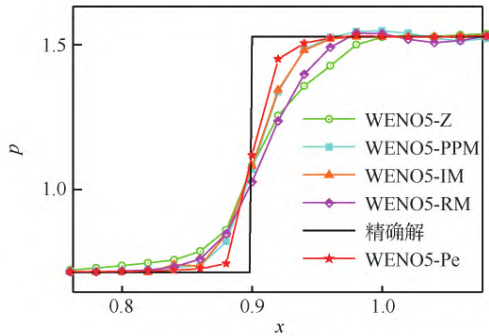
式中:右侧边界为自由流出条件,底部边界为反射条件。分别使用 WENO5-Z、WENO5-PPM、WENO5-IM、WENO5-RM 和 WENO5-Pe 在 200×50 的网格下计算该流动,终止时间为 $t = 4.5$, CFL=0.5。将计算获得的结果与精确解对比,结

果如图 10 所示,并统计 L_2 误差如表 5 所示。

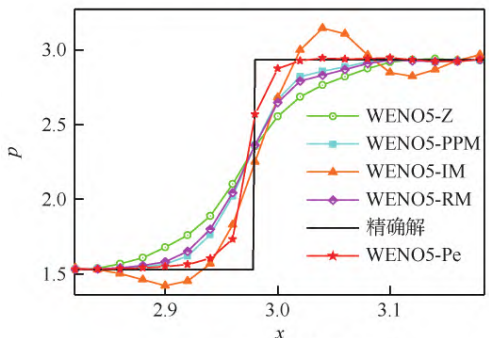
另外,比较相同网格下不同格式的 L_2 误差随迭代步数发展的关系曲线如图 10(e)和图 10(f)所示,从而对比其收敛速度,计算网格仍然为 200×50 。在相同网格,相同物理时间下,从图 10(a)~图 10(c)可见,WENO5-Pe 的分辨率更高,稳定性更好,捕捉激波的位置更准确,非物理振荡更小,而 WENO5-Z 对激波初始位置的捕捉误差较大,WENO5-IM 出现了较明显的非物理振荡;通过表 5 可见,计算到相同时刻 WENO5-Pe 的精度高于其他五阶格式;通过图 10(e)和图 10(f)可见,相同网格和耗时的情况下,WENO5-Pe 相较于其他格式计算到收敛的耗时更短,而最终收敛时的精度也更高。



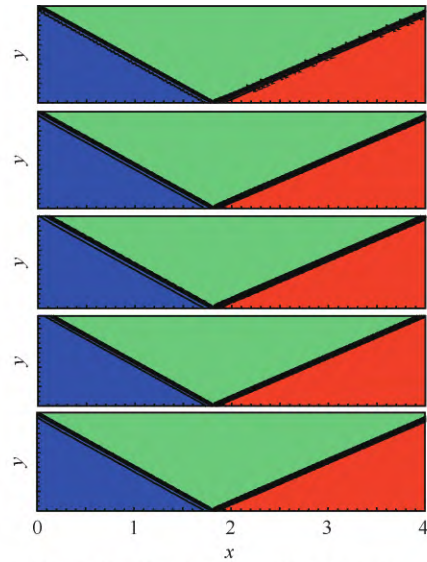
(a) $y=0.5$ 处的压力分布



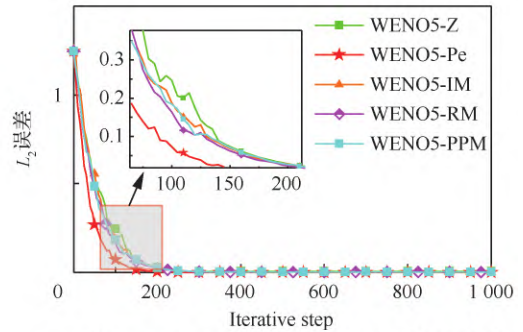
(b) $y=0.5, x=0.9$ 处的压力分布



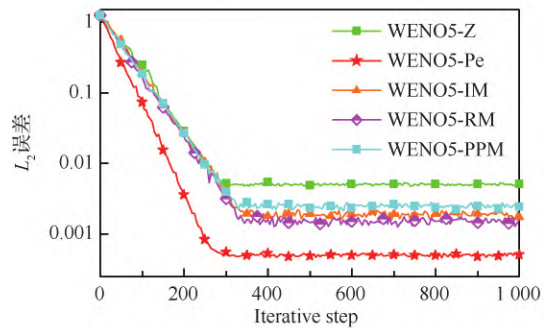
(c) $y=0.5, x=3.0$ 处的压力分布



(d) 5种格式的压力云图(从上至下依次为WENO5-IM、WENO5-PPM、WENO5-RM、WENO5-Z和WENO5-Pe)



(e) 5种WENO格式产生的误差随迭代步数的发展曲线



(f) 5种WENO格式产生的误差随迭代步数的发展曲线(非等距坐标系)

图 10 WENO5-Z、WENO5-PPM、WENO5-RM、WENO5-IM 和 WENO5-Pe 格式模拟平板激波反射问题

Fig. 10 Simulation results of shock reflection problem by using WENO5-Z, WENO5-PPM, WENO5-RM, WENO5-IM and WENO5-Pe

表 5 5 种 WENO 格式计算二维激波反射到 $t=4.5$ 时刻得到的结果对比

Table 5 Accuracy comparison of two-dimensional shock reflection problem calculated by five WENO schemes when $t=4.5$

格式	L_2 误差	计算耗时/s
WENO5-IM	5.9166×10^{-2}	156.7056
WENO5-PPM	5.2618×10^{-2}	164.6762
WENO5-RM	5.3149×10^{-2}	159.1999
WENO5-Z	8.9880×10^{-2}	131.6714
WENO5-Pe	7.4510×10^{-3}	175.3580

4.7 二维 Riemann 问题

该问题选自 Liu 等的数值实验^[39], 初始时刻 4 个计算子区域内流体有不同的初值, 当瞬间除去 4 个计算子区域内膜后, 在计算区域形成激波、涡和接触间断相互作用的复杂流动。该问题求解域为 $[0, 2] \times [0, 2]$, 初始条件为

$$\begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{bmatrix}^T = \begin{cases} [1.5, 0, 0, 1.5] & 0.8 < x < 1, 0.8 < y < 1 \\ [0.5323, 0, 1.206, 0.3] & 0.8 < x < 1, 0 < y < 0.8 \\ [0.138, 1.206, 1.206, 0.029] & 0 < x < 0.8, 0 < y < 0.8 \\ [0.5323, 1.206, 0, 0.3] & 0 < x < 0.8, 0.8 < y < 1 \end{cases} \quad (65)$$

4 条边界均为自由输出边界, 即在每一条边界上, 都有

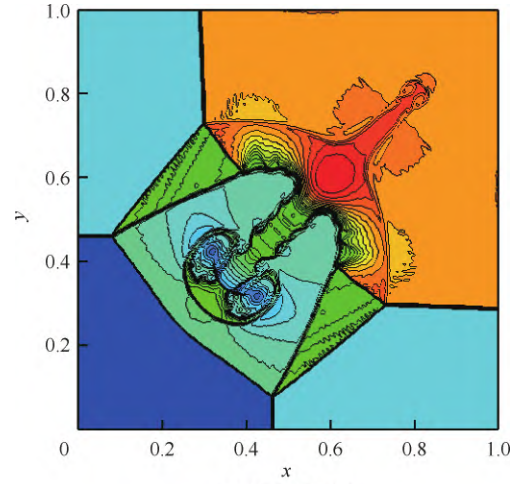
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (66)$$

使用 400×400 均匀网格, 计算终止时间 $t=0.8$, 条件数 $CFL=0.5$, 分别使用五阶的 WENO5-IM、WENO5-PPM、WENO5-RM、WENO5-Z 和 WENO5-Pe 计算其流场变化。图 11(a)~图 11(e) 是从 0.2~1.7 的 30 条密度等值线。

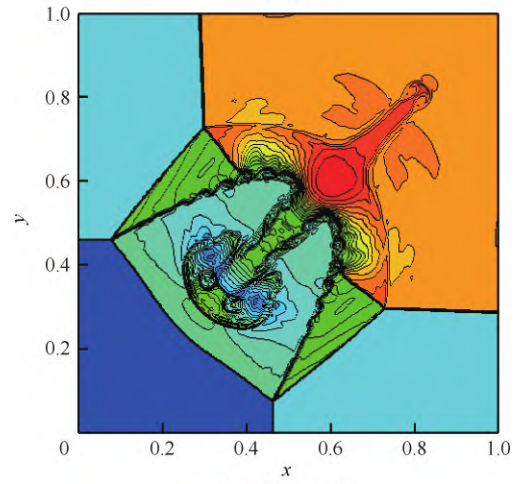
观察图 11(a)~图 11(e) 可见, WENO5-RM 和 WENO5-PPM 比 WENO5-Z 的分辨率更高, 同时 WENO5-IM 比 WENO5-RM 和 WENO5-PPM 的分辨率稍高, 而 WENO5-Pe 比 WENO5-IM 的分辨率更明显, 可以观察到更多的涡结构细节, 密度的分界线轮廓也更精准, 由此可见其捕捉流场细节能力更强。

4.8 Rayleigh-Taylor 不稳定性问题

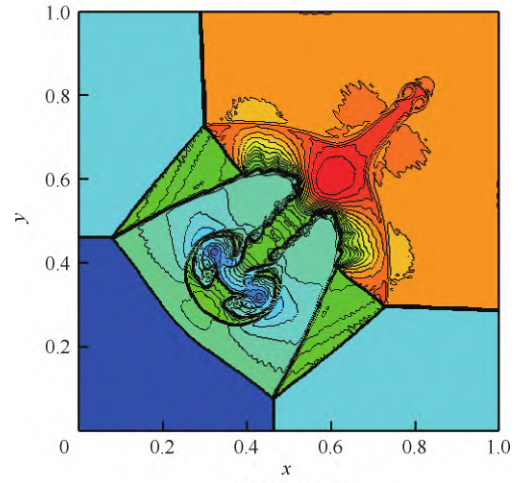
该算例描述初始流场中存在两种密度不同的流体, 在重力场作用下, 位于上方的密度较大的流体加速进入下方的密度较小的流体的失稳过程,



(a) WENO5-IM



(b) WENO5-PPM



(c) WENO5-RM

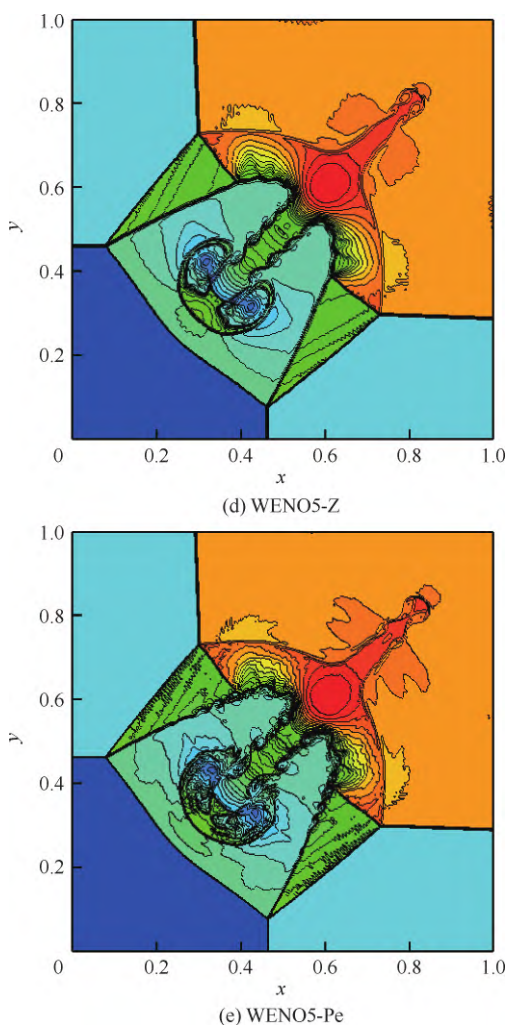


图 11 WENO5-Z、WENO5-PPM、WENO5-RM、WENO5-IM 和 WENO5-Pe 格式计算二维 Riemann 问题得到的密度云图

Fig. 11 Density contours obtained by simulating two-dimensional Riemann problem with WENO5-Z, WENO5-PPM, WENO5-RM, WENO5-IM and WENO5-Pe

最终形成复杂的流场^[40]。其计算域为 $[0, 0.25] \times [0, 1]$, 计算初始条件为

$$\begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{bmatrix}^T = \begin{cases} \left[2, 0, -0.025 \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \cos(8\pi x), 2y+1 \right] & 0 \leq y \leq 0.5 \\ \left[2, 0, -0.025 \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \cos(8\pi x), y+1.5 \right] & 0.5 < y < 1 \end{cases} \quad (67)$$

在控制方程式(59)和式(60)右侧添加源项以模拟重力影响。

$$S = [0, 0, \rho, \rho v]^T \quad (68)$$

气体指数取 $\gamma = 5/3$, 设置左右边界为反射壁面, 上下边界设为常值。

$$\begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{bmatrix}^T = \begin{cases} [1, 0, 0, 2.5] & y = 1 \\ [2, 0, 0, 1] & y = 0 \end{cases} \quad (69)$$

计算网格为 240×960 , 计算终止时间 $t = 1.95$, $CFL = 0.5$, 图 12(a)~图 12(e) 给出的

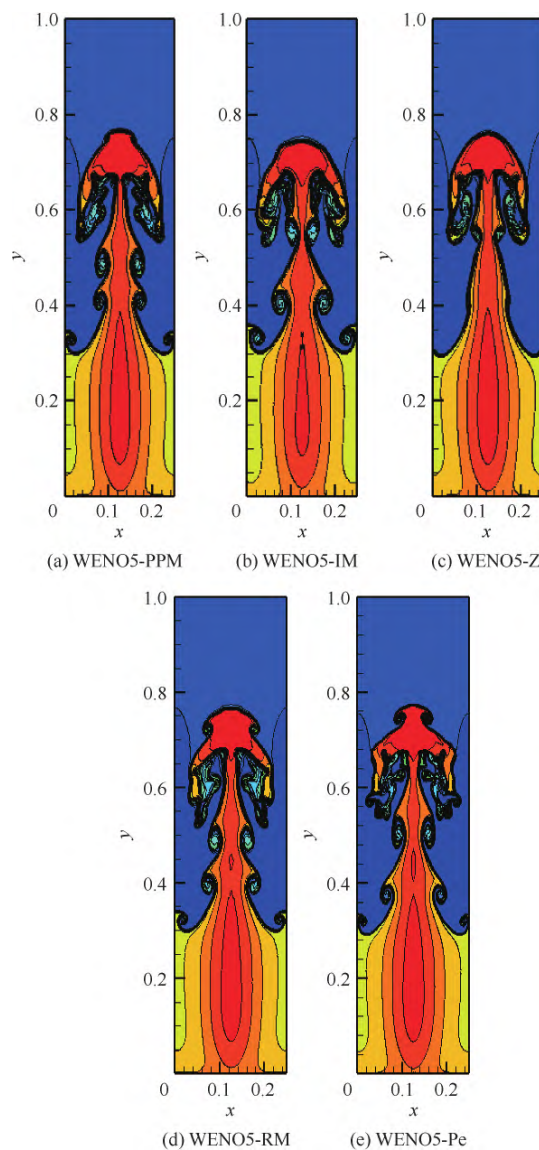


图 12 WENO5-Z、WENO5-PPM、WENO5-RM、WENO5-IM 和 WENO5-Pe 格式计算 Rayleigh-Taylor 问题得到的密度等值线

Fig. 12 Density contours obtained by simulating Rayleigh-Taylor problem with WENO5-Z, WENO5-PPM, WENO5-RM, WENO5-IM and WENO5-Pe

是 5 种 WENO 格式的计算结果,密度等值线为 0.9650~2.1481 之间 15 等份。

由图 12 可见,同样网格下 WENO5-Z 分辨率最低,甚至在 $y = 0.5$ 附近无法识别涡结构, WENO5-RM 的分辨率略高于 WENO5-PPM 和 WENO5-IM,而 WENO5-Pe 的分辨率更好,能够在扩散界面捕捉到更多流场结构。

4.9 双 Mach 反射问题

强激波双 Mach 反射问题^[41]是测试数值格式分辨率的经典算例之一。本算例的计算域为 $[0, 4] \times [0, 1]$, 初始条件为一道与 x 轴正方向成 60° , $Ma = 10$ 的右行斜激波在 $x = 1/6$ 处与下壁面相遇, 激波一直延伸至上壁面, 其右侧参数 $[\rho, u, v, p]$ 为 $[1.4, 0, 0, 1.0]$, 左侧参数为 $[8.0, 7.1447, -4.125, 116.5]$ 。上边界条件按激波传播精确解给出, 左边界与 $x \leq 1/6$ 的下边界按流入条件给出, 右边界为流出条件, $x > 1/6$ 的下边界部分为壁面条件。计算网格为 960×240 , 终止时间为 $t = 0.2$, $CFL = 0.5$, 图 13(a)~图 13(e)

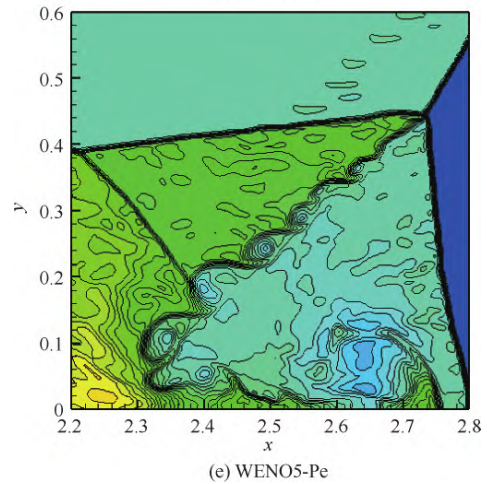
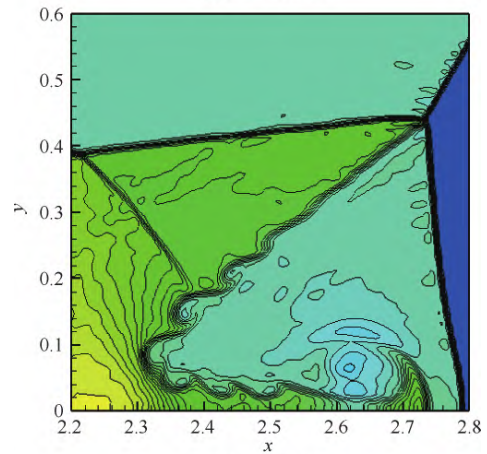
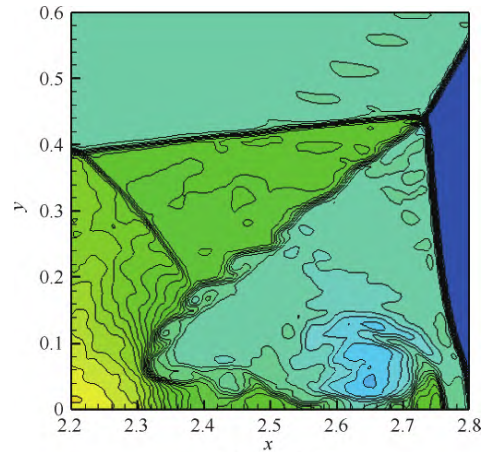
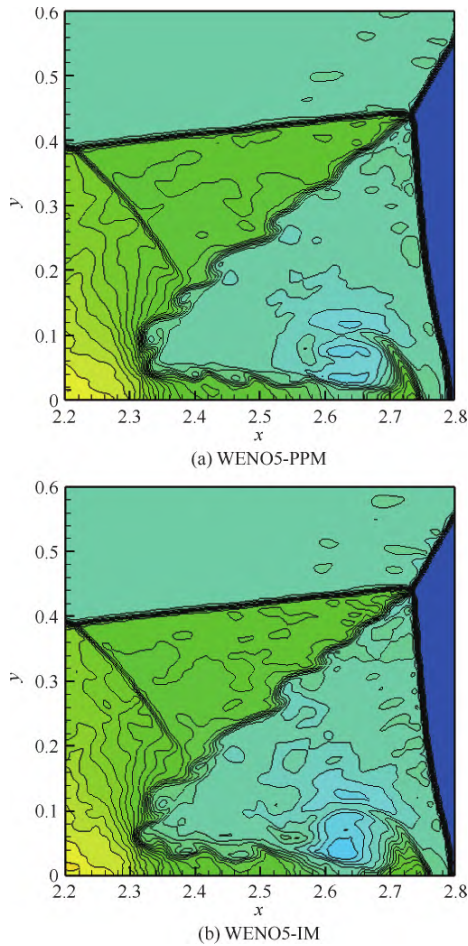


图 13 WENO5-PPM, WENO5-IM, WENO5-RM, WENO5-Z 和 WENO5-Pe 格式计算双马赫反射问题得到的密度等值线

Fig. 13 Density contours of double Mach reflection problem using WENO5-PPM, WENO5-IM, WENO5-RM, WENO5-Z and WENO5-Pe

为最终时刻尾部区域 5 种 WENO 格式计算的密度 2~22 的 40 条等值线图。

由图 13 可见, WENO5-Z、WENO5-PPM 和 WENO5-RM 格式的计算结果相似, 三者的分辨率略低于 WENO5-IM, 而 WENO5-Pe 的分辨率又高于 WENO5-IM, 其计算结果显示的激波更清晰, 滑移线上卷起的涡结构也更丰富。

5 结 论

针对传统 WENO 格式在极值点处精度降低的情况, 本文基于对权重系数重构的思想, 设计出一族以 WENO-JS 格式的权重系数为自变量的映射函数, 从而得到新格式 WENO-Pe, 克服了一阶和高阶极值点处降阶的缺陷, 且可以推广到高阶格式, 并通过数值实验与其他格式对比验证了 WENO-Pe 格式的性能:

1) WENO-Pe 格式的色散误差与数值耗散均小于 WENO-JS、WENO-Z、WENO-M 以及列举的其他映射函数型格式。

2) 对比 WENO-IM 和 WENO-RM 格式, WENO-Pe 在一阶极值点处能够保持理论精度。对比 WENO-PPM 格式, WENO-Pe 在二阶极值点处也基本保持精度不下降。

3) 在相同精度情况下, 本文 WENO-Pe 格式拥有更良好的分辨率, 在 Riemann 问题和双马赫反射问题中, 明显可见其计算结果能捕捉更多的间断、涡结构等流场细节。

参 考 文 献

- [1] SENGUPTA T K, GANERWAL G, DIPANKAR A. High accuracy compact schemes and Gibbs' phenomenon [J]. *Journal of Scientific Computing*, 2004, 21(3): 253-268.
- [2] HARTEN A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws [J]. *Journal of Computational Physics*, 1983, 49(3): 357-393.
- [3] COCKBURN B, SHU C W. The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V [J]. *Journal of Computational Physics*, 1998, 141(2): 199-224.
- [4] HUYNH H T. A flux reconstruction approach to high-order schemes including discontinuous Galerkin methods [C]// 18th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference. Reston: AIAA, 2007.
- [5] HARTEN A, ENGQUIST B, OSHER S, et al. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III [J]. *Journal of Computational Physics*, 1987, 71(2): 231-303.
- [6] SHU C W, OSHER S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 1988, 77(2): 439-471.
- [7] LIU X D, OSHER S, CHAN T. Weighted essentially non-oscillatory schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 1994, 115(1): 200-212.
- [8] JIANG G S, SHU C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, 126(1): 202-228.
- [9] 李康, 刘娜, 何志伟, 等. 一种基于双界面函数的界面捕捉方法 [J]. *力学学报*, 2017, 49(6): 1290-1300.
LI K, LIU N, HE Z W, et al. A new interface capturing method based on double interface functions [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(6): 1290-1300 (in Chinese).
- [10] 李超群, 李易, 张晨曦, 等. 沿流向微结构沟槽流场直接数值模拟 [J]. *航空学报*, 2020, 41(11): 123628.
LI C Q, LI Y, ZHANG C X, et al. Direct numerical simulation of flow field over streamwise micro riblets [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2020, 41(11): 123628 (in Chinese).
- [11] LI H B, JIANLING L, CHA X, et al. Investigation of hot jet on active control of oblique detonation waves [J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2020, 33(3): 861-869.
- [12] 刘君, 韩芳, 魏雁昕. 应用维数分裂方法推广 MUSCL 和 WENO 格式的若干问题 [J]. *航空学报*, 2022, 43(3): 125009.
LIU J, HAN F, WEI Y X. MUSCL and WENO schemes problems generated by dimension splitting approach [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2022, 43(3): 125009 (in Chinese).
- [13] 杨理, 岳连捷, 张新宇. 斜爆轰波的波角和法向速度-曲率关系初探 [J]. *航空学报*, 2020, 41(11): 123701.
YANG L, YUE L J, ZHANG X Y. Preliminary study on wave angle and normal velocity-curvature relation of oblique detonation wave [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2020, 41(11): 123701 (in Chinese).
- [14] 杜钰锋, 林俊, 王勋年, 等. 亚声速风洞可压缩流体扰动模态分析 [J]. *航空学报*, 2021, 42(6): 124424.
DU Y F, LIN J, WANG X N, et al. Analysis of modes of disturbances in compressible fluid in subsonic wind tunnel [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2021, 42(6): 124424 (in Chinese).
- [15] HENRICK A K, ASLAM T D, POWERS J M. Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: Achieving optimal order near critical points [J]. *Journal of Computational Physics*, 2005, 207(2): 542-567.

- [16] BORGES R, CARMONA M, COSTA B, et al. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*, 2008, 227(6): 3191-3211.
- [17] CASTRO M, COSTA B, DON W S. High order weighted essentially non-oscillatory WENO-Z schemes for hyperbolic conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, 230(5): 1766-1792.
- [18] YAN Z G, LIU H Y, MAO M L, et al. New nonlinear weights for improving accuracy and resolution of weighted compact nonlinear scheme [J]. *Computers & Fluids*, 2016, 127: 226-240.
- [19] BHISE A A, RAJU G N, RATHAN S, et al. An efficient hybrid WENO scheme with a problem independent discontinuity locator[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2019, 91(1): 1-28.
- [20] ZHANG S H, ZHU J, SHU C W. A brief review on the convergence to steady state solutions of Euler equations with high-order WENO schemes[J]. *Advances in Aerodynamics*, 2019(1): 307-331.
- [21] WU X S, ZHAO Y X. A high-resolution hybrid scheme for hyperbolic conservation laws[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2015, 78(3): 162-187.
- [22] FAN P. High order weighted essentially nonoscillatory WENO- γ schemes for hyperbolic conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*, 2014, 269: 355-385.
- [23] KIM C H, HA Y, YOON J. Modified non-linear weights for fifth-order weighted essentially non-oscillatory schemes [J]. *Journal of Scientific Computing*, 2016, 67(1): 299-323.
- [24] FENG H, HUANG C, WANG R. An improved mapped weighted essentially non-oscillatory scheme[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, 232: 453-468.
- [25] FENG H, HU F X, WANG R. A new mapped weighted essentially non-oscillatory scheme[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2012, 51(2): 449-473.
- [26] LI Q, LIU P X, ZHANG H X. Piecewise polynomial mapping method and corresponding WENO scheme with improved resolution[J]. *Communications in Computational Physics*, 2015, 18(5): 1417-1444.
- [27] 刘朋欣, 李沁, 张涵信. 基于映射函数的中心型三阶格式[J]. *空气动力学学报*, 2017, 35(1): 71-77.
LIU P X, LI Q, ZHANG H X. A kind of third order central scheme based on mapping functions[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2017, 35(1): 71-77 (in Chinese).
- [28] WANG R, FENG H, HUANG C. A new mapped weighted essentially non-oscillatory method using rational mapping function[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2016, 67(2): 540-580.
- [29] VEVEK U S, ZANG B, NEW T H. Adaptive mapping for high order WENO methods[J]. *Journal of Computational Physics*, 2019, 381: 162-188.
- [30] 张德良. 计算流体力学教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010: 163-168.
ZHANG D L. A course in computational fluid dynamics [M]. Beijing: Higher Education Press, 2010: 163-168. (in Chinese).
- [31] SHU C W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws; NASA C-R-97-206253 [J]. Washington, D C.: NASA, 1998.
- [32] PIROZZOLI S. On the spectral properties of shock-capturing schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 2006, 219(2): 489-497.
- [33] 涂国华, 邓小刚, 毛枚良. 5阶非线性WCNS和WENO差分格式频谱特性比较[J]. *空气动力学学报*, 2012, 30(6): 709-712.
TU G H, DENG X G, MAO M L. Spectral property comparison of fifth-order nonlinear WCNS and WENO difference schemes[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2012, 30(6): 709-712 (in Chinese).
- [34] 骆信, 吴颂平. 改进的五阶WENO-Z+格式[J]. *力学学报*, 2019, 51(6): 1927-1939.
LUO X, WU S P. An improved fifth-order WENO-Z+ scheme[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, 51(6): 1927-1939 (in Chinese).
- [35] SOD G A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*, 1978, 27(1): 1-31.
- [36] LAX P D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation [J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1954, 7(1): 159-193.
- [37] SHU C W, OSHER S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1988, 77(2): 439-471.
- [38] YEE H C, WARMING R F, HARTEN A. Implicit total variation diminishing (TVD) schemes for steady-state calculations[J]. *Journal of Computational Physics*, 1985, 57(3): 327-360.
- [39] LAX P D, LIU X D. Solution of two-dimensional Riemann problems of gas dynamics by positive schemes[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1998, 19(2): 319-340.
- [40] SHI J, ZHANG Y T, SHU C W. Resolution of high order WENO schemes for complicated flow structures[J]. *Journal of Computational Physics*, 2003, 186(2): 690-696.
- [41] WOODWARD P, COLELLA P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks[J].

New fifth order WENO scheme based on mapping functions

LIU Bo¹, LI Shiyao^{2,3}, CHEN Jiayu^{4,5}, CHENG Qihao⁶, SHI Xiaotian¹*^{*}

1. China Academy of Aerospace Aerodynamics, Beijing 100074, China

2. State Key Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China

3. School of Engineering Science, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

4. State Key Laboratory of Hydraulic Engineering Simulation and Safety, Tianjin University, Tianjin 300072, China

5. School of Civil Engineering, Tianjin University, Tianjin 300350, China

6. School of Mathematics, Tianjin University, Tianjin 300350, China

Abstract: Differential formats with high accuracy and high resolution are critical for numerical simulation of complex flow fields. To overcome the degradation defects of WENO-JS and WENO-Z at the first and second order extreme points of the flux function, a new mapping function (Pe) is designed and applied to the fifth order WENO scheme based on the idea of weighted coefficient reconstruction. The analyses of Approximate Dispersion Relations (ADR) indicate a smaller dispersion error and numerical dissipation of WENO-Pe than WENO-JS, WENO-Z, and other mapping function-based WENO schemes. We conduct numerical simulation in the new scheme and other schemes for 1D cases of the deformed Gaussian wave problem, Sod excitation tube problem, Lax excitation tube problem, and Shu-Osher problem, and 2D cases of the Riemann problem, Rayleigh-Taylor shock-density instability problem, and double Mach reflection problem. The results show that WENO-Pe has stronger ability to capture intermittency and higher resolution with the same order, thereby suitable for numerical simulation of complex flow fields.

Keywords: WENO; high precision; high resolution; mapping function; Euler equation

Received: 2021-07-26; Revised: 2021-08-17; Accepted: 2021-09-06; Published online: 2021-09-26 16:29

URL: <https://hkxb.buaa.edu.cn/CN/Y2022/V43/I12/126155>

Foundation items: National Key Research and Development Program of China(2019YFA0405300); National Natural Science Foundation of China (11872348, 11802297)

* Corresponding author. E-mail: xxtshi@163.com