

考虑阻尼的无限长小垂度缆索弹性波的传播¹⁾李丽君^{*,†} 曾晓辉^{*,†,2)} 崔哲华^{*,†,**} 吴 晗^{*,†}^{*}(中国科学院力学研究所流固耦合系统力学重点实验室, 北京 100190)[†](中国科学院大学工程科学学院, 北京 100049)^{**}(中国科学院大学未来技术学院, 北京 100049)

摘要 缆索结构被广泛应用于电气、土木、海洋和航空工程等领域, 随着缆索在工程中的应用长度越来越长, 高阶振动越来越明显, 研究时应该考虑扰动沿着缆索的传播. 现有对缆索弹性波传播的研究中, 通常不考虑阻尼项, 然而阻尼对于波的传播有着重要影响. 文章考虑阻尼的影响, 发展了包含阻尼项的三维弹性缆索运动方程. 通过求解上述含阻尼项的运动方程, 分别考察了面内面外弹性波的频率关系、相速度和群速度等自由传播特性, 进而通过计算无限长弹性缆索在初始余弦型脉冲作用下的位移响应, 分析扰动沿着该缆索的传播规律, 考察波的色散现象以及阻尼对于缆索弹性波传播的影响. 结果表明, 考虑阻尼后, 面内波和面外波均为色散波, 面内波在曲率的作用下, 为高度色散波. 此外, 在阻尼的影响下, 波的峰值在传播过程不断减小, 且波的后缘端点响应总是高于前缘端点响应.

关键词 缆索弹性波, 波的色散, 自由振动, 阻尼, 波的衰减

中图分类号: O347.4⁺¹ 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-22-606

PROPAGATION OF ELASTIC WAVE IN INFINITE CABLE WITH SMALL SAG
CONSIDERING DAMPING¹⁾Li Lijun^{*,†} Zeng Xiaohui^{*,†,2)} Cui Zhehua^{*,†,**} Wu Han^{*,†}^{*}(Key Laboratory for Mechanics in Fluid Solid Coupling Systems, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)[†](School of Engineering Science, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)^{**}(School of Future Technology, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract Cable structures are widely used in electrical, civil, marine and aviation engineering. As cable in engineering longer and longer, the high-order vibration becomes more and more obvious. Accordingly, the disturbance propagation should be considered in the study. In the existing research on the propagation of elastic waves in cables, the damping is usually not considered. However, damping has an important influence on the propagation of waves. We developed the motion equation of three-dimensional elastic cable by considering damping into equation. The free propagation characteristics of in-plane and out-of-plane waves are discussed respectively by solving the equations of motion above, including frequency relation, phase velocity, group velocity. And then, the wave propagation law of the cable is further discussed by calculating the displacement response under the initial cosine pulse. Besides, we study the wave dispersion

2022-12-30 收稿, 2023-04-06 录用, 2023-04-07 网络版发表.

1) 国家重点研发计划(2022YFB4201500)和国家自然科学基金(11672306)资助项目.

2) 通讯作者: 曾晓辉, 研究员, 主要研究方向为结构物的动力响应、稳定性和流固耦合研究. E-mail: zzh@imech.ac.cn

引用格式: 李丽君, 曾晓辉, 崔哲华, 吴晗. 考虑阻尼的无限长小垂度缆索弹性波的传播. 力学学报, 2023, 55(5): 1138-1150

Li Lijun, Zeng Xiaohui, Cui Zhehua, Wu Han. Propagation of elastic wave in infinite cable with small sag considering damping. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2023, 55(5): 1138-1150

and the influence of damping on the propagation of elastic waves in cables. The results show that both in-plane and out-plane waves are dispersive while damping is considered. In addition, the in-plane waves are highly dispersive with the curvature considered. In addition, the crest of wave dissipates in wave propagation, and the response of trailing edge is higher than the leading edge while damping is considered.

Key words elastic wave in cable, wave dispersion, free vibration, damping, wave dissipation

引言

缆索是一种轻质柔性的结构, 由于其具有传输力、承载有效载荷和长距离传输信号的能力, 被广泛应用于机械、民用、电气和航空航天等领域, 其应用的多样性形成了不同的弹性缆索理论, 大致可以将缆索分为小垂度的抛物型缆索和大垂度的悬链型缆索. 对于小垂度缆索, 通过求解连续性方程, 并通过抛物线近似简化分析, 可以得到缆索的固有频率和模态振型的解析解. 而对于大垂度缆索, 通常采用数值方法进行求解, 包括有限差分法^[1-3]、有限单元法^[4-5]、集总参数技术和多体动力学方法等.

对于缆索的研究, 随着时间的推移不断完善, 其发展通常伴随着实际的工程应用, 最初为不可拉伸的弦模型, 而后发展为考虑小垂度^[6]的弹性缆索模型, 这一模型已经适用于大多数工程中的缆索结构, 也有一些学者考虑几何非线性, 建立缆索模型^[7-8]. 在这些模型中大多将缆索考虑为没有弯曲刚度的柔性体, 也有一些研究考虑缆索的弯曲刚度^[9]. 广大的研究者们已经针对缆索动力学开展了丰富的理论研究, 也曾针对缆索动力学的相关问题整理专著^[10]和综述^[11-15].

弹性缆索的动力响应中具有许多值得研究的现象, Rega^[12]在其综述文章中对于弹性悬索的动力响应进行了总结. 然而已有的大多数文献多关注于缆索的模态, 这对于低频振动的缆索是有效的, 随着缆索在工程应用中的长度越来越长, 其高频振动越来越明显, 尤其是在风致振动中, 缆索常常可能发生高频振动^[14], 根据实测, 缆索发生涡激振动常常可达到几十阶^[16-17], 此时研究其模态将变得低效, 应通过弹性波法进行研究.

目前来说, 研究者们针对各类结构的弹性波问题已经开展了广泛的研究, 但采用弹性波理论对弹性缆索进行研究的文献较少. Baxy 等^[18]研究层状周期梁的轴向波和弯曲波的传播规律, 其结果可以用于低频振动控制. Banerjee^[19]通过对欧拉-伯努利梁

和铁木辛柯梁进行无量纲分析, 研究周期性参数变化引起的带隙位置和宽度的变化. Syam 等^[20]采用弹性波理论, 利用相容方程和平衡条件, 对框架结构进行了振动分析. Prasad 等^[21]研究弹性耦合伸缩元梁中弯曲波的传播, 研究表明分布弹簧层的耦合系数及耦合长度对于波的衰减起到关键作用. Perkin 等^[22-24]用哈密顿原理推导出无限长小垂度弹性悬垂缆索的运动方程, 研究缆绳的自由传播规律, 结果显示缆索的曲率耦合了横波和纵波的特性, 为非色散波; 在此基础上, 进一步采用解析和数值方法, 分别考察在频域和时域下, 强迫振动的简谐波在缆索上的传播以及缆索运动响应, 结果显示缆索时域上的位移响应和内部张力在通频带和止带有较大的差异^[25]. 吴承昊等^[26]对深海布放缆系统内弹性波的自由传播特性进行分析, 计算过程中保留缆索曲率与其弧长坐标的关系, 得到布放缆材料属性及缆绳内竖直张力等参数对于缆绳自由传播频率特性的影响曲线. Graff^[27]研究系泊缆和悬垂缆中的波传播, 并对其理论计算, 其计算中考虑缆绳的质量和曲率, 值得注意的是, 在周期复合板的振动中, 阻尼能够增加振动在禁带的衰减因子, 降低振动传递^[28]. 然而在缆索弹性波问题中, 尚未有考虑阻尼影响的相关研究报导, 后文中所展示的本文研究结果也表明, 阻尼对于缆索弹性波的传播也有着显著影响.

有鉴于此, 本研究考虑阻尼的影响, 发展含缆索曲率的三维有阻尼弹性缆索运动方程, 通过求解此方程, 研究缆索的频率关系、相速度和群速度等自由传播波特性, 进而考察无限长缆索在初始脉冲作用下的响应, 分析面内面外波的传播规律以及色散现象, 并通过对比有无阻尼时的传播波, 考察阻尼对于缆索弹性波传播的影响. 研究表明, 考虑阻尼后, 面内面外波均为色散波, 且面内纵波由于曲率的耦合作用为高度色散波. 此外, 阻尼不但引起振动过程波的峰值不断衰减, 而且使得波的后缘端点响应高于前缘端点响应.

1 缆索数学模型

对于长度较长、内部具有一定张力的小直径缆索来说,弯曲和扭转行为对于缆索影响较小^[17,29],在建模时可以考虑为只有轴向刚度的一维弹性连续体^[24],图1表示悬索的平衡构型 χ^e 和动力构型 χ^d .在重力作用下,悬索形成一个平面平衡曲线,弧长坐标为 s ,最大垂度为 D .缆索同一材料点对应的平衡位置矢量为 $\mathbf{R}^e(s)$,动力位置矢量为 $\mathbf{R}^d(s)$.将三维位移定义在沿着缆索静平衡切向、法向和副法向所形成的Frenet坐标系下,可以表示为 $\mathbf{u}(s,t) = \mathbf{R}^d(s,t) - \mathbf{R}^e(s)$,该位移沿着各个方向解后表示为 $\mathbf{u}(s,t) = u_1\mathbf{e}_\tau + u_2\mathbf{e}_n + u_3\mathbf{e}_b$,其中 $\mathbf{e}_\tau, \mathbf{e}_n$ 和 \mathbf{e}_b 分别为切向、法向和副法向的单位矢量.图1中还定义了直角坐标系 xyz , $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 和 \mathbf{e}_3 为 x, y 和 z 方向对应的单位矢量.

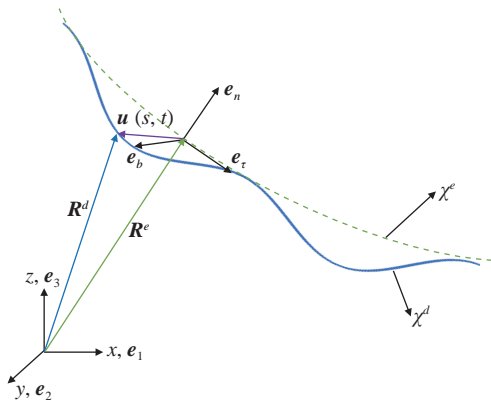


图1 缆索平衡构型图(绿色虚线), χ^e 和动力构型图(蓝色实线), χ^d . 三维位移 $\mathbf{u} = \mathbf{R}^d - \mathbf{R}^e$,以平衡时的Frenet坐标系 $\{\mathbf{e}_\tau, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b\}$ 为准
Fig. 1 Configuration diagram for cable equilibrium (green dashed curve), χ^e , and dynamic configuration (blue solid curve), χ^d . Three-dimensional displacement, $\mathbf{u} = \mathbf{R}^d - \mathbf{R}^e$, is referred to equilibrium Frenet traid $\{\mathbf{e}_\tau, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b\}$

1.1 运动方程

在所定义的Frenet坐标系下,动态应变可以表示为

$$\varepsilon_d = u_{1,s} - \kappa u_2 + \frac{1}{2}[(u_{1,s} - \kappa u_2)^2 + (u_{2,s} + \kappa u_1)^2 + u_{3,s}^2] \quad (1)$$

式中, $u_{1,s}, u_{2,s}$ 和 $u_{3,s}$ 表示3个位移沿着切向的位置导数, κ 表示缆索静平衡时的曲率.

应变能为

$$\Pi_s^D = \Pi_s^E + \int_0^s \left(P\varepsilon_d + \frac{1}{2}EA\varepsilon_d^2 \right) ds \quad (2)$$

式中, Π_s^D 和 Π_s^E 分别为缆索动态和静态应变能, P 和

EA 为缆索静平衡时的轴向张力和轴向刚度.

动能为

$$\Pi_k^D = \frac{1}{2}\rho A \int_0^s \mathbf{V}^D \cdot \mathbf{V}^D ds \quad (3)$$

式中, ρA 为缆索单位缆长的质量, $\mathbf{V}^D = \frac{d}{dt}\mathbf{u}(s,t)$ 表示每个材料点对应的速度.

本研究中考虑阻尼,因此在推导时除了重力和外力做的功,还计入阻尼力做的功,可以表示为

$$\delta W = \rho g \int_0^s (l_1 \delta u_1 + l_2 \delta u_2) A ds - \int_0^s (\mu_i \dot{u}_i \delta u_i) ds + \int_0^s F_i \delta u_i ds \quad (4)$$

式中第1项为重力做的功, ρg 为单位缆长的重力, δu_i 为各个方向的位移的变分, l_1 和 l_2 满足 $\mathbf{e}_2 = l_1 \mathbf{e}_\tau + l_2 \mathbf{e}_n$,第2项对应于阻尼力做的功, μ_i 和 \dot{u}_i 为各个方向的阻尼系数及速度分量,第3项为外力做的功, F_i 表示各个方向所受到的外力.

由哈密顿原理 $\int_{T_1}^{T_2} \delta(\Pi_k^D - \Pi_s^D) + \delta W dt = 0$,结合静平衡条件 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{,s} = \mathbf{u}_{,tt} = \mathbf{u}_{,t} = \mathbf{0}, \varepsilon_d = 0$,得到静平衡Frenet坐标系下的含曲率有阻尼三维弹性缆索非线性运动方程为

切向

$$[(P + EA\varepsilon_d)(u_{1,s} - \kappa u_2) + EA\varepsilon_d]_{,s} - \kappa(P + EA\varepsilon_d)(u_{2,s} + \kappa u_1) - \mu_1 \dot{u}_1 + F_1 = \rho A u_{1,tt} \quad (5)$$

法向

$$[(P + EA\varepsilon_d)(u_{2,s} + \kappa u_1)]_{,s} + \kappa[(P + EA\varepsilon_d)(u_{1,s} - \kappa u_2) + EA\varepsilon_d] - \mu_2 \dot{u}_2 + F_2 = \rho A u_{2,tt} \quad (6)$$

副法向

$$[(P + EA\varepsilon_d)u_{3,s}]_{,s} - \mu_3 \dot{u}_3 + F_3 = \rho A u_{3,tt} \quad (7)$$

式中 $u_{1,tt}, u_{2,tt}$ 和 $u_{3,tt}$ 表示各个方向的加速度.

1.2 小垂度近似

根据研究,悬索和拉索在自重作用下通常为小垂度索^[30-31],对于小垂度索来说,平衡时缆索的曲率和斜率都比较小,在这种情况下可以对平衡时为悬链型的缆索使用抛物线近似^[23],在小曲率下,平衡方程的解为 $P = P_0, \kappa = \rho Ag/P$,式中 P_0 表示平衡时的缆索水平张力.在小垂度情况下,可以忽略高阶项,得到线性化后的三维运动方程^[23]

$$u_{1,tt} = a_1 \varepsilon_{,s} - \kappa a_4 \psi - \frac{\mu_1}{\rho A} \dot{u}_1 + f_1 \quad (8)$$

$$u_{2,tt} = a_4 \psi_{,s} + \kappa a_1 \varepsilon - \frac{\mu_2}{\rho A} \dot{u}_2 + f_2 \quad (9)$$

$$u_{3,tt} = a_4 \theta_{,s} - \frac{\mu_3}{\rho A} \dot{u}_3 + f_3 \quad (10)$$

式中, $\varepsilon = u_{1,s} - \kappa u_2$ 为动态应变 ε_d 忽略高阶项后的表达式, $\psi = u_{2,s} + \kappa u_1, \theta = u_{3,s}, a_1 = c_t^2 + c_l^2, a_4 = c_t^2, f_j = \frac{F_j}{\rho A}$, 其中 $c_l = \sqrt{E/\rho}, c_t = \sqrt{P_0/(\rho A)} = \sqrt{g/\kappa}$ 分别为杆的纵波波速和弦的横波波速. 注意到后面的波速与缆索平衡曲率有关, $c_t^2 = P_0/(\rho A) = g/\kappa$. 前两个方程 (8) 和 (9) 描述了缆索平衡面内的响应, 第 3 个方程 (10) 描述了缆索面外响应, 可以看到面内的两个方向运动是相互耦合的, 而面外响应则与面内两个方向解耦, 后文将分别求解面内和面外响应.

2 缆索弹性波自由传播特性

2.1 面外传播波

式 (10) 描述了缆索面外响应, 这一经典问题的面外方程与张紧弦的面外方程相同, 其行波解在文献中很容易得到, 但在研究缆索传播波特性的文献中均不考虑结构阻尼的影响, 而本论文考虑了阻尼, 经过求解发现, 阻尼使得面外传播波发生色散.

从分解形式来求谐波, 假设 $u_3 = \Phi_3(s, t) = \bar{\Phi}_3(s)e^{-i\omega t}$, 其中 ω 为波的频率, $e^{-i\omega t}$ 为缆索的响应在时域上满足周期性条件, 将 u_3 代入式 (10) 并在空间上做傅里叶变换得到

$$\left(\omega^2 + i \frac{\mu_3}{\rho A} \omega - \gamma^2 a_4 \right) \bar{\Phi}_3(\gamma) = 0 \quad (11)$$

式中, γ 为波数, $\bar{\Phi}_3(\gamma)$ 表示 $\bar{\Phi}_3(s)$ 的傅里叶变换形式, 对式 (11) 应用非零解条件得到

$$\omega^2 + i \frac{\mu_3}{\rho A} \omega - \gamma^2 a_4 = 0 \quad (12)$$

求解式 (12) 可以得到沿着原点向正负方向传播两组频率 (为了与面内波区分, 在下标中加入 out, 下标中的 1, 2 表示波的传播方向)

$$\omega_{\text{out},1,2} = \frac{-i \frac{\mu_3}{\rho A} \pm \sqrt{4\gamma^2 a_4 - \left(\frac{\mu_3}{\rho A} \right)^2}}{2} \quad (13)$$

当阻尼为零时, 面外波的频率退化为 $\omega_{\text{out},1,2} = \pm \gamma \sqrt{a_4}$.

相速度为

$$c_{\text{out}} = \omega/\gamma = \frac{-i \frac{\mu_3}{\rho A} \pm \sqrt{4\gamma^2 a_4 - \left(\frac{\mu_3}{\rho A} \right)^2}}{2\gamma} \quad (14)$$

可以看到, 当阻尼为零时, 相速度退化为 $\pm \sqrt{a_4}$, 此时面外波的相速度与频率无关, 面外波为非色散波, 而当阻尼不为零时, 面外波的相速度与频率相关, 面外波为色散波.

群速度为

$$c_{g\text{out}} = \frac{d\omega}{d\gamma} = \frac{2a_4\gamma}{2\omega_{\text{out}} + i \frac{\mu_3}{\rho A}} \quad (15)$$

2.2 面内传播波

式 (8) 和式 (9) 控制着由横向和纵向耦合运动组成的平面运动, 两个方向的面内运动通过平衡曲率 κ 相互耦合, 为了便于进行后续的分析, 首先将方程 (8) 和式 (9) 转换为 1 阶形式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{A} \end{bmatrix} \Phi_{,s} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \Phi = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \bar{\mathbf{D}}_2 & 0 \end{bmatrix} \Phi + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{\mathbf{D}}_1 & 0 \end{bmatrix} \Phi - \mathbf{f} \quad (16)$$

式中涉及的矩阵如下

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_4 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -\kappa a_4 \\ \kappa a_1 & 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{D}}_2 = \begin{bmatrix} \partial^2/\partial t^2 & 0 \\ 0 & \partial^2/\partial t^2 \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{D}}_1 &= \begin{bmatrix} \frac{\mu_1}{\rho A} \partial/\partial t & 0 \\ 0 & \frac{\mu_2}{\rho A} \partial/\partial t \end{bmatrix} \\ \Phi^T &= \{u_1, u_2, \varepsilon, \psi\}, \mathbf{f}^T = \{0, 0, f_1, f_2\} \end{aligned}$$

2.2.1 频率关系

首先来确定自由传播波 ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$) 的特性, 这里从分解形式来求谐波, 令 $\Phi_j(s, t) = \bar{\Phi}_j(s)e^{-i\omega t}, j = 1 \sim 4$, 将其代入式 (16), 并对结果在空间上进行傅里叶变换, 可以得到以下代数方程

$$\begin{bmatrix} i\gamma \mathbf{I} + \mathbf{K}_1 & -\mathbf{I} \\ i\omega \boldsymbol{\mu} + \omega^2 \mathbf{I} & i\gamma \mathbf{A} + \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \bar{\Phi} = \mathbf{0} \quad (17)$$

其中 $\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{\rho A} \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}$. 对于非平凡解, 系数矩阵的

行列式为零,从而得到特征频率方程

$$Q(\omega; \gamma, c_l, c_t) = \omega^4 + \beta'_3 \omega^3 - \beta'_1 \omega^2 - \beta'_4 \omega + \beta'_2 = 0 \quad (18)$$

式中各系数如下

$$\beta'_1 = (a_1 + a_4)\gamma^2 + a_3 + a_5 + \frac{\mu_1}{\rho A} \frac{\mu_2}{\rho A}$$

$$\beta'_2 = (a_1\gamma^2 + a_3)(a_4\gamma^2 + a_5) - a_2^2\gamma^2$$

$$\beta'_3 = i \left(\frac{\mu_1}{\rho A} + \frac{\mu_2}{\rho A} \right)$$

$$\beta'_4 = i \left[\frac{\mu_1}{\rho A} a_5 + \frac{\mu_2}{\rho A} a_3 + \left(\frac{\mu_2}{\rho A} a_1 + \frac{\mu_1}{\rho A} a_4 \right) \gamma^2 \right]$$

这里引入了参数 a_2, a_3 和 a_5 如下定义: $a_2 = (2c_t^2 + c_l^2)\kappa, a_3 = c_t^2\kappa^2, a_5 = (c_t^2 + c_l^2)\kappa^2$. 在主幅角内求解式 (18), 可以得到 4 个根 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 和 ω_4 , 表示 4 组沿着不同方向的传播波频率, 包括沿着原点向正负方向传播的两组纵波频率和两组横波频率. 由特征频率方程 (18) 可以得到频率与波数之间的关系, 可以看出这一关系会受到曲率、波速和阻尼的影响, 为了进行对比验证我们将式 (18) 所预测的频率关系与文献 [25] 中的结果进行对比, 得到图 2 的频率关系曲线, 可以看到, 结果与文献吻合得较好.

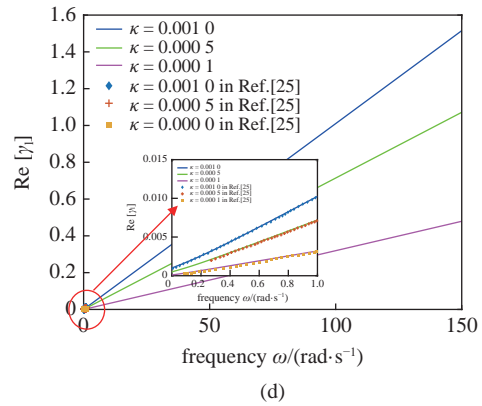
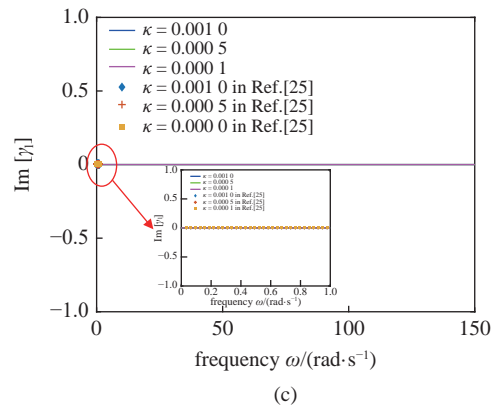
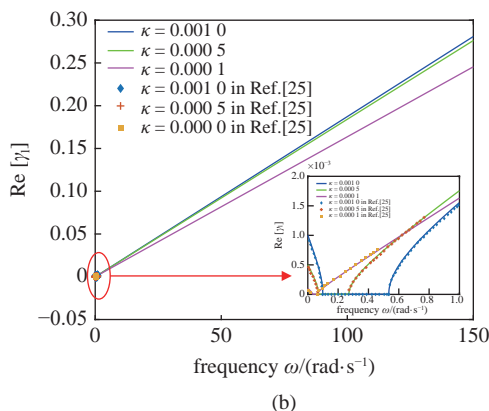
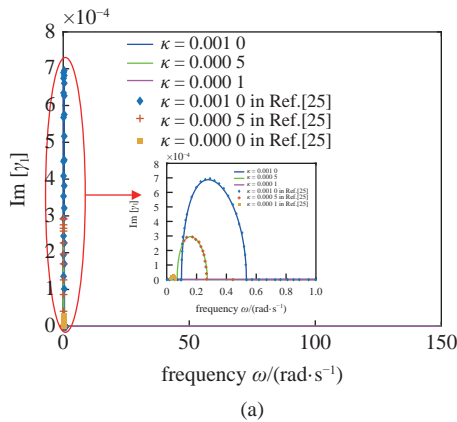


图 2 曲率对于波数的影响 ($c_l = 524.7$ m/s)
Fig. 2 The effect of curvature on wave number ($c_l = 524.7$ m/s)

2.2.2 色散关系

传播波可以分为色散波和非色散波, 对于色散系统来说, 相速度和频率相关, 因而不同频率下的波以不同的相速度传播, 此时不同相速度的波在传播过程中会发生分离. 在研究面外波的时候, 已经发现阻尼的存在使得面外波发生色散, 对于面内波, 在曲率和阻尼的双重作用下, 系统的色散现象更加明显.

(1) 相速度

令相速度为 $c = \omega/\gamma$, 则特征频率方程 (18) 可以转化为色散方程

$$D(c; \omega, c_l, c_t) = \beta_3 c^4 - \beta_2 \omega^2 c^2 + \beta_1 \omega^4 \quad (19)$$

式中

$$\beta_1 = a_1 a_4$$

$$\beta_2 = (a_1 + a_4)\omega^2 + i \left(\frac{\mu_2}{\rho A} a_1 + \frac{\mu_1}{\rho A} a_4 \right) \omega + 2a_1 a_3$$

$$\beta_3 = \omega^4 + i \left(\frac{\mu_1}{\rho A} + \frac{\mu_2}{\rho A} \right) \omega^3 - \left(a_3 + a_5 + \frac{\mu_1}{\rho A} \cdot \frac{\mu_2}{\rho A} \right) \omega^2 - i \left(\frac{\mu_1}{\rho A} a_5 + \frac{\mu_2}{\rho A} a_3 \right) \omega + a_3 a_5$$

可以求出 4 个相速度, 分别为 $c_{1,2} = \pm c'_t, c_{3,4} = \pm c'_l,$

其中

$$c'_l = \omega \left[\left(\beta_2 - \sqrt{\beta_2^2 - 4\beta_1\beta_3} \right) / (2\beta_3) \right]^{1/2} \quad (20)$$

$$c'_r = \omega \left[\left(\beta_2 + \sqrt{\beta_2^2 - 4\beta_1\beta_3} \right) / (2\beta_3) \right]^{1/2} \quad (21)$$

通常为复数, 可以看到 c'_l 和 c'_r 均与频率相关, 因而面内波为色散波. 值得注意的是, 当 $\beta_3 = 0$ 时, 相速度是奇异的, 此时相速度应采用奇异摄动法求解.

(2) 群速度

对式 (18) 进行隐函数求导可以得到群速

$$c_g = \frac{d\omega}{d\gamma} = \frac{2(\beta_1\gamma^2 - \beta_2)\gamma}{4\omega^3 + 6\beta'_3\omega^2 - 2\beta'_5\omega - \beta'_4} \quad (22)$$

式中

$$\beta'_5 = (a_1 + a_4)\gamma^2 - 2\left(a_3 + a_5 + \frac{\mu_1}{\rho A} \frac{\mu_2}{\rho A}\right)$$

从方程 (18) 可以得到 γ 的 4 个根, 从而导出 4 个群速 $c_{gl,2} = \pm c_{gl}, c_{gl,3,4} = \pm c_{gl}$, 其中

$$c_{gl} = \frac{2(\beta_1\gamma_l^2 - \beta_2)\gamma_l}{4\omega^3 + 6\beta'_{3l}\omega^2 - 2\beta'_{5l}\omega - \beta'_{4l}} \quad (23)$$

$$c_{gl} = \frac{2(\beta_1\gamma_r^2 - \beta_2)\gamma_r}{4\omega^3 + 6\beta'_{3r}\omega^2 - 2\beta'_{5r}\omega - \beta'_{4r}} \quad (24)$$

式中 $\beta'_{3l}, \beta'_{4l}, \beta'_{5l}, \beta'_{3r}, \beta'_{4r}$ 和 β'_{5r} 为将 γ 替换为 γ_l 和 γ_r 对应的系数.

3 缆索自由振动响应解

3.1 面外响应

现在考虑一个无限长缆索在初始扰动下的面外响应, 初始状态为 $u_3(s, 0)$ 和 $u_{3,t}(s, 0)$. 两个面外波的解 ω_{out1} 和 ω_{out2} 会产生两个传播波, 他们叠加后形成如下响应

$$\tilde{u}_3(\gamma, t) = \sum_{i=1}^2 C_j(\gamma) e^{-i\omega_{out_i} t} \quad (25)$$

通过傅里叶逆变换得到位移的通解

$$u_3(s, t) = \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} C_j(\gamma) e^{i(\gamma s - \omega_{out_i} t)} d\gamma \quad (26)$$

令 $\tilde{u}_{30} = [\tilde{u}_{30}, \tilde{u}_{30,t}]^T$ 表示傅里叶变换后的初始条件, 利用式 (25), 并令时间 t 为零得到

$$\Omega_{out} C = \tilde{u}_{30} \quad (27)$$

式中

$$\Omega_{out} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i\omega_{out1} & -i\omega_{out2} \end{bmatrix}, C = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} \quad (28)$$

联立得到

$$C = \Omega_{out}^{-1} \tilde{u}_{30} = \frac{1}{\omega_{out1} - \omega_{out2}} \begin{bmatrix} -\omega_{out2} \tilde{u}_{30} + i \tilde{u}_{30,t} \\ \omega_{out1} \tilde{u}_{30} - i \tilde{u}_{30,t} \end{bmatrix} \quad (29)$$

现在通过计算缆索对一个初始条件的响应来探索面外响应的波传播规律. 考虑施加在副法向 $-\lambda_0/2 < s < \lambda_0/2$ 区域内 ($\lambda_0 = 20 \text{ m}$) 的余弦型初始位移

$$u_{30}(s) = \begin{cases} 0, & s < -\lambda_0/2 \\ A_c/2 + (A_c/2) \cos(2\pi s/\lambda_0), & |s| < \lambda_0/2 \\ 0, & s > \lambda_0/2 \end{cases} \quad (30)$$

式中 A_c 为余弦脉冲响应函数的幅度, 在论文中取为 10 mm , 响应的傅里叶变换形式为

$$\tilde{u}_{30} = \frac{1}{2} \Gamma(\gamma) + \frac{1}{4} [\Gamma(\gamma + 2\pi/\lambda_0) + \Gamma(\gamma - 2\pi/\lambda_0)] \quad (31)$$

式中

$$\Gamma(\gamma) = (A_c/\pi)(\lambda_0/2) \{ \sin[(\lambda_0/2)\gamma] / [\gamma(\lambda_0/2)] \} \quad (32)$$

另外的初始条件为 $\tilde{u}_{30,t} = 0$, 根据式 (29) 可以很容易地解得在初始面外余弦脉冲响应下的解. 需要注意的是, 由于阻尼系数 μ 较难获得, 工程中一般用结构阻尼 ξ 来表示结构振动的衰减, 二者的关系如下

$$\frac{\mu}{\rho A} = 2\xi\omega_n \quad (33)$$

细长的缆索自身的结构阻尼非常小, 实测数据显示, 斜拉索的结构阻尼在 $0.001 \sim 0.005$ 之间^[17]. $\omega_n = 2\pi f_n$ 表示缆索的 n 阶固有圆频率, 这一频率受到缆索长度和直径的影响^[16,32-33], 对于缆索结构来说, 当其发生高阶共振时, 引起的缆索模态高达几十阶, 对应的固有频率通常大于 10 Hz ^[16-17]. 在本文中, 我们假设缆索发生高阶共振时的模态频率 f_n 为 20 Hz , 并将阻尼比取为 0.005 . 论文所研究的是线弹性范围内的钢质缆索, 材料参数与文献 [24] 一致, 弹性模量 E 取为 200 GPa , 密度为 7860 kg/m^3 , 缆索截面面积为 314.2 mm^2 , 初始水平张力取为 30.3 kN , 缆索曲率取为 0.0005 , 弦的横波波速 c_t 取为 140 m/s , 杆的纵波波速 c_l 取为 5044 m/s .

3.1.1 面外响应的结果与讨论

不考虑阻尼时, 面外响应的波动解可以用达朗贝尔公式表示为

$$u_3(s, t) = \frac{1}{2} [u_{30}(s - \sqrt{a_4}t) + u_{30}(s + \sqrt{a_4}t)] \quad (34)$$

我们将有阻尼和无阻尼的响应分别求解并加以比较, 得到图 3 ~ 图 5 时程曲线、波形图和响应云

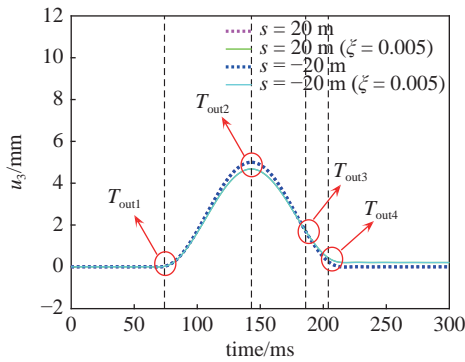
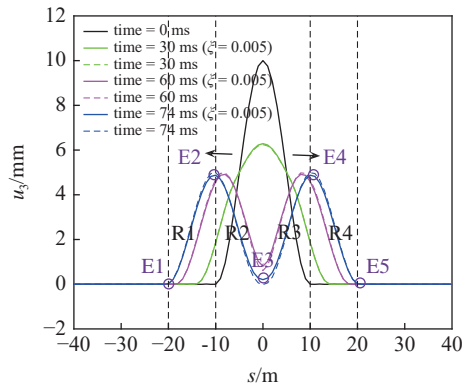
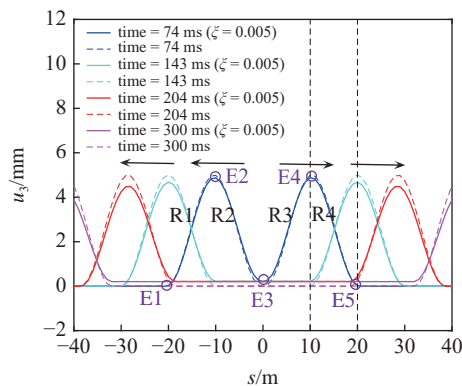


图 3 $s = \pm 20$ m 处的面外响应时程曲线

Fig. 3 Out-of-plane response time history curve in $s = \pm 20$ m



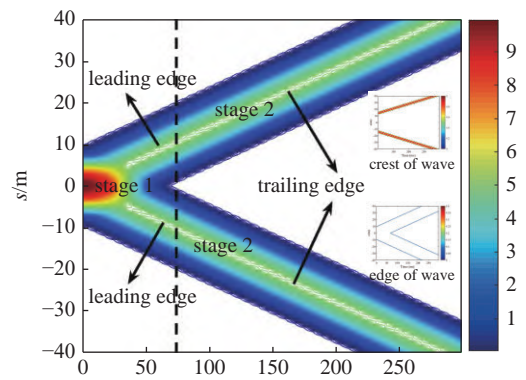
(a) 第 1 阶段
(a) The first stage



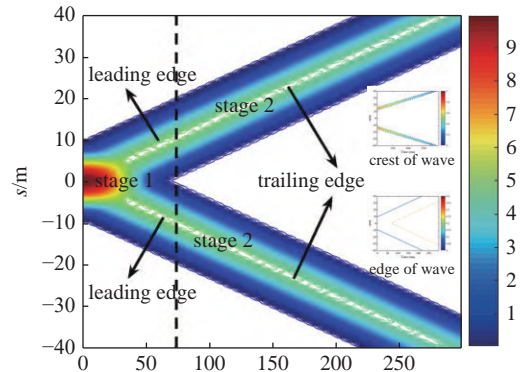
(b) 第 2 阶段
(b) The second stage

图 4 面外响应不同阶段的波形图

Fig. 4 Waveforms of different stages of the out-of-plane response



(a) 无阻尼
(a) Without damping



(b) 有阻尼
(b) With damping

图 5 面外响应云图 (单位: mm)

Fig. 5 The contour plot of out-of-plane response (unit: mm)

图. 加以比较. 图 3 为 $s = \pm 20$ m 的面外响应时程曲线, 可以看到, 有 4 个代表性的时间点 $T_{out1} = 74$ ms, $T_{out2} = 143$ ms, $T_{out3} = 186$ ms 和 $T_{out4} = 204$ ms, 为了研究波的传播规律, 我们在 4 个时刻前后又选取了 4 个时刻进行观察, 分别为 $T_{out5} = 30$ ms, $T_{out6} = 60$ ms, $T_{out7} = 150$ ms 和 $T_{out8} = 300$ ms, 各个时刻的对应波形图如图 3 所示. 由图 3 可以看到, 考虑阻尼后, $s = \pm 20$ m 处的面外响应的峰值由 5 mm 衰减到了 4.679 mm, 可见, 考虑阻尼后能量发生了耗散. 除了峰值的改变, 考虑阻尼后的响应数值总体也发生了改变, 在 $T < T_{out3}$ 时, 考虑阻尼后的响应小于无阻尼的响应, 而当 $T > T_{out3}$ 后则相反.

若只观察 $s = 20$ m 处, 可以看到, T_{out1} 时刻, 面外波的前缘 R4 的端点 E5 到达 $s = 20$ m 处, 因而图 3 中的时程曲线从这一时刻开始增大, 此时波的后缘仍然在 $s = 0$ m 处; 到了 T_{out2} 时刻, 波峰 E4 传播到了 $s = 20$ m 处, 因而响应在这一时刻达到最大值, 而

后开始减小; T_{out4} 时刻, 波的后缘 R3 的端点 E3 到达 $s = 20 \text{ m}$ 处, 从这一时刻开始, 面外波离开了 $s = 20 \text{ m}$ 处, 因而对于无阻尼的面外响应在这一时刻衰减到最小值, 对于有阻尼的面外响应, 响应值在 T_{out4} 时刻衰减为后缘 E3 的响应值, 然后在阻尼的作用下继续小幅衰减, 而此时波的前缘端点 E5 则传播到了 $s = 40 \text{ m}$ 处, 因而波的前缘和后缘波速均为 153.8 m/s . 对于 $s = -20 \text{ m}$ 处的响应值变化规律, 对应于沿着原点负向传播的波, 该波与沿着原点正向传播的波是对称的, 因而波的传播规律是相同的.

如图 4 所示, 面外波的传播可以分为两个阶段, 第 1 个阶段 ($T < T_{out3}$), 初始的余弦型横波逐渐分散为两个单波; 当波完全分散成两个对称的单波后, 此时到达第 2 个阶段 ($T < T_{out3}$), 单波沿着缆索不断向外传播, 对于无阻尼的单波, 在这一阶段, 波在传播过程波形不发生改变; 而对于考虑阻尼的单波, 单波本身不再是对称的波, 其前缘端点的响应要低于后缘端点的响应, 以 T_{out3} 时刻沿着原点正向传播的波形为例, 其前缘端点 E5 响应值为 0.002 mm , 接近于零, 而其前缘端点 E3 响应值则为 0.204 mm . 由图 4 还可以看出, 与无阻尼时相比, 考虑阻尼后, 波形的波峰 E2 和 E4 是随着时间不断减小的, 该峰值在无阻尼时为 5 mm , 而考虑阻尼后该值在 204 ms 时衰减为 4.482 mm , 衰减了 10.4% , 且这一比率随着时间不断增大.

通过位移等值线云图, 可以看到响应沿着时空的传播规律, 如图 5, 图中有颜色的区域为波所在的区域, 白色的区域表示在该时空范围内波尚未传播到或是已经离开. 从云图上看, 有阻尼和无阻尼的面外响应传播规律基本相同, 图中的彩色区域为波传播区域, 可以将彩色区域分为两个阶段, 第 1 阶段, 即为云图中虚线左侧部分, 只有波的前缘向两端传播, 波的后缘并未完全分离成两个独立的单波, 因此波的后缘在云图中表现为颜色逐渐变浅的半圆形; 第 2 阶段, 即为云图中虚线右侧部分, 波的前缘和后缘以同样的波速 (云图中色条的斜率) 向外传播.

从之前的分析中, 我们已经看出对于面外响应, 有阻尼和无阻尼的区别主要在于波峰以及波的后缘值, 因此, 我们将云图显示的响应数值范围加以限制, 得到图 5(a) 和图 5(b) 中右上角和右下角的面外波波峰与波的边缘云图, 可以看到无阻尼面外波前缘和后缘的响应值是相同的, 而考虑阻尼后, 波后缘的

响应值要大于波前缘的响应值. 而通过对比右上角的波峰云图, 可以看到无阻尼面外波的波峰, 在云图中始终为深红色, 不随时间改变, 而考虑阻尼后, 面外波的波峰由深红色逐渐向深蓝色过渡, 可见, 考虑阻尼后, 面外波的波峰是随着时间不断衰减的.

3.2 面内响应

对于面内响应, 我们采用与面外响应相同的方法进行求解, 考虑一个无限长缆索在初始扰动下的面内响应, 初始状态为 $u_i(s, 0)$ 和 $u_{i,t}(s, 0), i = 1, 2, 4$ 个波的解 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 和 ω_4 会产生 4 个传播波, 它们叠加后形成如下响应

$$\tilde{u}_1(\gamma, t) = \sum_{j=1}^4 A_j(\gamma) e^{-i\omega_j t} \quad (35)$$

$$\tilde{u}_2(\gamma, t) = \sum_{j=1}^4 B_j(\gamma) e^{-i\omega_j t} \quad (36)$$

通过傅里叶变换得到通解

$$u_1(s, t) = \sum_{j=1}^4 \int_{-\infty}^{\infty} A_j(\gamma) e^{i(\gamma s - \omega_j t)} d\gamma \quad (37)$$

$$u_2(s, t) = \sum_{j=1}^4 \int_{-\infty}^{\infty} r_j(\gamma) A_j(\gamma) e^{i(\gamma s - \omega_j t)} d\gamma \quad (38)$$

通过 4 个代数方程 (17) 和 4 个初始条件可以确定 8 个未知数 (A_j, r_j). 由方程 (17) 可以得到

$$B_j = r_j A_j, j = 1, 4 \quad (39)$$

$$r_j(\gamma) = \left(-a_1 \gamma^2 - a_3 + \omega_j^2 + i\omega_j \frac{\mu_2}{\rho A} \right) / (ia_2 \gamma) = -ia_2 \gamma / \left(-a_4 \gamma^2 - a_5 + \omega_j^2 + i\omega_j \frac{\mu_2}{\rho A} \right), j = 1, 4 \quad (40)$$

可以注意到 $r_1 = r_2, r_3 = r_4$.

令 $\tilde{\mathbf{u}}_0 = [\tilde{u}_{10}, \tilde{u}_{20}, \tilde{u}_{10,t}, \tilde{u}_{20,t}]^T$ 表示傅里叶变换后的初始条件, 利用方程 (35) 和式 (36) 可以得到

$$\mathbf{\Omega} \mathbf{A} = \tilde{\mathbf{u}}_0 \quad (41)$$

这里

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ -i\omega_1 & -i\omega_2 & -i\omega_3 & -i\omega_4 \\ -i\omega_1 r_1 & -i\omega_2 r_2 & -i\omega_3 r_3 & -i\omega_4 r_4 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} \quad (42)$$

联立得到 $A = \Omega^{-1}\ddot{u}_0$.

为了考察面内响应的波传播现象, 在法向施加余弦型的初始位移, 该位移与研究面外波时所施加的位移具有相同的形式, 剩下的初始条件为: $u_{10} = u_{10,t} = u_{20,t} = 0$.

3.2.1 面内响应的结果与讨论

在本研究中, 为了考察阻尼对于波传播的影响, 我们将考虑阻尼后的响应与无阻尼的响应进行比较分析, 得到图 6 ~ 图 11 的时程曲线、波形图及响应云图. 如图 6 为 $s = \pm 20\text{ m}$ 的时程曲线, 可以看到, 时程曲线有 4 个代表性的时间点 $T_1 = 2\text{ ms}$, $T_2 = 6\text{ ms}$, $T_3 = 74\text{ ms}$ 和 $T_4 = 204\text{ ms}$, 这几个时间点考虑阻尼后基本相同, 但响应的数值在考虑阻尼后发生了改变, 在 $T_{11} = 99\text{ ms}$ 时刻前, 考虑阻尼后的纵向响应低于无阻尼的纵向响应, 而 T_{11} 时刻后则相反; 在 $T_{12} = 186\text{ ms}$ 时刻前, 考虑阻尼后的横向响应低于无阻尼的横向响应, 而 T_{12} 时刻后则相反. 为了研究波的传播规律以及阻尼的影响, 我们在 4 个代表性时间点前后选取了 5 个时刻进行观察, 分别为 $T_5 = 4\text{ ms}$,

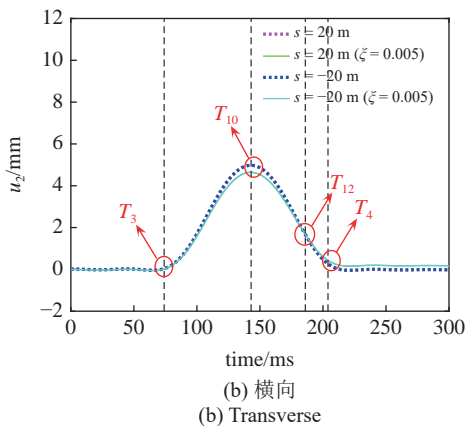
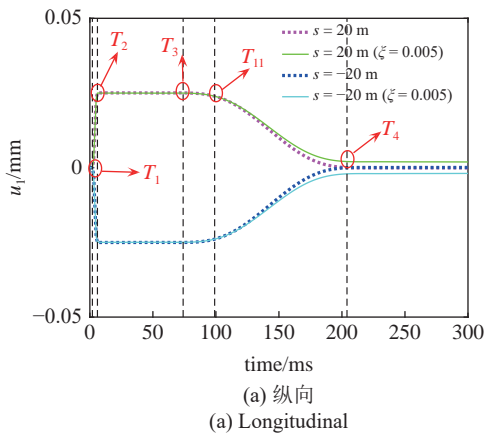


图 6 $s = \pm 20\text{ m}$ 处的时程曲线
Fig. 6 In-plane response time history curve in $s = \pm 20\text{ m}$

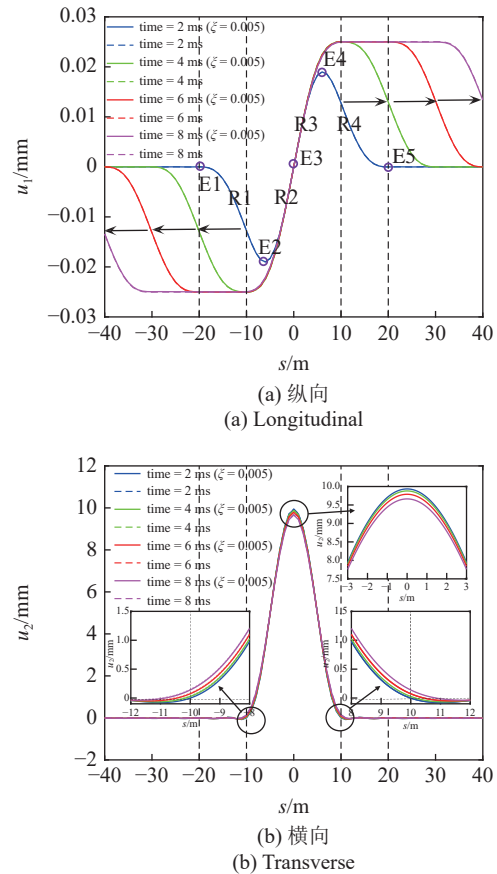


图 7 2 ms, 4 ms, 6 ms 和 8 ms 时刻的波形图
Fig. 7 The waveform in 2 ms, 4 ms, 6 ms, 8 ms

$T_6 = 8\text{ ms}$, $T_7 = 60\text{ ms}$, $T_8 = 150\text{ ms}$, $T_9 = 300\text{ ms}$ 和 $T_{10} = 143\text{ ms}$, 各个时刻的对应波形图如图 7 ~ 图 9 所示.

由图 7 可以看出, 在 T_1 和 T_2 时刻, 无论是面内横波还是纵波, 有阻尼和无阻尼的波形图基本重合在了一起, 可见在 T_1 和 T_2 时刻考虑阻尼前后的波传播规律是相同的, 即此时图 7(b) 中的面内横波在空间只传播了很短的距离, 而图 7(a) 中的纵波则快速向前传播. 从 T_1 时刻的纵波波形图, 也就是图 7(a) 中的蓝线可以看到, 纵波的前缘在该时刻从原点沿着正负两个方向传播到了 $s = \pm 20\text{ m}$, 当 $T > T_1$ 时, 纵波的前缘继续向前传播, 对应于图 7(a) 的绿线、红线和粉线, 此时图 6(a) 中的纵向时程曲线也从 T_1 时刻开始从零迅速增大, 到了 T_2 时刻, 纵波波峰到达 $s = \pm 20\text{ m}$ 处, 与此同时该处的纵向响应达到最大值.

面内纵波在传播过程中, 其前缘波速大于后缘波速, 以从原点沿着正向传播的波为例, T_1 时刻, 纵波前缘端点 E5 到达 $s = 20\text{ m}$ 处, 当 $T = 4\text{ ms}$ 时, 这一端点传播到了 $s = 30\text{ m}$ 处, 因而前缘端点 E5 的波

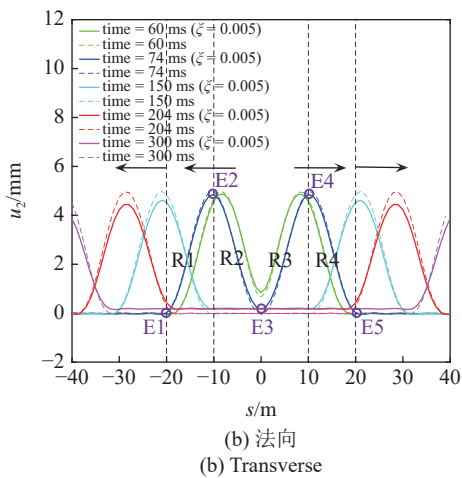
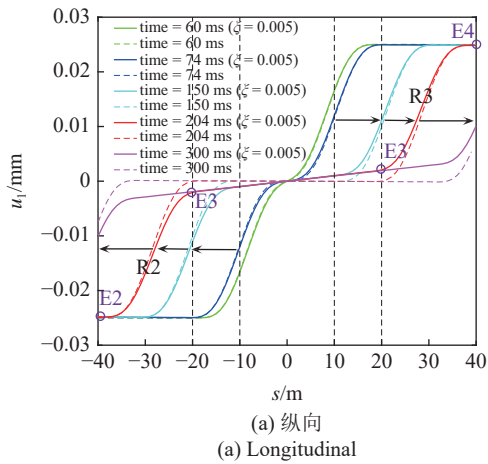


图 8 60 ms, 74 ms, 150 ms, 204 ms 和 300 ms 时刻的波形图
Fig. 8 The waveform in 60 ms, 74 ms, 150 ms, 204 ms, 300 ms

速为 5000 m/s, 与杆的纵波波速 $c_l = 5044$ m/s 接近; $T = 4$ ms 时, R3 的波峰 E4 到达横波的边缘 $s = 10.62$ m 处, E4 达到最大值, 此后纵波后缘以横波的速度进行传播, 因而前缘和后缘分界点 E4 在前缘和后缘上分别以不同的速度传播, 从而开始分离, 出现平台, 且随着时间的增大, 这一平台的距离越来越大. 因而可以看出, T_1 到 T_2 时刻, 纵波的色散引起了波形图在不同时刻的差异, 纵波的色散体现于两方面, 一是波的前缘和后缘以差距较大的波速传播, 二是波的后缘以不同的波速进行传播, 这一点可以从波的后缘波形不断改变看出, 而波的前缘在这一时间段内波形是平行的, 并不发生色散. T_2 时刻, R4 的端点 E4 到达了 $s = 20$ m 处, 此时 R3 和 R4 已经分离, 因而 R4 尽管继续往前传播, 由于 R2/R3 还未传播到 $s = \pm 20$ m 处, 此时 $s = \pm 20$ m 处的纵向位移值保持不变, 对应于图 6 时程曲线的 $T_2 \sim T_3$ 阶段. 可以看到, $T_1 \sim T_3$ 时刻, 无论是纵波还是横波, 有阻尼和

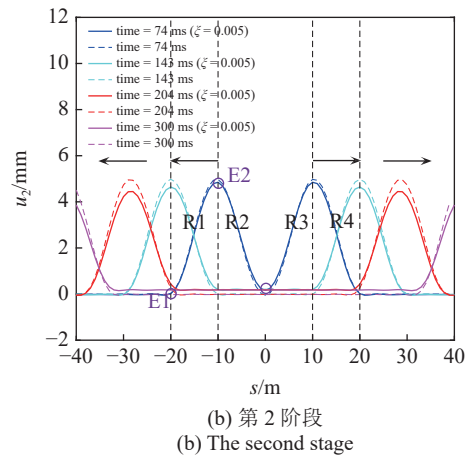
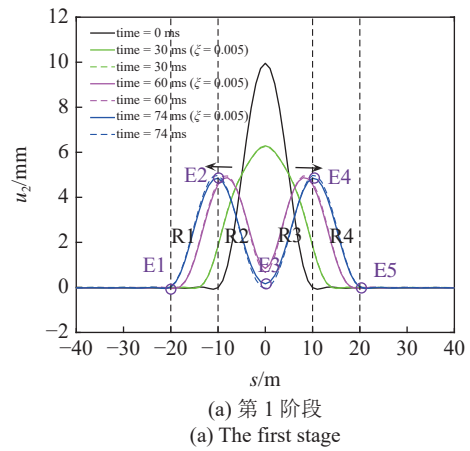


图 9 横波不同阶段的波形图

Fig. 9 The waveform of transverse in different stage

无阻尼的波形图基本是重合的, 说明在这一时间段内, 阻尼对于波传播的影响比较小.

从图 8(a) 可以看到, 从 $T_3 \sim T_4$ 时刻, 对于面内纵波来说, 考虑阻尼后与无阻尼时相同的是, T_3 时刻, 纵波的后缘 R3 的端点 E4 传播到了 $s = 20$ m 处, 此时 $s = 20$ m 处的纵向位移时程曲线开始衰减; 到了 T_4 时刻, 属于纵波后缘 R3 端点 E3 传播到了 $s = 20$ m 处, 纵向波的后缘离开了 $s = 20$ m 处. 此外, T_3 到 T_4 时刻, 图 8(a) 中纵波的后缘 R3 的波形图基本是平行的, 这说明纵波的后缘基本以同一速度传播, 波的色散现象比较弱. T_4 时刻后, 纵波的前缘和后缘的波形不再发生改变, 但前缘和后缘仍以不同的波速传播, 因而平台距离仍在不断增大, 波的色散现象依然存在. 不同的是, 对于无阻尼的纵波来说, 纵波后缘端点 E3 在分离后为一平行于横轴的线段, 因此当纵波后缘离开 $s = 20$ m 处后, 该处的响应值衰减为最小值, 且不再发生改变, 这对应于图 6(a) 中 $s = 20$ m 处的无阻尼纵向时程曲线, 即为图中的

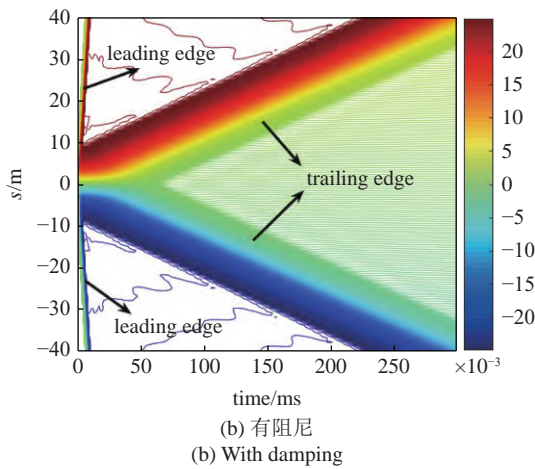
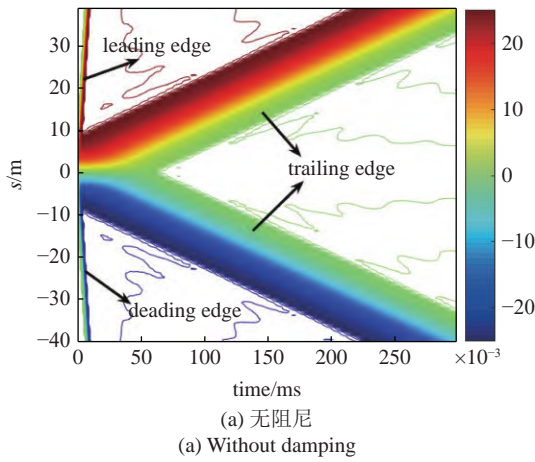


图 10 面内纵向响应云图 (单位: mm)

Fig. 10 The contour plot of in-plane response (unit: mm)

粉色点线; 而考虑阻尼后, 纵波后缘端点 E3 之间不再是平直的线段, 而是与 T_3 时刻纵波后缘相切的一条斜线, 也就是说, 当纵波后缘离开 $s = 20\text{ m}$ 后, 该处的响应仍然会存在, 且随着时间不断衰减, 但衰减幅度较 T_3 到 T_4 时刻小, 这也对应于 T_4 时刻后, 图 6(a) 中 $s = 20\text{ m}$ 处的纵向时程曲线, 即为图中的绿色实线从 0.0021 mm 随时间小幅度衰减. 对从原点沿着负向传播的纵波, 和沿着正向传播的纵波, 呈现反对称, 但波的传播规律是相同的.

从图 8(b) 中的横波波形图可以看到, T_3 到 T_4 时刻, 横波已经传播了一段距离, 可以看到, T_3 时刻, 横波的前缘传播到了 $s = \pm 20\text{ m}$ 处, 其后缘在 $s = 0$ 处, 而 T_4 时刻, 横波的前缘传播到了 $s = 40\text{ m}$ 处, 而波的后缘传播到了 $s = 20\text{ m}$ 处, 对应的波速为 153.8 m/s , 高于弦的横波波速 $c_t = 140\text{ m/s}$. 对比有阻尼与无阻尼的波形, 可以发现无阻尼时的单波本身是关于波峰所在的位置左右对称的, 而考虑阻尼后的单波本身不再是对称的波, 波的前缘端点的响应

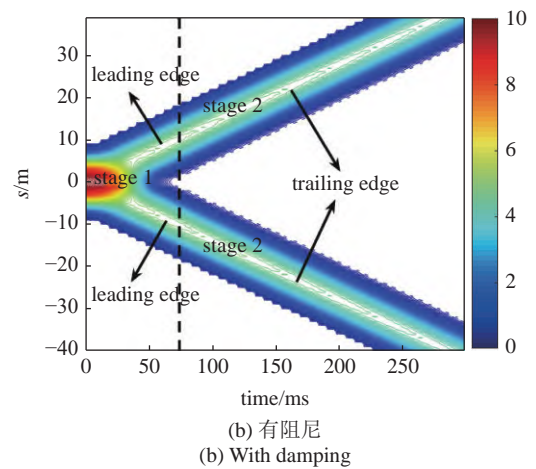
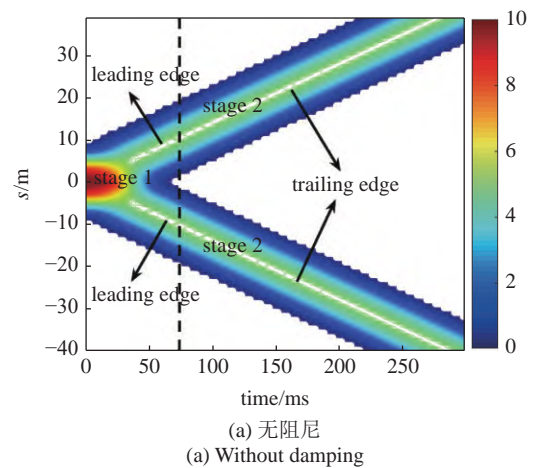


图 11 面内横向响应云图 (单位: mm)

Fig. 11 The contour plot of in-plane response (unit: mm)

值为零, 但其后缘端点的响应值大于零, 因而当横波的后缘离开 $s = \pm 20\text{ m}$ 处时, 图 6(b) 有阻尼的时程曲线 (淡蓝色实线) 中横向响应不为零.

除了影响到后缘响应, 阻尼还会引起使得单波的波峰在传播过程不断衰减, 无阻尼时单波波峰为 5 mm , 而该峰值在考虑阻尼后在 204 ms 时衰减为 4.445 mm , 衰减了 11.1% , 且这一比率将随着时间不断增大. 在波离开后仍然有响应和峰值的衰减, 这也意味着阻尼引起了波在传播过程中能量的耗散.

面内横波的传播可以大致分为两个阶段, 第 1 个阶段如图 9 (a) 所示, 波形由一个波分散为两个单波, 由于波不断向外传播, 因此波的振幅不断衰减, 当初始的余弦型横波分成两个对称的单波后, 到达第 2 阶段. 第 2 阶段, 对比有阻尼与无阻尼的波形图可以发现, 考虑阻尼后, 单波本身不再对称, 而且第 2 阶段的单波的振幅在阻尼的作用下不断衰减. 第 2 阶段, 波的前缘和后缘几乎以同样的波速传播. 如

图 9(b), 若只观察 $s = \pm 20$ m 处, 同样以从原点沿着正向传播的横波为例, 可以发现, T_3 时刻前, 横波均未传播到 $s = 20$ m 处, 因而 $s = 20$ m 处横波的时程曲线图 6(b) 始终为零; 到了 T_3 时刻, 横波的前缘 R4 端点 E5 传播到了 $s = 20$ m 处, 因而 $s = 20$ m 处横波的时程曲线图 6(b) 从 T_3 时刻开始增大; T_{10} 时刻, 波峰 E4 到达 $s = 20$ m 处, 因而此时 $s = 20$ m 处横波的时程曲线图 6(b) 达到最大值, 随后开始衰减; T_4 时刻, 横波的后缘 R3 端点 E3 到达 $s = 20$ m 处, 对于无阻尼的横波, 时程曲线在 T_4 时刻衰减为最小值, 且之后保持为定值, 如图 6(b) 中的蓝色点线, 而对于有阻尼的面内横波, 由于后缘处响应值不为零, 该处对应的时程曲线图 6(b) 中的淡蓝色实线不为零且随着时间不断衰减. 从原点沿着负向传播的波, 与沿着正向传播的波是对称的, 而波的传播规律是相同的.

面内纵波的位移云图如图 10 所示. 图 10(a) 和图 10(b) 分别为考虑阻尼前后的面内纵向响应云图, 可以看到, 考虑阻尼后的纵波与无阻尼时相比, 相同的是, 纵波在传播时包括一个快速传播的前缘和缓慢传播的后缘, 且在前缘和后缘之间的波速是不确定的, 不同的是, 在后缘之后的波, 无阻尼的纵波波速是不确定的, 而考虑阻尼后的纵波波速接近于零.

面内横向响应云图如图 11 所示, 对于面内横向响应, 有阻尼和无阻尼时, 波的传播规律与面外波是相似的, 波在传播过程中基本不发生色散, 在云图中施加位移响应的区域附近, 可以看到黄色到深红色的半圆形, 这对应于横向响应传播第一阶段, 此时的横波尚未完全分离成两个单波, 即为图 11 中虚线左侧部分; 而在远端施加位移响应的区域, 分散后的单波不断向远方传播, 传播过程中前缘和后缘波速相同, 即为图 11(a) 中虚线右侧部分. 从图 11(a) 和图 11(b) 中右上角的横波波峰图可以看到, 考虑阻尼后的面内波, 无阻尼时面内横波的波峰在云图中始终为深红色, 即波峰是不随时间而减小的, 而考虑阻尼后, 面内横波的波峰在云图中波峰的颜色不断变浅, 即波峰将随着时间衰减; 此外, 从图 11 右下角的横波边缘云图可以看出, 无阻尼时, 无阻尼时波前后缘的颜色是相同的, 这说明无阻尼时面内横波的前缘端点与后缘端点的响应是相同的, 分散后的单波是关于波峰左右对称的, 而考虑阻尼后, 波的后缘的颜色为深红色, 前缘为深蓝色, 可见考虑阻尼后, 波的后

缘响应值要大于波的前缘响应值, 这一规律与面外波是相同的.

4 结论

本研究发展了三维弹性缆索运动方程, 在方程中引入了阻尼项, 通过求解运动方程, 分析了面内面外波的自由传播特性, 进而针对初始余弦脉冲作用下的缆索响应考察扰动沿着缆索的传播规律, 分析了波的色散现象以及阻尼对于缆索弹性波传播的影响. 主要工作总结如下.

(1) 根据哈密顿原理推导了含缆索曲率的三维有阻尼弹性缆索运动方程, 并在小垂度范围内将其线性化后求解, 考察了波的频率关系、相速度、群速度等自由传播特性. 结果表明, 无阻尼时面外波为非色散波, 而考虑阻尼后, 面外波发生了色散; 而面内波除了受到阻尼的影响, 还会受到曲率的作用, 为高度色散波. 在此基础上, 求解了初始余弦脉冲作用下的缆索响应, 根据求解得到的时程曲线、波形图及位移云图的结果, 面内与面外横波的波形是关于原点对称的, 而面内纵波的波形则是关于原点对称的.

(2) 通过对比有阻尼和无阻尼的波传播现象, 可以发现阻尼对波的传播产生了显著影响: 对于面内面外横波来说, 其波峰值在考虑阻尼后随着时间不断衰减, 在 204 ms 时, 面外横波波峰衰减了 10.4%, 而面内横波衰减了 11.1%. 此外, 无阻尼时, 横波前缘和后缘端点响应相同, 而考虑阻尼后, 横波后缘端点响应要高于前缘端点响应. 对于面内纵波来说, 无阻尼时, 纵波后缘端点响为零, 而考虑阻尼后, 后缘端点响应不为零, 且该响应值随着传播距离的增大而增大, 显著区别于无阻尼.

参 考 文 献

- 1 Wu Q, Takahashi K, Nakamura S. Non-linear vibrations of cables considering loosening. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 261(3): 385-402
- 2 Koh CG, Rong Y. Dynamic analysis of large displacement cable motion with experimental verification. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 272(1-2): 187-206
- 3 Srinil N, Rega G, Chucheepsakul S. Three-dimensional non-linear coupling and dynamic tension in the large-amplitude free vibrations of arbitrarily sagged cables. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 269(3-5): 823-852
- 4 Karoumi R. Some modeling aspects in the nonlinear finite element analysis of cable supported bridges. *Computers & Structures*, 1999,

- 71(4): 397-412
- 5 Ni YQ, Ko JM, Zheng G. Dynamic analysis of large-diameter sagged cables taking into account flexural rigidity. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 257(2): 301-319
 - 6 Irvine HM, Caughey TK. The linear theory of free vibrations of a suspended cable. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 1974, 341(1626): 299-315
 - 7 Rega G, Vestroni F, Benedettini F. Parametric analysis of large amplitude free vibrations of a suspended cable. *International Journal of Solids and Structures*, 1984, 20(2): 95-105
 - 8 刘洪德, 张素侠. 基于应变修正的二维缆索动力学建模改进. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2022, 52(12): 86-95 (Liu Hongde, Zhang Suxia. Improvement of two-dimensional dynamic modeling of cable based on strain modification. *Scientia Sinica: Physica, Mechanica & Astronomica*, 2022, 52(12): 86-95 (in Chinese))
 - 9 Chen L, Basu B, Nielsen SRK. A coupled finite difference mooring dynamics model for floating offshore wind turbine analysis. *Ocean Engineering*, 2018, 162: 304-315
 - 10 Irvine HM. *Cable Structures*. Cambridge: The MIT Press, 1981
 - 11 Rega G. Nonlinear vibrations of suspended cables—Part I: Modeling and analysis. *Appl. Mech. Rev.*, 2004, 57(6): 443-478
 - 12 Rega G. Nonlinear vibrations of suspended cables—Part II: deterministic phenomena. *Appl. Mech. Rev.*, 2004, 57(6): 479-514
 - 13 Ibrahim RA. Nonlinear vibrations of suspended cables—Part III: random excitation and interaction with fluid flow. *Appl. Mech. Rev.*, 2004, 57(6): 515-549
 - 14 Jafari M, Hou F, Abdelkefi A. Wind-induced vibration of structural cables. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 100(1): 351-421
 - 15 Houjun K, Tieding G, Yueyu Z. Review on nonlinear vibration and modeling of large span cable-stayed bridge. *Acta Mechanica Sinica*, 2016, 48(3): 519-535
 - 16 刘志文, 沈静思, 陈政清等. 斜拉索涡激振动气动控制措施试验研究. 振动工程学报, 2021, 34(3): 441-451 (Liu Zhiwen, Shen Jingsi, Chen Zhengqing, et al. Experimental study on aerodynamic control measures for vortex-induced vibration of stay-cable. *Journal of Vibration Engineering*, 2021, 34(3): 441-451 (in Chinese))
 - 17 Di F, Sun L, Chen L. Suppression of vortex-induced high-mode vibrations of a cable-damper system by an additional damper. *Engineering Structures*, 2021, 242: 112495
 - 18 Baxy A, Prasad R, Banerjee A. Elastic waves in layered periodic curved beams. *Journal of Sound and Vibration*, 2021, 512: 116387
 - 19 Banerjee A. Non-dimensional analysis of the elastic beam having periodic linear spring mass resonators. *Meccanica*, 2020, 55(5): 1181-1191
 - 20 Syam BK, Sarkar A. Wave analysis for in-plane vibration of angular and curved frames. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2021, 143(6): 061001
 - 21 Prasad R, Banerjee A. Flexural waves in elastically coupled telescopic metabeams. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2021, 143(6): 061009
 - 22 Perkins NC, Mote Jr CD. Three-dimensional vibration of travelling elastic cables. *Journal of Sound and Vibration*, 1987, 114(2): 325-340
 - 23 Cheng SP, Perkins NC. Free vibration of a sagged cable supporting a discrete mass. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1992, 91(5): 2654-2662
 - 24 Behbahani-Nejad M, Perkins NC. Freely propagating waves in elastic cables. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 196(2): 189-202
 - 25 Behbahani-Nejad M, Perkins NC. Harmonically forced wave propagation in elastic cables with small curvature. *Journal of Vibration & Acoustics*, 1997, 119(3): 390-397
 - 26 吴丞昊, 杨建民, 田新亮等. 深海布放缆不同材料属性下应力波自由传播频率特性影响研究. 海洋工程, 2017, 35(5): 12-22 (Wu Chenghao, Yang Jianming, Tian Xinliang, et al. Study of characteristics of stress waves propagating freely in deep-sea deployment cables with different cable properties. *The Ocean Engineering*, 2017, 35(5): 12-22 (in Chinese))
 - 27 Graff KF. *Wave Motion in Elastic Solids*. Courier Corporation, 2012
 - 28 张俊杰. 基于波传播法的周期复合板振动带隙衰减特性研究. 物理学报, 2014, 63(22): 213-220 (Zhang Junjie. Band gap attenuation characteristics of periodic compound plate with wave propagation approach. *Acta Physica Sinica*, 2014, 63(22): 213-220 (in Chinese))
 - 29 Zhang X, Xu H, Cao M, et al. In-plane free vibrations of small-sag inclined cables considering bending stiffness with applications to cable tension identification. *Journal of Sound and Vibration*, 2023, 544: 117394
 - 30 Tabatabai H, Mehrabi AB, Morgan BJ, et al. Nondestructive bridge evaluation technology: bridge stay cable condition assessment. Report to the Federal Highway Administration. Construction Technology Laboratories, Inc, Skokie, IL, 1997
 - 31 He WY, Meng FC, Ren WX. Cable force estimation of cables with small sag considering inclination angle effect. *Advances in Bridge Engineering*, 2021, 2(1): 1-22
 - 32 Argentini T, Rosa L, Zasso A. Experimental evaluation of Hovenring bridge stay-cable vibration. *WIT Transactions on Modelling and Simulation*, 2013, 55: 427-437
 - 33 Denoël V, Andrianne T. Real-scale observations of vortex induced vibrations of stay-cables in the boundary layer. *Procedia Engineering*, 2017, 199(09): 3109-3114