

面向发动机再生冷却的流热耦合拓扑优化¹⁾李新磊^{*,†} 吴 坤^{*,2)} 赵林英^{**,††} 范学军^{*,†}^{*}(中国科学院力学研究所高温气体动力学国家重点实验室, 北京 100190)[†](中国科学院大学工程科学学院, 北京 100049)^{**}(西北工业大学机电学院, 西安 710072)^{††}(合肥中科重明科技有限公司, 合肥 230601)

摘要 再生冷却作为一种主动热防护形式, 被广泛应用于高超声速飞行器发动机的热防护系统. 为了进一步提高再生冷却结构的换热性能, 发展了考虑变热物理性质和输运性质的流热耦合拓扑优化设计方法. 首先建立了流热耦合拓扑优化模型, 基于连续伴随法对考虑变物性的伴随方程和灵敏度进行了推导, 并利用开源计算平台 OpenFOAM 构建了拓扑优化求解器, 耦合了滤波和投影等技术以缓解可能出现的数值问题, 结合了建表-插值法对冷却剂物性和相关偏导项进行计算. 随后对流热耦合结构进行了拓扑优化设计, 结果表明: 随着能量耗散约束值的增大, 通道的拓扑结构愈加复杂, 冷却通道内的流动分离和再混合现象更加显著. 通过提取 5 种拓扑优化构型 (Case 1 ~ Case 5), 对三维拓扑优化结构的流动换热特性进行了数值模拟分析, 发现冷却剂的流动分离和再混合诱导产生复杂的二次涡结构, 有助于激发湍动能, 增强通道的局部换热性能. 最终 Case 3 ~ Case 5 中的拓扑优化构型相较于传统构型均起到了强化换热效果, 平均努塞尔数增益百分比分别为 12.6%, 16.0% 和 23.4%.

关键词 再生冷却, 变热物性, 拓扑优化, 流热耦合, 伴随法

中图分类号: V236 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-23-276

TOPOLOGY OPTIMIZATION OF COUPLED THERMAL-FLUID PROBLEMS FOR REGENERATIVE COOLING ENGINES¹⁾

Li Xinlei^{*,†} Wu Kun^{*,2)} Zhao Linying^{**,††} Fan Xuejun^{*,†}^{*}(State Key Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)[†](School of Engineering Science, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)^{**}(School of Mechanical Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)^{††}(Hefei Zhongke Chongming Technology Company, Hefei 230601, China)

Abstract As an active cooling technique, the regenerative cooling is widely applied in the thermal protection system of hypersonic vehicle engines. To further improve the heat transfer performance of regenerative cooling engines, the topology optimization of coupled thermal-fluid problem considering variable thermodynamic and transport properties was investigated. First, a coupled thermo-fluid topology optimization model was established, the adjoint equation and sensitivity considering variable thermodynamic and transport properties were derived based on the continuous adjoint method. The solver is built on the open source platform OpenFOAM, the filtering and projection techniques are adopted

2023-06-29 收稿, 2023-09-22 录用, 2023-09-23 网络版发表.

1) 广东省高水平创新研究院资助项目 (2020B0909010003).

2) 通讯作者: 吴坤, 副研究员, 主要研究方向为超声速湍流燃烧、液滴与喷雾动力学. E-mail: wukun@imech.ac.cn

引用格式: 李新磊, 吴坤, 赵林英, 范学军. 面向发动机再生冷却的流热耦合拓扑优化. 力学学报, 2023, 55(11): 2661-2674

Li Xinlei, Wu Kun, Zhao Linying, Fan Xuejun. Topology optimization of coupled thermal-fluid problems for regenerative cooling engines. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2023, 55(11): 2661-2674

for alleviating numerical issues during the optimization process. A look-up table method along with an interpolation module are included to calculate the thermophysical properties and corresponding partial derivatives. Then the topology optimization of the coupled thermal-fluid system was conducted. The results show that as the power dissipation increases, the topology layouts becomes more complex, and the flow separation and remixing of coolant are stimulated. By further extracting five optimized topology layouts of the coupled thermal-fluid structures, i.e. Cases 1 ~ 5, the flow and heat transfer properties of the three-dimensional cooling channel are numerically evaluated. It is found that the complex flow separation and remixing facilitate the formation of vortices and stimulate the turbulence energy and thus improve the local heat transfer performance of the channels. The heat transfer performance of Cases 3 ~ 5 are finally enhanced compared to the conventional layout, and the average Nusselt numbers are increased by 12.6%, 16.0%, and 23.4%, respectively.

Key words regenerative cooling, variable thermophysical properties, topology optimization, coupled thermal-fluid, adjoint method

引言

超燃冲压发动机作为一种高超声速巡航飞行器,受气动加热和燃料的燃烧释热影响因而承受着巨大的热载荷^[1-3].在发动机的燃烧室壁中,通常嵌入矩形直通道构成再生冷却系统,以保证发动机能够长时间稳定运行.然而,随着飞行马赫数的提升,传统的再生冷却结构面临着冷却能力不足、结构超温等问题^[4-6].因此,亟需开展新型热防护方案的设计及优化.

国内外学者对此进行了大量研究,其中最为常见的一类做法是添置粗糙元件.如 Sunden 等^[7]通过在圆管内设置非对称的波浪形翅片,使得管道的换热系数显著提高,壁面温度显著降低. Li 等^[8]对带有截断肋的矩形通道进行了研究,分析了截断肋周围的强化传热机制,并探究了肋高和肋间距等参数对通道流动换热性能的影响规律.杨泽南等^[9]对由 Kagome 型网格阵列填充的通道进行了研究,发现在相同工况下,错排网格填充的通道,不仅减重效果明显,网格后复杂的涡系结构也使得流体努塞尔数明显提高,壁面温度显著下降.此外,部分研究还通过改变再生冷却通道的流动模式来达到增强换热的目的.如 Li 等^[10]基于变分法生成了能够自适应几何和热边界条件的变管径冷却通道,在牺牲部分压降的条件下使得壁面平均温度和温度不均匀度均有所下降. Li 等^[11]对嵌套式冷却通道进行了研究,发现同向平行通道有着更好的传热性能,且内通道的嵌入有助于克服热分层现象. Zhang 等^[12]提出一种双向流动模式,该模式使得壁面温度分布更加均匀,正癸烷的转化率提升以及较大的化学热沉,但壁面最高

温度和压降均有不同程度的增加.

除了以上研究,近年来以拓扑优化为代表的新兴优化方法,逐渐成为散热系统设计的新途径^[13-16].该方法是以微结构的材料性质作为设计变量,在固定的设计空间内自动寻找最优的材料分布方案^[17],因此在理论上拥有最高的设计自由度,被认为是最具前途的优化方法之一^[18]. Tang 等^[14]曾对考虑材料变物性的导热热沉结构进行拓扑优化,得到了如同树枝枝干般的热沉结构,同时发现固体材料的变物性显著改变了拓扑优化构型,进而影响了其在真实热环境中的性能表现. Zhang 等^[19]基于伪密度法对冲压发动机的再生冷却结构进行了拓扑优化,发现其设计域内生成了众多垂直于主流方向的微通道,显著改善了整体换热,但通道内局部的逆流和滞留区导致出现了局部高温.本文认为,针对发动机再生冷却通道的拓扑优化是结合了湍流流动、燃料物性剧烈变化等特征的复杂流热耦合问题^[19],其计算量大且极易出现网格依赖性布局、棋盘格单元等构型缺陷,进而影响结构性能.针对上述问题,本文将开发一套考虑变热物性的流热耦合拓扑优化求解器,采用建表插值法求解热物性,用以缓解热物性求解计算量大的问题.此外,将完整再生冷却设计域简化为一个换热设计单元,通过适当的滤波技术和松弛求解策略,以避免出现构型缺陷.

本文主要内容如下,首先建立拓扑优化模型,基于连续伴随法对考虑变物性的伴随方程和灵敏度进行推导,并基于开源 CFD 平台 OpenFOAM^[20]构建拓扑优化求解器.针对流热耦合问题开展拓扑优化设计,重点考察能量耗散约束对优化构型的影响.为

了评估拓扑优化构型的流动换热性能, 本文还将对拓扑优化构型轮廓进行提取, 开展三维共轭换热数值模拟分析。

1 拓扑优化模型

拓扑优化方法种类繁多, 包括伪密度法、水平集法、相场法以及进化结构优化法等^[18]。在各方法中, 以伪密度法的应用最为广泛和成熟。因此, 本节将基于伪密度法建立拓扑优化模型, 并利用连续伴随法对考虑变物性的伴随方程及灵敏度进行推导。

1.1 控制方程

针对流热耦合的拓扑优化问题, 其物理模型示意图如图 1 所示, 设计域承受来自壁面的热载荷 q 或由内部产生的体积热 Q , 流体在流经该设计域时与固体实现热交换, 进而达到热平衡。该优化问题的核心是在满足压降或材料体积比等约束下, 找到最优的流固材料单元的空间分布, 从而使区域的平均温度或最高温度等目标降到最低。

首先建立流热耦合拓扑优化模型, 该模型的控制方程包含如下的质量方程、动量方程和能量方程

$$\mathbf{R}(\mathbf{w}, \gamma) = (R_p, R_u, R_T)^T = \begin{cases} -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \\ \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \nabla p + \alpha(\gamma) \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{u} \left(h + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) \right] - \nabla \cdot \left[\left(\frac{\lambda(\gamma)}{C_p} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \nabla h \right] \\ \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) - Q \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{R}(\mathbf{w}, \gamma)$ 表示等式约束向量, γ 为设计变量, 取值范围为 $0 \sim 1$, $\mathbf{w} = (p, \mathbf{u}, T)$ 为隐式依赖于设计变量的状态向量, 在该问题中分别对应压力、速度和温度; ρ, C_p, μ, λ 和 h 分别为密度、定压比热容、动力黏度、热导率和比焓, 均考虑其温度的相关性。 $\boldsymbol{\tau}$ 为黏性应力张量, 其定义式为 $\boldsymbol{\tau} = 2\mu_{\text{eff}} \mathbf{S}(\mathbf{u}) = (\mu + \mu_t) \cdot$

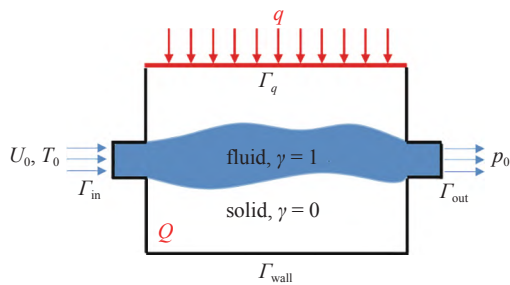


图 1 拓扑优化设计示意图

Fig. 1 Schematic of the topology optimization design

$(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$, μ_{eff} 为有效动力黏度, 表示分子动力黏度 μ 与湍流黏度 μ_t 之和, Pr_t 为湍流普朗特数, 默认值为 0.85, Q 为体积热源。

与常规形式 N-S 方程不同的是, 拓扑优化模型的动量方程中引入了体积力项 $-\alpha(\gamma) \mathbf{u}$, $\alpha(\gamma)$ 是与多孔介质渗透率的倒数相关的插值函数。引入设计变量 γ 对 $\alpha(\gamma)$ 进行插值, 用以区分流体与固体材料单元, 从而实现相似多孔介质流动的描述, 因此该变量又称为“伪密度”。插值函数采用如下形式^[21]

$$\alpha(\gamma) = \alpha_{\text{max}} \frac{\theta(1-\gamma)}{\theta+\gamma} \quad (2)$$

式中, θ 为形状参数, 取值范围为 $0.005 \sim 0.1$, 该函数形状如图 2 所示。 α_{max} 的取值则与达西数 Da 相关

$$\alpha_{\text{max}} = \frac{\mu}{Da \cdot l^2} \quad (3)$$

式中, l 为几何特征尺寸, Da 表征了多孔介质的渗透能力, 其取值小于 10^{-5} 较为合适^[15]。

$$\lambda(\gamma) = \lambda_{\text{min}} + (\lambda_{\text{max}} - \lambda_{\text{min}}) \frac{\theta(1-\gamma)}{\theta+\gamma} \quad (4)$$

相应地, 在能量方程中对热导率进行插值处理, λ_{min} 和 λ_{max} 分别为流体和固体材料的热导率。当设计变量 $\gamma = 0$ 时, α 取值为一个较大数 α_{max} , 表明该处单元为渗透率较低的固体单元; 当设计变量 $\gamma = 1$ 时, α 取值为 0, 表明该处为流体单元。

本文采用了比焓形式的能量方程, 与定压比热容存在如下热力学关系

$$C_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \quad (5)$$

因此, 在求解温度时, 可利用如下形式的牛顿迭代法计算得到

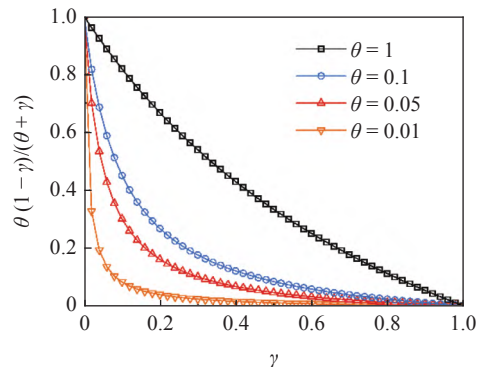


图 2 不同形状参数下的插值函数

Fig. 2 Interpolation function with different shape parameter θ

$$T_{\text{new}} = T_{\text{old}} + \frac{h_{\text{new}} - h(p_{\text{old}}, T_{\text{old}})}{C_p(p_{\text{old}}, T_{\text{old}})} \quad (6)$$

式中, $p_{\text{old}}, T_{\text{old}}, C_p(p_{\text{old}}, T_{\text{old}})$ 和 $h(p_{\text{old}}, T_{\text{old}})$ 分别为上个迭代步中的压力、温度、比热和比焓, h_{new} 为利用式 (1) 计算得到的更新后的比焓, 该迭代在相对误差小于 10^{-4} 时终止.

除了上述控制方程, 本文定义了如下形式的 Pnorm 函数^[22] 作为该优化问题的目标函数

$$\Psi(\mathbf{w}, \gamma) = \left(\int_{\Omega} T^n d\Omega \right)^{\frac{1}{n}} \quad (7)$$

该目标有利于避免设计域内局部区域温度过高, 式中 n 取值为 30. 此外, 引入如下的不等式约束函数

$$\mathbf{G}(\mathbf{w}, \gamma) = (g_{\text{vol}}, g_{\text{power}})^T = \begin{cases} \frac{1}{V} \int_{\Omega} \gamma d\Omega - V_{\text{max}} \\ \int_{\Gamma} \left(p + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 \right) d\Gamma - \varphi_{\text{max}} \end{cases} \quad (8)$$

其中, $\mathbf{G}(\mathbf{w}, \gamma)$ 为不等式约束向量, 分别用来约束设计域的材料体积比例以及进出口能量耗散. V_{max} 为材料体积比例的期望值, φ_{max} 为进出口能量耗散的期望值.

综上所述, 一个完整的基于密度法的拓扑优化问题可以由以下数学表达式来概述.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Find : } \gamma \\ \text{Minimize : } \Psi(\mathbf{w}, \gamma) \\ \text{Subject to : } \mathbf{R}(\mathbf{w}, \gamma) = \mathbf{0} \\ \mathbf{G}(\mathbf{w}, \gamma) \leq \mathbf{0} \\ 0 \leq \gamma \leq 1 \end{array} \right\} \quad (9)$$

1.2 伴随方程与灵敏度推导

本节将基于连续伴随法对流热耦合问题的伴随关系式及灵敏度公式进行推导, 首先构造如下形式的拉格朗日函数

$$L = \Psi + \int_{\Omega} \lambda \cdot \mathbf{R}(\mathbf{w}, \gamma) d\Omega = \Psi + \langle \lambda, \mathbf{R}(\mathbf{w}, \gamma) \rangle \quad (10)$$

式中, Ψ 为目标函数, $\lambda = (p_a, \mathbf{u}_a, T_a)$ 为拉格朗日乘子, 又称伴随向量. 由于 $\mathbf{R}(\mathbf{w}, \gamma) = \mathbf{0}$, 因此原目标函数关于设计变量的灵敏度等价于如下拉格朗日函数的全导数

$$\frac{dL}{d\gamma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{w}} \frac{d\mathbf{w}}{d\gamma} + \frac{\partial \langle \lambda, \mathbf{R} \rangle}{\partial \gamma} + \frac{\partial \langle \lambda, \mathbf{R} \rangle}{\partial \mathbf{w}} \frac{d\mathbf{w}}{d\gamma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} + \frac{\partial \langle \lambda, \mathbf{R} \rangle}{\partial \gamma} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{w}} + \frac{\partial \langle \lambda, \mathbf{R} \rangle}{\partial \mathbf{w}} \right) \frac{d\mathbf{w}}{d\gamma} \quad (11)$$

依据偏微分方程约束的 KKT (Karush–Kuhn–Tucker) 条件^[23], 构造如下的伴随变量方程组

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{w}} + \frac{\partial \langle \lambda, \mathbf{R} \rangle}{\partial \mathbf{w}} = \begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial p} + \frac{\partial \langle p_a, R_p \rangle}{\partial p} + \frac{\partial \langle \mathbf{u}_a, R_u \rangle}{\partial p} + \frac{\partial \langle T_a, R_T \rangle}{\partial p} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial \langle p_a, R_p \rangle}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial \langle \mathbf{u}_a, R_u \rangle}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial \langle T_a, R_T \rangle}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial T} + \frac{\partial \langle p_a, R_p \rangle}{\partial T} + \frac{\partial \langle \mathbf{u}_a, R_u \rangle}{\partial T} + \frac{\partial \langle T_a, R_T \rangle}{\partial T} \end{cases} \quad (12)$$

利用积分变换对上述方程组进行化简, 便可得到求解伴随变量所需的控制方程, 其具体形式及推导过程参见附录 A. 能够发现, 由于考虑了温度相关的变热物性和输运性质, 伴随变量的控制方程形式相比于常物性模型^[15] 复杂很多. 而伴随变量控制方程与原始状态变量的控制方程存在形式上的相似性, 因此可采用相似的数值算法对其进行求解.

此时拉格朗日函数的全导数, 即目标函数的灵敏度, 经推导后转化为如下形式

$$\frac{dL}{d\gamma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} + \frac{\partial \langle \lambda, \mathbf{R} \rangle}{\partial \gamma} \quad (13)$$

在求解得到原始状态变量与伴随变量解后, 便可计算得到该灵敏度数值.

2 数值方法

本节将对拓扑优化过程中遇到的关键数值问题以及所采取的数值方法进行介绍, 包括滤波与投影函数的使用、热物性的求解、拓扑优化求解器的构建以及共轭换热数值求解器的验证等.

2.1 滤波与投影

在拓扑优化模型中, 由于对材料物性采用了特殊的惩罚策略, 导致优化过程中容易出现一些不切实际的布局, 如网格依赖性布局或棋盘格单元等^[24-26], 这严重影响了材料布局的重构和收敛. 研究表明, 一些正则化技术, 如密度滤波器^[27] 可以有效地解决上述问题. 本文采用亥姆霍兹型偏微分方程作为滤波器, 其方程形式如下

$$\gamma_f = R_{\text{min}}^2 \nabla^2 \gamma_f + \gamma_0 \quad (14)$$

式中 γ_0 为滤波前的伪密度, γ_f 为滤波后的伪密度, R_{min} 为滤波半径. 当网格单元尺寸为 Δx 时, 滤波半径 R_{min} 越大, 则 γ_f 的形状特征越容易被抹平, 因此, 本文控制各算例的最大滤波半径不超过 $2\Delta x$.

此外, 采用滤波器通常会产生灰色单元, 即处于

流固材料单元之间的模糊单元. 因此, 可以配合使用投影函数^[28]来获得清晰的流固边界. 本文采用如下的双曲正切函数来对 γ_f 进行投影

$$\gamma_p = \frac{\tanh(\beta\eta) + \tanh[\beta(\gamma_f - \eta)]}{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(1 - \eta))} \quad (15)$$

式中 γ_p 为投影后的伪密度, β 和 η 为用来控制投影函数形状的形状因子. 投影函数的 η 取值为 V_{\max} , 用来保证材料的体积比例, 而控制斜率的 β 因子随优化过程进行而逐渐变大, 本文中 β 初始值为 1, 最大值为 32, 投影后的优化变量 γ_p 近乎收敛到接近于 $\{0, 1\}$ 的集合, 可以得到较为清晰的流固边界.

在对设计变量 γ 进行滤波和投影操作后, 此时的灵敏度形式为

$$\frac{dL}{d\gamma_p} = \frac{\partial\alpha}{\partial\gamma_p} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_a d\Omega + \frac{\partial\lambda}{\partial\gamma_p} \int_{\Omega} \frac{1}{C_p} \nabla h \cdot \nabla T_a d\Omega \quad (16)$$

为了获得原始灵敏度, 需要进行如下的链式求导^[15]

$$\frac{dL}{d\gamma} = \frac{dL}{d\gamma_p} \frac{d\gamma_p}{d\gamma_f} \frac{d\gamma_f}{d\gamma} \quad (17)$$

式中 $\frac{d\gamma_p}{d\gamma_f}$ 可由式 (15) 获得, 若将 $\frac{dL}{d\gamma_p} \frac{d\gamma_p}{d\gamma_f}$ 记为 S_f , 将 $\frac{dL}{d\gamma}$ 记为 S , 则式 (17) 可等效为

$$S = R_{\min}^2 \nabla^2 S + S_f \quad (18)$$

对该式进行求解便可得到原始灵敏度 $\frac{dL}{d\gamma}$, 从而代入优化工具包, 对设计变量值进行更新.

2.2 热物性求解

在发动机冷却通道内, 碳氢燃料的热物性随温度与压力在很大的范围内变化^[29]. 以正癸烷为例, 作为一种典型的碳氢燃料, 在再生冷却的流动吸热过程中, 其自身温升高达数百摄氏度, 热力学性质和输运性质会在临界点附近发生陡峭变化, 容易引发方程求解过程中的数值积分刚性问题. 此外, 在利用连续伴随方法推导得到的伴随方程中, 存在热力学性质及输运性质关于温度的偏导项, 包括 $\partial h/\partial T$, $\partial\rho/\partial T$, $\partial C_p/\partial T$, $\partial\mu/\partial T$ 和 $\partial\lambda/\partial T$, 当采用解析形式的物性求解方程时, 偏导项的求解将变得十分困难.

因此, 本文对物性参数及各偏导项的计算采取了建表-插值^[30]的方法, 首先基于 CoolProp 软件^[31]建立数据表, 在不考虑燃料高温裂解的前提下, 该物性数据表以压力和温度作为基础变量, 变量间隔分别为 1 kPa 和 2 K, 模拟过程中采用线性插值计算得到相关的参数. 图 3 所示为正癸烷在 3 MPa 压力下

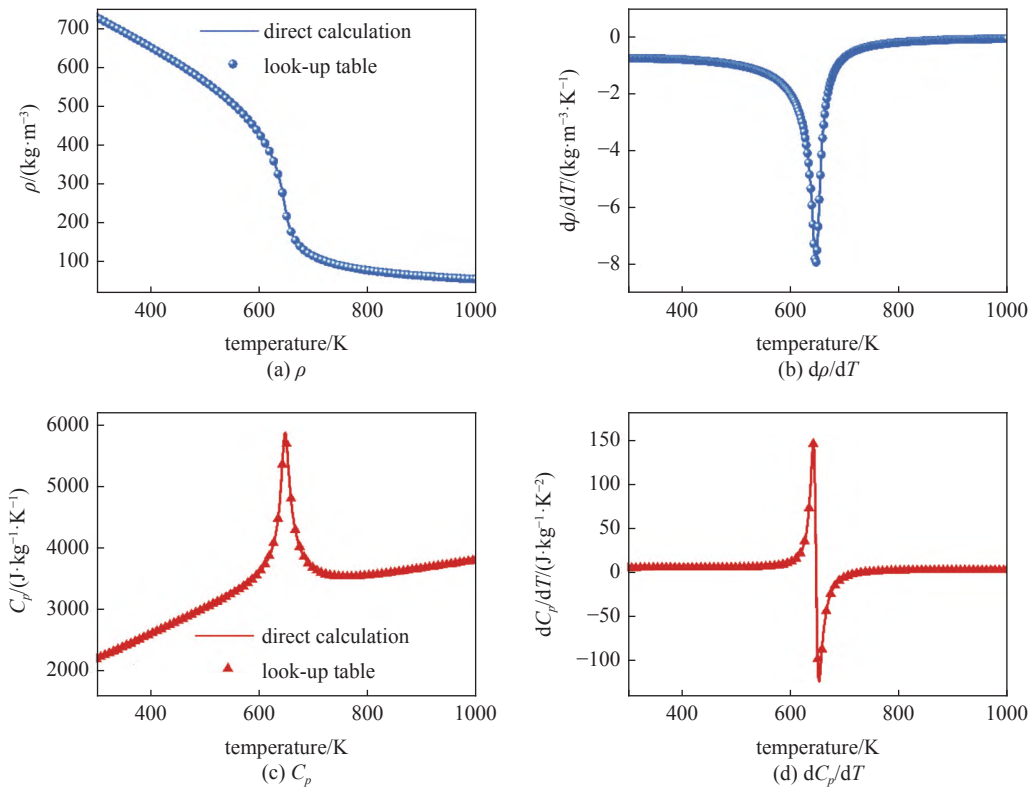


图 3 热物物理性质及热力学偏导

Fig. 3 Thermo-physical properties and derivatives

($T_{pc} = 648.4 \text{ K}$) 的密度、比热以及二者关于温度的热力学偏导性质, 其中利用建表-插值得到的数据与利用 CoolProp 直接计算得到的数据十分接近, 最大相对误差均不超过 0.2%, 表明本文所采用的物性计算方法是准确的。

2.3 求解器构建

基于上述的模型与数值方法, 本文利用开源平台 OpenFOAM 搭建了拓扑优化求解器。图 4 所示为求解器的主要求解框架, 其主程序包含以下 4 部分: (1) 对原始状态变量方程求解; (2) 对伴随变量方程

求解; (3) 预估目标函数与约束值; (4) 对灵敏度和伪密度进行滤波和投影。其中对原始状态变量和伴随变量控制方程的求解模块均基于内置的标准可压缩流动求解器 rhoSimpleFoam 进行改造。对热物性及热力学偏导的求解模块则按上节所述的建表-插值法编译为动态链接库。耦合了 MMA (method of moving asymptotes)^[32] 算法作为优化工具, 同样将其编译成库供主程序调用, 对设计变量进行更新。求解器迭代优化的终止条件以目标函数的相对变化小于 0.1% 或固定迭代步数为准则。

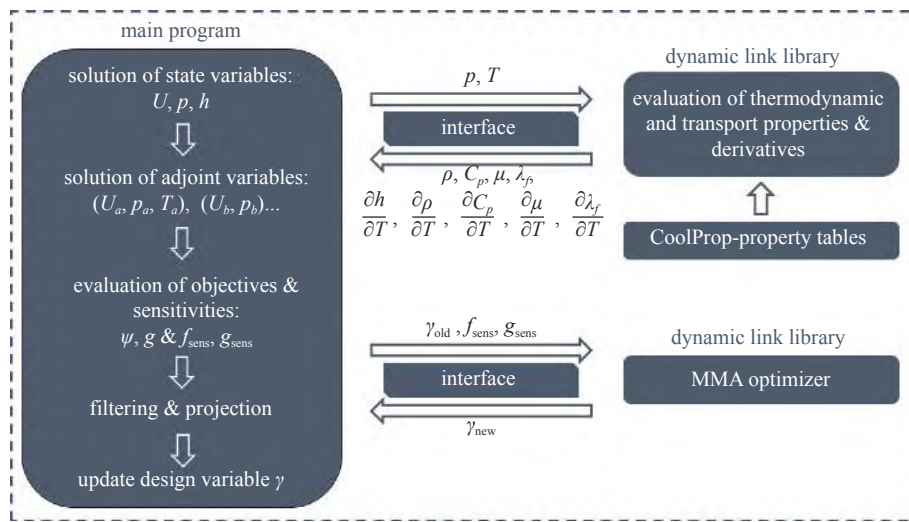


图 4 考虑变物性的拓扑优化求解流程图

Fig. 4 Flowchart of the topology optimization approach considering variable physical properties

2.4 共轭换热数值验证

本文所开展的拓扑优化设计均基于二维模型, 为了对其实际三维构型的流动换热性能进行评估, 将对拓扑优化构型进行提取, 并利用 OpenFOAM 内置的标准共轭换热求解器 chtMultiRegionFoam 进行数值模拟。为了验证该共轭换热求解器的准确性, 首先与 Zhu 等^[33] 进行的流动换热实验进行对比分析。该实验中固体材料为不锈钢, 燃料为正癸烷。按照对应的实验条件, 入口给定质量流量 0.6083 g/s, 入口温度为 625.93 K, 出口给定背压 4.19 MPa, 测试段体积热源大小为 $1.758 \times 10^8 \text{ W/m}^3$, 连接段热流边界的热流密度大小为 11550 W/m^2 。采用 $k-\epsilon$ 湍流模型进行验证, 其结果如图 5 所示, 显然, 该数值计算结果与实验结果较为吻合, 外壁温及冷却剂温度的最大相对误差均小于 5%, 证明该共轭换热求解器可以较好地预测流动换热性能。

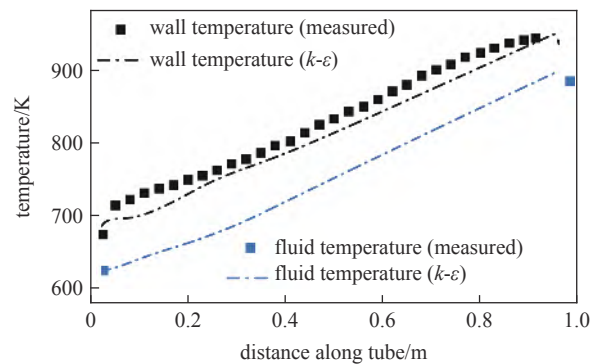


图 5 冷却剂及外壁面温度的数值与实验结果对比

Fig. 5 Comparison of predicted coolant and out wall temperatures against the experimental data

3 结果与分析

3.1 流热耦合拓扑优化设计

本节将针对发动机再生冷却通道开展流热耦合拓扑优化设计, 为了节省计算成本, 以图 6 所示的二

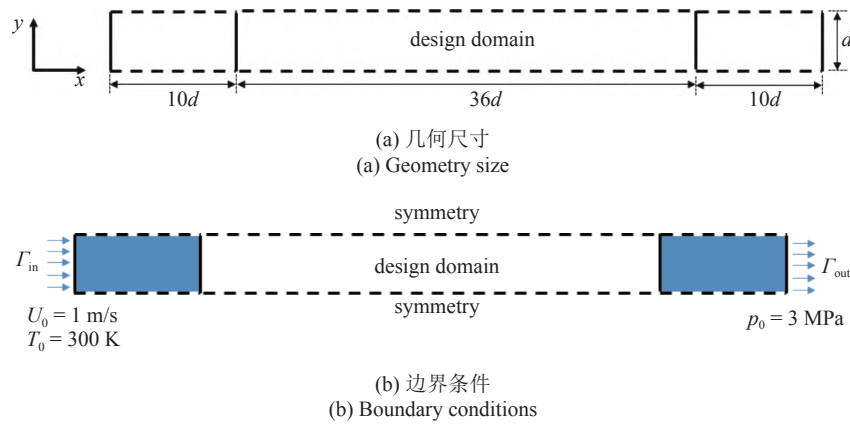


图 6 流-热耦合结构计算域示意图

Fig. 6 Schematic of the computational domain of the coupled thermal-fluid structure

维换热单元作为设计域, 即不考虑构型在 z 方向的优化. 其几何及边界条件设置见图 6, 计算域进出口尺寸 $d = 5 \text{ mm}$, 厚度为 2 mm , 进、出口段为长度 $10d$ 的非设计域, 中间设计域长度为 $36d$, 流体材料为正癸烷, 固体材料为 GH3128, 其热导率随温度的变化如下

$$\lambda_{\max} = 5.6467 + 0.0147T \quad (19)$$

设定入口速度为 1 m/s , 初始温度为 300 K , 对应的入口雷诺数为 2500 , 计算域出口压力设为 3 MPa , 其余边界为对称边界, 对设计域施加体积热源 $Q = 5 \times 10^8 \text{ W/m}^3$. 利用均匀结构化网格对区域进行离散化, 考虑到要尽可能保留小尺度特征, 同时还要保证加工可制造性, 本文将网格尺寸设定为 $0.1 \text{ mm} \times 0.1 \text{ mm}$, 网格总数为 140000 , 采用 $k-\epsilon$ 湍流模型进行模拟.

该优化模型以 P-norm 函数 ψ 作为目标, 施加材料体积约束 g_{vol}, V_{\max} 取值为 0.68 , α_{\max} 取初始值为 10^3 , 每步增长 1.05 倍, 最大值设为 10^8 . 为了考察不

同能量耗散约束值对拓扑优化构型的影响, 本文首先对 $\gamma_0 = 0.5, \alpha_{\max} = 10^3$ 的初始分布构型进行计算, 得到其能量耗散值约为 $0.015 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$, 随后将该数值作为参考值, 对 φ_{\max} 的取值范围在 $0.02 \sim 0.25$ 内的算例进行了优化, 并从中提取出 φ_{\max} 为 $0.03, 0.05, 0.14, 0.19$ 和 0.21 的 5 个算例, 分别命名为 Case 1 ~ Case 5.

图 7 为优化得到的伪密度场分布及对应的速度分布与温度分布. 为了方便观察, 这里将计算结果按关于 x 轴对称形式显示. 能够发现, 在材料比例基本一致的前提下, Case 1 ~ Case 5 的固体域均发生了不同程度的分裂, 且各分裂的固体胞元块呈现出不同的排列方式. 在 Case 1 中, 大部分固体域分布在通道两侧, 流体流通面积较大, 流速较低. 而随着能量耗散约束值增大, 固体域分裂成的块数逐渐增多, 流体域内的微细通道数量增多, 流体流通面积减小, 流速增大, 与固体域的接触面积明显增加. 从 Case 1 ~ Case 5, 流体的流动分离与再混合行为逐渐增多, 多处区域存在局部的流动加速, 同样促进了流体与固

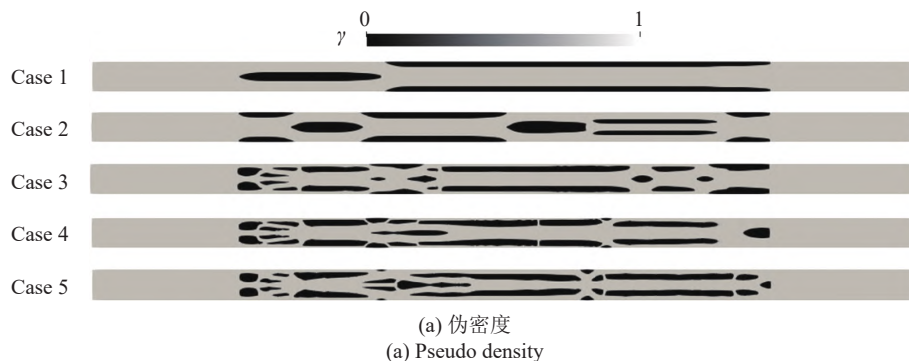


图 7 拓扑优化构型及状态变量云图

Fig. 7 Contours of the optimized layouts and state variables

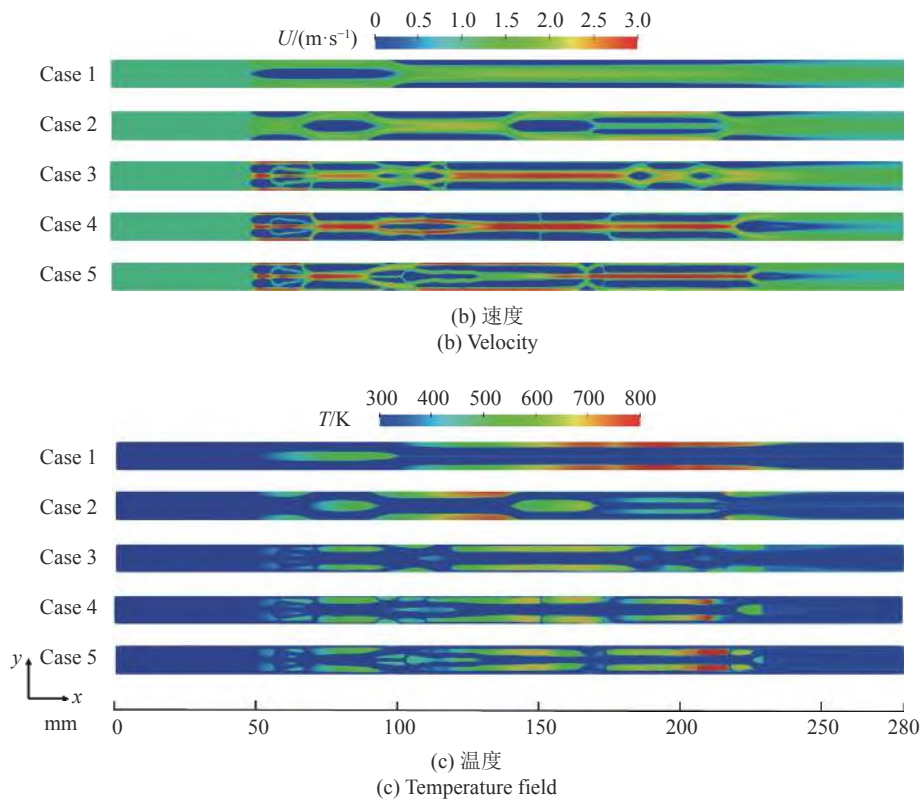


图7 拓扑优化构型及状态变量云图(续)

Fig. 7 Contours of the optimized layouts and state variables (continued)

体接触面的热量交换。

通过观察各伪密度法场对应的温度云图能够发现, 尽管采用了投影等数值策略, 在优化构型中仍存在部分灰色单元区域, 如在 Case 5 的后段, 由于灰色单元的存在, 导致该区域中出现流动死区, 其温度呈现出非连续变化, 这在一定程度上干扰了对流动换热性能的评估。因此, 为了评估真实的拓扑优化通道的流动换热性能, 本文将进一步对拓扑优化构型进行提取, 将其对应的三维结构进行共轭换热数值模拟。

3.2 拓扑冷却通道的流动换热性能

本节将对三维拓扑优化通道开展共轭换热数值模拟, 并对其流动换热性能进行分析。首先将 5 种拓

扑优化构型中 $\gamma < 0.5$ 的区域进行提取, 利用样条曲线对拓扑胞元进行建模, 图 8 所示为 5 种拓扑通道 (Case 1 ~ Case 5) 的三维模型, 此外, 加入了传统直通通道构型 Case 0 作为对比算例, 其固体壁肋宽约为 1.70 mm, 高度为 2 mm, 冷热壁厚均为 0.75 mm。

随后对上述模型进行计算, 其入口速度仍为 1 m/s, 初始温度为 300 K, 出口压力为 3 MPa。按能量守恒原则, 将体积热源 Q 换算为在固体域底部面施加的面热流 q , 其大小约为 1 MW/m², 上下层固体域左右面为对称边界, 其余壁面为绝热边界, 采用 k - ϵ 湍流模型并结合壁面函数, 对通道内各固体壁面添加边界层网格, 第一层网格高度为 0.004 mm, 以保证无量纲距离 $y^+ < 10$ 。

图 9 所示为计算得到的各通道中心截面和底部

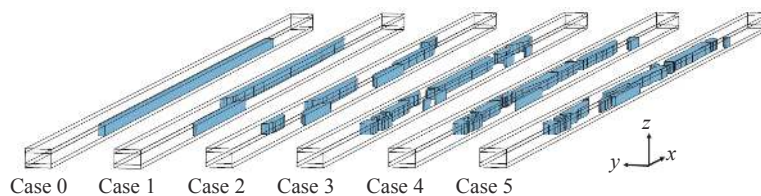


图8 拓扑优化通道的三维几何视图

Fig. 8 Three-dimensional layouts of topology optimization channels

被加热面的温度分布云图. 能够发现, 由于固体胞元的不规则排列, 5 个通道的热壁面温度呈现非均匀分布, 在某些较大的胞元间隙位置, 如 Case 3 的 190 mm 和 210 mm 位置处, 由于流体流通面积较大, 流速较低, 导致底面加热位置的壁温较高, 但从 Case 1

到 Case 5, 各通道内的高温区域显著减少.

图 10 为中心 xy 截面上的速度云图、压力云图以及湿周底部面的努塞尔数云图. 在 Case 1 ~ Case 5 中, 冷却剂平均流速逐渐增大, 压力损失也逐渐增大. 在 Case 3 ~ Case 5 中, 通道前端位置的固体胞元首

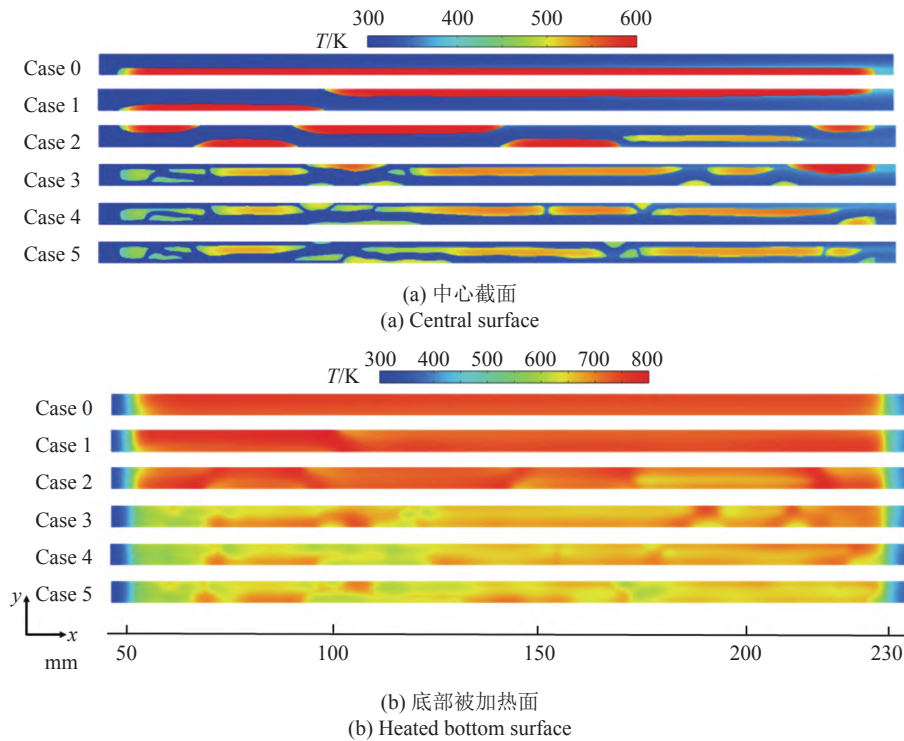


图 9 xy 截面的温度分布云图
Fig. 9 Contours of temperature on xy plane

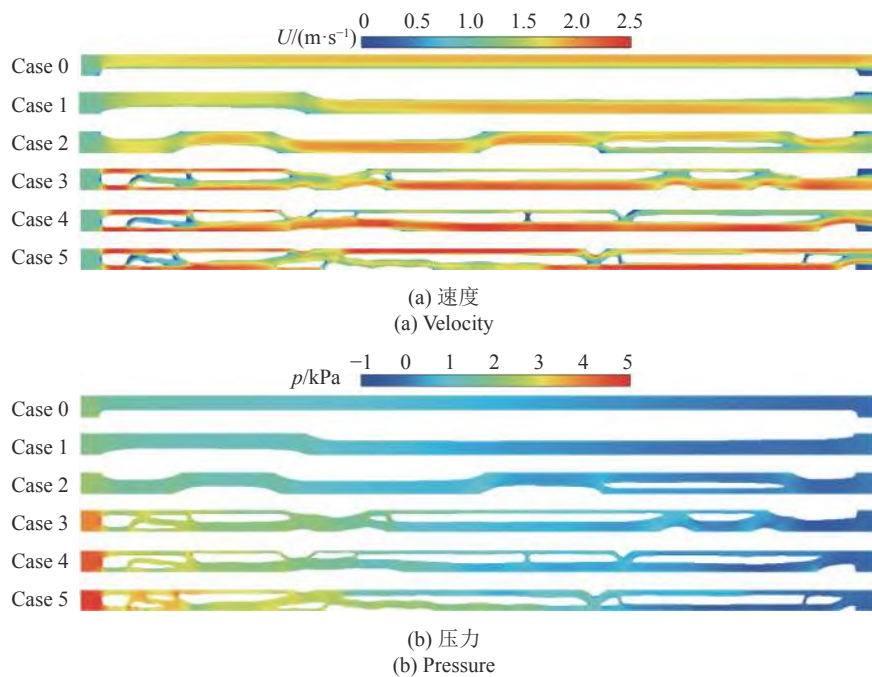
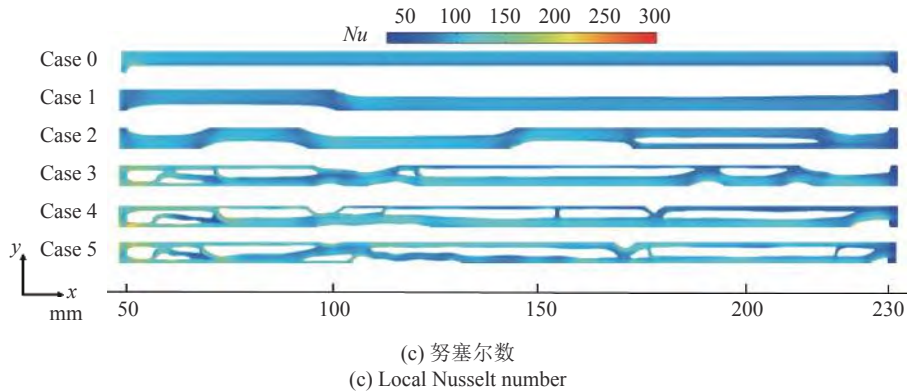


图 10 xy 截面云图
Fig. 10 Contours on xy plane



(c) 努塞尔数
(c) Local Nusselt number

图 10 xy 截面云图 (续)

Fig. 10 Contours on xy plane (continued)

先起到了节流的作用,使冷却剂流速加快,随后在流动过程中发生了大量的流动分离和再混合,带来了较大的能量耗散和压力损失.但由于冷却剂流动边界层和热边界层的分离和再附着,使得传热热阻降低,增强了流体与固体间的换热,局部努塞尔数增大.此外,在多个固体胞元的钝前缘位置,局部努塞尔数也有明显提高,这表明流体对固体的冲击效应,同样使得胞元前缘位置的传热增强.

表 1 所示为各拓扑冷却通道的流动和换热性能

数据,图 11 为热壁面平均温度和最高温度与通道压降的性能关系曲线.能够发现,从 Case 1 ~ Case 5,各通道的压降逐渐增加,且热壁面平均温度和最高温度均随压降升高而显著降低,其中 Case 5 热壁面平均温度和最高温度分别降低了 91.1 K 和 55.1 K.各通道的平均努塞尔数逐渐增加,表明各通道整体的换热能力逐渐增强.但相比于 Case 0,仅 Case 3 ~ Case 5 起到了强化换热的效果,其平均努塞尔数增益百分比分别为 12.6%, 16.0% 和 23.4%.

表 1 6 种通道的流动换热性能

Table 1 Flow and heat transfer performances of six channels

	Case 0	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
T_{ave}/K	734.4	737.5	715.0	665.1	651.3	643.3
T_{max}/K	765.1	808.6	786.5	743.5	733.4	710.0
$\Delta p/kPa$	1.6	1.8	2.1	3.6	4.3	4.5
Nu	91.6	88.3	91.2	103.1	106.3	109.0

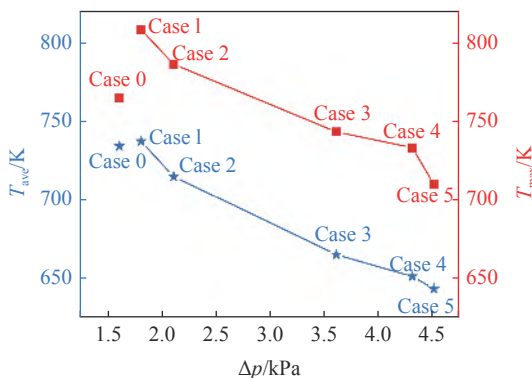


图 11 各通道热壁面平均温度和最高温度随压降的性能关系曲线
Fig. 11 Relationship between the average and maximum temperature in terms of the pressure drop of the cooling channels

3.3 拓扑冷却通道的强化换热机理

图 12 所示为各通道在流向不同位置处 yz 截面上的涡量云图.能够观察到,相比于 Case 0 ~ Case 2, Case 3 ~ Case 5 通道内冷却剂在多个位置呈现二次涡形态,如在 Case 4 和 Case 5 的 $x = 70 \sim 85$ mm、Case 5 的 $105 \sim 115$ mm 等位置.该涡系结构的形成是由于流体在流经固体胞元间隙时,受其他分支的流体掺混与扰动而形成,其涡系形态一直保持到胞元后缘,但沿流向涡强度逐渐减弱,直到下一个固体域分裂的区域,流体再次形成明显的二次涡结构.该涡系结构促使近壁面流体与主流发生掺混,促进热交换.

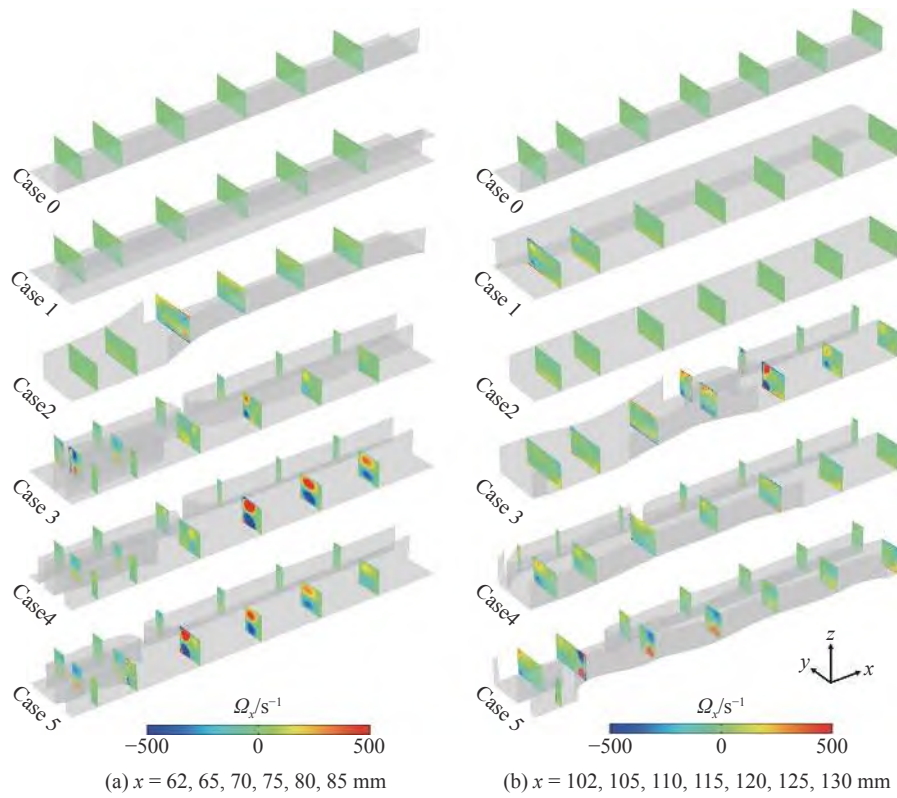


图 12 不同流向位置 yz 截面上的涡量云图

Fig. 12 Contours of vorticity on yz planes at different streamwise locations

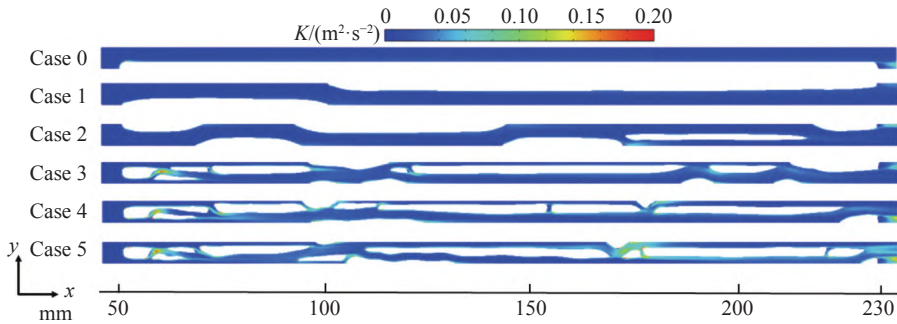


图 13 xy 截面湍动能云图

Fig. 13 Contours of turbulence energy on xy plane

图 13 所示为各拓扑冷却通道在 xy 中心截面上冷却剂的湍动能分布云图。在 Case 3 ~ Case 5 通道内, 多个固体胞元的侧壁以及尾部回流区等位置, 由于局部的流动加速或流动混合, 使流体的湍动能得以激发, 换热能力增强。此外, 流体湍动能增强区域与二次涡形成区域基本吻合, 表明二次涡结构有助于激发湍动能, 进而增强换热。

4 结论

本文针对发动机的再生冷却结构, 开展了考虑变物性的流热耦合拓扑优化设计, 并对三维拓扑结

构的流动换热性能进行了数值模拟与分析, 得到主要结论如下。

(1) 在基于连续伴随法的求解框架中, 考虑工质的变物性会使伴随方程的形式更加复杂, 求解更加困难。利用建表-插值法对方程中热物性、输运性质及各偏导项进行求解, 是一种有效且准确的方法。

(2) 通过对流热耦合结构进行拓扑优化设计, 发现其优化构型随着能量耗散约束值的增大而愈加复杂, 且伴有多重的流动分离和再混合现象。

(3) 通过对三维拓扑优化构型进行共轭换热数值模拟, 结果表明, 相比于直通道构型 Case 0, 拓扑

优化冷却通道内的冷却剂流态复杂,存在二次涡等涡系结构,在带来更大压力损失的同时,各通道局部的换热效果得到增强.在5个拓扑通道中(Case 1~Case 5),Case 3~Case 5整体实现了强化换热的效果,其平均努塞尔数增益百分比分别为12.6%,16.0%和23.4%.

综上所述,面向发动机再生冷却的拓扑优化设计具有良好的应用前景,后续将继续开展更多三维流热耦合结构的设计工作,并逐步完善求解器的其他功能.

参 考 文 献

- Zhu Y, Peng W, Xu R, et al. Review on active thermal protection and its heat transfer for airbreathing hypersonic vehicles. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2018, 31(10): 1929-1953
- Zhang S, Li X, Zuo J, et al. Research progress on active thermal protection for hypersonic vehicles. *Progress in Aerospace Sciences*, 2020, 119: 100646
- 刘学, 杨海威, 周伟星. 燃烧室内壁面发汗冷却数值模拟研究. *火箭推进*, 2021, 47(4): 30-36 (Liu Xue, Yang Haiwei, Zhou Weixing. Numerical simulation research on transpiration cooling on the inner wall of combustion chamber. *Journal of Rocket Propulsion*, 2021, 47(4): 30-36 (in Chinese))
- 刘朝晖, 宋晨阳, 陈强等. 吸热型碳氢燃料再生冷却性能评估方法. *火箭推进*, 2020, 46(2): 15-20 (Liu Chaohui, Song Chenyang, Chen Qiang, et al. Evaluation methods on regenerative cooling performance for endothermic hydrocarbon fuel. *Journal of Rocket Propulsion*, 2020, 46(2): 15-20 (in Chinese))
- Luo S, Xu D, Song J, et al. A review of regenerative cooling technologies for scramjets. *Applied Thermal Engineering*, 2021, 190: 116754
- 赵晋杰, 雷志良, 鲍泽威等. S型管内超临界航空煤油的裂解与结焦研究. *推进技术*, 2021, 42(3): 692-700 (Zhao Jinjie, Lei Zhiliang, Bao Zewei, et al. Pyrolysis and coking deposition of aviation kerosene under supercritical conditions in S-bend tubes. *Journal of Propulsion Technology*, 2021, 42(3): 692-700 (in Chinese))
- Sunden BA, Wu Z, Huang D. Comparison of heat transfer characteristics of aviation kerosene flowing in smooth and enhanced mini tubes at supercritical pressures. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 2016, 26(3/4): 1289-1308
- Li Y, Sun F, Xie G, et al. Improved thermal performance of cooling channels with truncated ribs for a scramjet combustor fueled by endothermic hydrocarbon. *Applied Thermal Engineering*, 2018, 142: 695-708
- 杨泽南, 陈伟, Minking KC等. 网格阵列填充冷却通道内超临界正癸烷流动传热特性的数值研究. *推进技术*, 2022, 43(6): 200489-254 (Yang Ze-nan, Chen Wei, Minking K Chyu, et al. Numerical study on flow and heat transfer characteristics of supercritical n-decane in cooling channels with lattice arrays. *Journal of Propulsion Technology*, 2022, 43(6): 200489-254 (in Chinese))
- Li X, Lu Y, Wu K, et al. A novel method of cooling channel optimization for active-cooled structure using the calculus of variations//AIAA Propulsion and Energy 2019 Forum, 2019
- Li Y, Xie G, Zhang Y, et al. Flow characteristics and heat transfer of supercritical n-decane in novel nested channels for scramjet regenerative cooling. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2021, 167: 120836
- Zhang C, Gao H, Zhao J, et al. Cooling performance optimization of supercritical hydrocarbon fuel via bi-directional flow pattern. *Applied Thermal Engineering*, 2022, 212: 118563
- Li H, Ding X, Meng F, et al. Optimal design and thermal modelling for liquid-cooled heat sink based on multi-objective topology optimization: An experimental and numerical study. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2019, 144: 118638
- Tang L, Gao T, Song L, et al. Topology optimization of nonlinear heat conduction problems involving large temperature gradient. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, 357: 112600
- Yu M, Ruan S, Gu J, et al. Three-dimensional topology optimization of thermal-fluid-structural problems for cooling system design. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2020, 62(6): 3347-3366
- Fawaz A, Hua Y, Corre SL, et al. Topology optimization of heat exchangers: A review. *Energy*, 2022, 252: 124053
- Bendsøe MP, Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, 71(2): 197-224
- Dbouk T. A review about the engineering design of optimal heat transfer systems using topology optimization. *Applied Thermal Engineering*, 2017, 112: 841-854
- Zhang T, Jing T, Qin F, et al. Topology optimization of regenerative cooling channel in non-uniform thermal environment of hypersonic engine. *Applied Thermal Engineering*, 2023, 219: 119384
- Weller H G, Tabor G, Jasak H, et al. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques. *Computers in Physics*, 1998, 12(6): 620-631
- Stolpe M, Svanberg K. An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001, 22(2): 116-124
- Yu M, Wang X, Gu J, et al. A synergic topology optimization approach on distribution of cooling channels and diverse-intensity heat sources for liquid-cooled heat sink. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2022, 65(2): 48
- Hinze M, Pinnau R, Ulbrich M, et al. Optimization with PDE Constraints. Springer, 2009
- Diaz A, Sigmund O. Checkerboard patterns in layout optimization. *Structural Optimization*, 1995, 10(1): 40-45
- Guest JK, Prévost JH, Belytschko T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. *International Journal for Numerical Methods in*

Engineering, 2004, 61(2): 238-254

26 Sigmund O. On benchmarking and good scientific practise in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2022, 65: 315

27 Lazarov BS, Sigmund O. Filters in topology optimization based on Helmholtz-type differential equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, 86(6): 765-781

28 Wang F, Lazarov BS, Sigmund O. On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2010, 43(6): 767-784

29 Lemmon EW. Short fundamental equations of state for 20 industrial fluids. *Journal of Chemical & Engineering Data*, 2006, 51(3): 785-850

30 Liu Z, Liang J, Yu P. Construction of thermodynamic properties look-up table with block-structured adaptive mesh refinement method. *Journal of Thermophysics & Heat Transfer*, 2014, 28(1): 50-58

31 Bell IH, Wronski J, Quoilin S, et al. Pure and pseudo-pure fluid thermophysical property evaluation and the open-source thermophysical property library coolprop. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2014, 53(6): 2498-2508

32 Svanberg, K. A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations. *SIAM Journal on Optimization*, 2002, 12(2): 555-573

33 Zhu Y, Liu B, Jiang P. Experimental and numerical investigations on n-decane thermal cracking at supercritical pressures in a vertical tube. *Energy & Fuels*, 2014, 28(1): 466-474

附录A

如 1.2 节所述, 伴随变量方程组满足正文关系式 (12), 在对其进行化简前, 首先将目标函数的定义域分为边界和内部域两部分

$$\Psi = \int_{\Gamma} \Psi_{\Gamma} d\Gamma + \int_{\Omega} \Psi_{\Omega} d\Omega \quad (A1)$$

则目标函数关于状态变量的偏导数为

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{w}} = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Psi_{\Gamma}}{\partial \mathbf{w}} \mathbf{w}_d d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_{\Omega}}{\partial \mathbf{w}} \mathbf{w}_d d\Omega \quad (A2)$$

式中 \mathbf{w}_d 表示目标关于状态变量的导数的方向, 变量 p, \mathbf{u} 和 T 对应的导数方向分别为 p_d, \mathbf{u}_d 和 T_d . 下面对方程组 (12) 中的各积分项进行积分变换, 结果如下

$$\langle p_a, R_p \rangle = - \int_{\Gamma} p_a \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \nabla p_a d\Omega \quad (A3)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_a, R_u \rangle &= \int_{\Omega} \mathbf{u}_a \cdot \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma} 2\mu_{\text{eff}} S(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_a d\Gamma + \\ &\int_{\Omega} 2\mu_{\text{eff}} S(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{u}_a d\Omega + \int_{\Gamma} p \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \\ &\int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{u}_a d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u}_a \cdot \alpha \mathbf{u} d\Omega \end{aligned} \quad (A4)$$

$$\begin{aligned} \langle T_a, R_T \rangle &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} T_a \cdot \nabla h d\Omega + \int_{\Gamma} T_a \rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \\ &\int_{\Omega} \rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{u} \cdot \nabla T_a d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\lambda}{C_p} \nabla h \cdot \nabla T_a d\Omega - \\ &\int_{\Gamma} T_a (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) \cdot \nabla T_a d\Omega - \int_{\Omega} T_a Q d\Omega \end{aligned} \quad (A5)$$

此时, 拉格朗日函数关于状态变量的偏导数可以推导为

如下形式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial p} + \frac{\partial \langle p_a, R_p \rangle}{\partial p} + \frac{\partial \langle \mathbf{u}_a, R_u \rangle}{\partial p} + \frac{\partial \langle T_a, R_T \rangle}{\partial p} = \\ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Psi_{\Omega}}{\partial p} - \nabla \cdot \mathbf{u}_a \right) p_d d\Omega + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Psi_{\Gamma}}{\partial p} + \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{n} \right) p_d d\Gamma \end{aligned} \quad (A6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial \langle p_a, R_p \rangle}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial \langle \mathbf{u}_a, R_u \rangle}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial \langle T_a, R_T \rangle}{\partial \mathbf{u}} = \\ \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \Psi_{\Omega}}{\partial \mathbf{u}} + \rho \nabla p_a + \rho \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_a - (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_a - \right. \\ \left. \nabla \cdot [2\mu_{\text{eff}} S(\mathbf{u}_a)] + \alpha \mathbf{u}_a + \rho T_a \nabla h - \rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) \nabla T_a - \right. \\ \left. \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla T_a) \mathbf{u} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla T_a \right\} \cdot \mathbf{u}_d d\Omega + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial \Psi_{\Gamma}}{\partial \mathbf{u}} - p_a \rho \mathbf{n} + \right. \\ \left. \mathbf{u}_a (\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) + \mu_{\text{eff}} \nabla \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{n} + T_a \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u} + T_a \rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{n} - \right. \\ \left. T_a (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) \right] \cdot \mathbf{u}_d d\Gamma \end{aligned} \quad (A7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial T} + \frac{\partial \langle p_a, R_p \rangle}{\partial T} + \frac{\partial \langle \mathbf{u}_a, R_u \rangle}{\partial T} + \frac{\partial \langle T_a, R_T \rangle}{\partial T} = \\ \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \Psi_{\Omega}}{\partial T} + \frac{\partial \rho}{\partial T} \mathbf{u} \cdot \nabla p_a + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_a \cdot \frac{\partial \rho}{\partial T} \mathbf{u} + 2 \frac{\partial \mu_{\text{eff}}}{\partial T} S(\mathbf{u}) : \right. \\ \left. \nabla \mathbf{u}_a + \frac{\partial \rho}{\partial T} T_a \mathbf{u} \cdot \nabla h - \frac{\partial \rho}{\partial T} \mathbf{u} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) \cdot \nabla T_a + \right. \\ \left. \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T} C_p - \lambda \frac{\partial C_p}{\partial T} \right) \frac{1}{C_p^2} \nabla h \cdot \nabla T_a + \left[2 \frac{\partial \mu}{\partial T} S(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \right] \cdot \nabla T_a - \right. \\ \left. \rho C_p \mathbf{u} \cdot \nabla T_a - C_p \nabla \cdot \left(\frac{\lambda}{C_p} \nabla T_a \right) \right\} T_d d\Omega + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial \Psi_{\Gamma}}{\partial T} - \right. \\ \left. p_a \frac{\partial \rho}{\partial T} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - 2 \frac{\partial \mu_{\text{eff}}}{\partial T} S(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_a + \rho C_p T_a \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \right. \\ \left. T_a \frac{\partial \rho}{\partial T} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \lambda \mathbf{n} \cdot \nabla T_a - T_a \left[2 \frac{\partial \mu_{\text{eff}}}{\partial T} S(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \right] \cdot \mathbf{n} \right\} T_d d\Gamma \end{aligned} \quad (A8)$$

若要满足正文式 (12), 可得到伴随变量控制方程

$$\frac{\partial \Psi_{\Omega}}{\partial p} - \nabla \cdot \mathbf{u}_a = 0 \quad (A9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_{\Omega}}{\partial \mathbf{u}} + \rho \nabla p_a + \rho \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_a - (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_a - \nabla \cdot [2\mu_{\text{eff}} S(\mathbf{u}_a)] + \alpha \mathbf{u}_a + \\ \rho T_a \nabla h - \rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) \nabla T_a - \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla T_a) \mathbf{u} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla T_a = 0 \end{aligned} \quad (A10)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Psi_{\Omega}}{\partial T} + \frac{\partial \rho}{\partial T} \mathbf{u} \cdot \nabla p_a + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_a \cdot \frac{\partial \rho}{\partial T} \mathbf{u} + 2 \frac{\partial \mu_{\text{eff}}}{\partial T} S(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{u}_a + \\ & \frac{\partial \rho}{\partial T} T_a \mathbf{u} \cdot \nabla h - \frac{\partial \rho}{\partial T} \mathbf{u} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) \cdot \nabla T_a + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T} C_p - \lambda \frac{\partial C_p}{\partial T} \right) \nabla h \cdot \nabla T_a + \\ & \left[2 \frac{\partial \mu_{\text{eff}}}{\partial T} S(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \right] \cdot \nabla T_a - \rho C_p \mathbf{u} \cdot \nabla T_a - C_p \nabla \cdot \left(\frac{\lambda}{C_p} \nabla T_a \right) = 0 \end{aligned} \tag{A11}$$

以及对应的边界条件方程

$$\frac{\partial \Psi_{\Gamma}}{\partial p} + \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{A12}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Psi_{\Gamma}}{\partial \mathbf{u}} - p_a \rho \mathbf{n} + \mathbf{u}_a (\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) + \mu_{\text{eff}} \nabla \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{n} + T_a \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u} + \\ & T_a \rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{n} - T_a (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) = 0 \end{aligned} \tag{A13}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Psi_{\Gamma}}{\partial T} - p_a \frac{\partial \rho}{\partial T} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - 2 \frac{\partial \mu_{\text{eff}}}{\partial T} S(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_a + \rho C_p T_a \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \\ & T_a \frac{\partial \rho}{\partial T} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - T_a \left[2 \frac{\partial \mu_{\text{eff}}}{\partial T} S(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \right] \cdot \mathbf{n} + \lambda \mathbf{n} \cdot \nabla T_a = 0 \end{aligned} \tag{A14}$$

对于方程 (A12)~式 (A14), 本文将分别作为伴随变量 \mathbf{u}_a ,

p_a 和 T_a 的显式边界条件, 其数值随优化迭代而更新. 方程中所涉及的目标函数关于状态变量的各项偏导数表达式如表 A1 所示. 此时化简后的灵敏度表达式如下所示

$$\frac{dL}{d\gamma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} + \frac{\partial \langle \lambda, \mathbf{R} \rangle}{\partial \gamma} = \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_a d\Omega + \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma} \int_{\Omega} \frac{1}{C_p} \nabla h \cdot \nabla T_a d\Omega \tag{A15}$$

对于能量耗散约束函数的灵敏度, 其推导过程与换热目标函数灵敏度相似, 本文不予以赘述.

附表 1 目标及约束函数关于状态变量的偏导数

Table 1 Derivatives of the objectives and constraints w.r.t state variables

	$\frac{\partial \Psi_{\Gamma}}{\partial \mathbf{u}}$	$\frac{\partial \Psi_{\Gamma}}{\partial p}$	$\frac{\partial \Psi_{\Gamma}}{\partial T}$	$\frac{\partial \Psi_{\Omega}}{\partial \mathbf{u}}$	$\frac{\partial \Psi_{\Omega}}{\partial p}$	$\frac{\partial \Psi_{\Omega}}{\partial T}$
$\left(\int_{\Omega} T^n d\Omega \right)^{\frac{1}{n}}$	0	0	0	0	0	$\left(\int_{\Omega} T^n d\Omega \right)^{\frac{1}{n}-1} T^{n-1}$
$\int_{\Gamma} \left(p + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 \right) d\Gamma$	$\rho \mathbf{u}$	1	0	0	0	0