



力学学报

Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics

ISSN 0459-1879, CN 11-2062/O3

《力学学报》网络首发论文

题目：球腔内低雷诺数流体中颗粒输运研究进展
作者：孙壮，陈高峰，胡安·德·巴勃罗，蒋玺恺
网络首发日期：2024-02-20
引用格式：孙壮，陈高峰，胡安·德·巴勃罗，蒋玺恺. 球腔内低雷诺数流体中颗粒输运研究进展[J/OL]. 力学学报.
<https://link.cnki.net/urlid/11.2062.O3.20240219.1303.002>



网络首发：在编辑部工作流程中，稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定，且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式（包括网络呈现版式）排版后的稿件，可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定；学术研究成果具有创新性、科学性和先进性，符合编辑部对刊文的录用要求，不存在学术不端行为及其他侵权行为；稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准，正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性，录用定稿一经发布，不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容，只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

出版确认：纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊（光盘版）》电子杂志社有限公司签约，在《中国学术期刊（网络版）》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版，以单篇或整期出版形式，在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊（网络版）》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物（ISSN 2096-4188，CN 11-6037/Z），所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

球腔内低雷诺数流体中颗粒输运研究进展¹⁾

孙壮^{**} 陈高峰^{**} 胡安·德·巴勃罗^{****} 蒋玺恺^{**、2)}

^{*} (中国科学院力学研究所, 非线性力学国家重点实验室, 北京 100190)

⁺ (中国科学院大学, 工程科学学院, 北京 100190)

^{**} (芝加哥大学, 普利兹克分子工程学院, 美国芝加哥 60637)

^{****} (阿贡国家实验室, 材料科学部, 美国莱蒙特 60439)

摘要 受限环境下低雷诺数流体中的颗粒输运与生物、医药、化工、能源等应用密切相关。近年来, 球腔内低雷诺数流体中的颗粒输运引起了广泛关注, 它在细胞内生命活动和微流控封装技术中发挥着关键作用。为了掌握颗粒输运规律、揭示微观力学机理, 各国学者进行了广泛的理论、数值和实验研究, 取得了一系列成果。在这篇文章中, 我们将梳理当前的研究进展, 分别从理论模型、数值模拟和实验研究三方面, 介绍关于球腔内低雷诺数流体中颗粒输运的重要工作。理论模型方面, 主要工作包括刚性无滑移壁面、边界滑移、可变形壁面等情况下单个及多个颗粒输运的研究; 数值模拟方面, 重要工作包括模拟不同形状颗粒在静止与旋转球腔内的输运, 研究颗粒的水动力迁移率与运动轨迹; 实验研究方面, 相关工作包含水液滴内颗粒三维轨迹、扩散系数的观测, 以及利用球腔内颗粒布朗运动来计算受限环境性质的相关研究。通过总结相关成果, 这篇综述旨在为微纳尺度流动与颗粒输运领域的专家学者提供参考。

关键词 低雷诺数流体, 颗粒输运, 限域效应

文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-21-345

PARTICULATE TRANSPORT IN THE LOW-REYNOLDS-NUMBER FLUID CONFINED IN A SPHERICAL CAVITY¹⁾

Sun Zhuang^{**} Chen Gaofeng^{**} de Pablo Juan J.^{****} Jiang Xikai^{**、2)}

^{*} (State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

⁺ (School of Engineering Science, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

^{**} (Pritzker School of Molecular Engineering, University of Chicago, Chicago, Illinois 60637, USA)

^{****} (Materials Science Division, Argonne National Laboratory, Lemont, Illinois 60439, USA)

1) 中国科学院国际合作局对外合作重点项目资助, 项目编号 025GJHZ2022023MI.

2) 蒋玺恺, 副研究员, 主要研究方向: 微纳尺度流体中的输运现象. E-mail: xikaij@imech.ac.cn

引用格式: 孙壮, 陈高峰, 胡安·德·巴勃罗, 蒋玺恺. 球腔内低雷诺数流体中颗粒输运研究进展. 力学学报, 2024
Sun Zhuang, Chen Gaofeng, de Pablo Juan J., Jiang Xikai. Particulate transport in the low-Reynolds-number fluid confined in a spherical cavity. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2024

Abstract Particulate transport in low-Reynolds-number fluids in confined environments play key roles in applications related to biology, medicine, chemical engineering, and energy, to name a few. Recently, much attention has been paid on particle dynamics in low-Reynolds-number fluids under spherical confinement, owing to its importance in life processes in living cells and technologies related to microfluidic encapsulation and droplet-based microreactors. To understand fundamental principles and microscopic mechanisms behind the particulate transport processes, scholars and researchers around the world have undertaken extensive and comprehensive investigations from theoretical, numerical, and experimental approaches. These efforts have led to the significant advancements in our understanding of particle transport in confined low-Reynolds-number fluids. Despite these efforts, a review article describing the current state of research progress in this area remains absent. In this article, we will summarize relevant progress and achievements obtained by using theoretical, numerical, and experimental methods. In theoretical studies, scholars mainly investigated confined particle dynamics in the spherical cavity with no-slip and slip conditions on particle and cavity boundaries, and particle motion in a spherical cavity with a deformable elastic wall. In numerical studies, simulations have been conducted to investigate the behavior of particles with different shapes in both stationary and rotating spherical cavities. In experimental endeavors, researchers have employed advanced optical microscopy techniques to trace and analyze three-dimensional trajectories of colloidal particles within spherical water globules, and the particle's diffusional behaviors were quantitatively analyzed. Besides, the Brownian motion and diffusivities of particles in a spherical cavity have been used to probe the confined environment's properties. By reviewing the above work related to particulate transport in low-Reynolds-number fluids under spherical confinement from three different aspects, namely theoretical models, numerical simulations, and experimental investigations, this work could provide a reference for experts and scholars working in areas such as microfluidics, nanofluidics, and particulate transport.

Key words low-Reynolds-number fluid, particulate transport, confinement effect

引 言

低雷诺数流体中的颗粒输运在科学和工程中有广泛应用。在地球科学中,沉积物、沙丘、雨滴的形成依赖于颗粒和液滴的运动与聚集,其中水动力发挥着重要作用^[1]。在生物体内,细胞和微结构的输

运与生物功能和生命健康密切相关^[2-5]。在化工和采矿工程中,颗粒悬浮液的流动行为和特征会影响涂料的性能以及矿物的分离^[6,7]。颗粒的受限输运普遍存在于实际应用中。例如,微流控芯片被广泛用于操控和筛选颗粒,其中颗粒-壁面、颗粒-颗粒之间

的水动力相互作用对微流控芯片的性能至关重要^[8-14]。受限环境中细胞、胶囊、颗粒的迁移、碰撞、挤压与心血管疾病、过滤、药物递送技术密切相关^[15-19]。过去许多研究考虑了不同类型的受限空间,研究了颗粒在平板附近^[20,21]、两平行板之间^[22-26]、通道内的运动^[27-30]。近年来,球腔内(或广义的全受限空间内)低雷诺数流体中的颗粒输运引起了广泛关注,它是活细胞内生命活动、微液滴封装技术的基础^[31-39]。在生物细胞中,细胞质流体中的生物大分子颗粒被细胞膜包裹,它们的受限扩散和主动输运能影响细胞内的翻译、转录、信号传导、新陈代谢^[40-42]。近年来,微液滴技术被广泛应用于 DNA、蛋白质、酶等生物大分子的分析检测以及药物传递等生物医学领域。在微流控封装技术制造的液滴微反应器中,颗粒和反应物的受限输运是颗粒悬浮液稳定性和反应速率的关键^[43-45]。

对于全受限环境中颗粒和流体的输运,过去大多数实验研究的对象是生物细胞。实验研究表明,细胞质流动会促进细胞内物质输运和调控新陈代谢。Batchelor 流体力学奖获得者英国剑桥大学 Raymond E. Goldstein 教授的课题组使用磁共振测速仪,首次定量测量了单个活细胞里的细胞质流动速度,实验测量结果与理论分析结果一致^[46]。美国哈佛大学 David Weitz 教授的团队使用力谱显微镜技术,研究了细胞质中分子马达驱动的随机运动,发现了细胞内聚集体的随机力会显著促进蛋白质和细胞器的输运,而病变细胞中随机力的波动比健康细胞中的更强^[47]。扩散是细胞内最基本输运方式之一,人们使用不同的实验方法,例如单粒子追踪、荧光关联光谱、光脱色荧光恢复技术,研究了细胞质中生物大分子的扩散。研究发现,大肠杆菌中绿色荧光蛋白的扩散系数是无界水溶液中的十分之一^[48,49]。

数值模拟也被用来研究全受限低雷诺数流体中颗粒输运的特征与机理。Goldstein 教授的课题组将细胞质处理为连续介质流体,通过求解 Stokes 流动和扩散的耦合方程组,发现藻类细胞里的细胞质流动会促进内部混合以及对外界刺激的瞬态响应^[50]。上海大学胡国辉教授的团队采用二维两相流连续介质模型,模拟发现细胞质流动会诱发 P 颗粒的相变,并对颗粒局域化现象和胚胎分裂有重要影响^[51]。

为了方便研究全受限低雷诺数流体中颗粒输运的流体力学机制,人们将全受限空间简化为球形腔体,探索了单个到多个颗粒在球腔内的扩散和定向输运规律。本文将分别从理论模型、数值模拟和实验研究三个方面,陈述近些年关于球腔内低雷诺数流体中颗粒输运的研究进展,以期从事微纳尺度

流动与颗粒输运领域的专家学者提供参考。

1 理论分析

理论分析具有计算效率高、实验条件限制少等优点。以下将分为单个球形颗粒、多个球形颗粒两个小节,讨论球腔内低雷诺数流体中颗粒输运理论研究方面的进展。

1.1 单个球形颗粒

单个球形颗粒这一体系虽然相对简单,但它是研究颗粒输运的起点,相关研究结果对非球形颗粒乃至多颗粒的输运具有重要指导意义,因此各国学者对球腔内单个球形颗粒的运动进行了深入研究。1927年,瑞典物理学家 Carl Wilhelm Oseen 解析推导出了描述球腔内低雷诺数流体中球形颗粒受力平动的格林函数^[52]。1970年,英国伦敦大学学院 O'Neill 和加拿大卡尔加里大学 Majumdar 除了考虑球腔内单个球形颗粒的平动,还分析了其以恒定角速度的转动(图 1),获得了球形颗粒平动和转动时所受力和力矩的表达式^[53,54]。

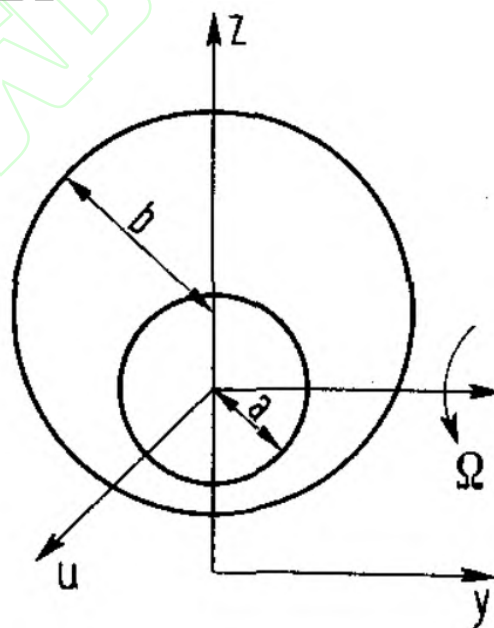


图 1 球腔内球形颗粒的几何构型, a 是颗粒半径, b 是球腔半径, u 为颗粒平动速度, Ω 为颗粒转动角速度, y 和 z 为坐标轴^[53]

Fig.1 Geometrical configuration of the spherical particle in a spherical cavity, a is particle radius, b is cavity radius, u is particle's translational velocity, Ω is particle's rotational velocity, and y/z is coordinate axis^[53]

2012年,德国亚琛工业大学 Felderhof 和法国高等理工大学 Sellier 结合 Lorentz 格式和 Oseen 张量,进一步计算了描述单个球形颗粒在球腔内运动的迁移率矩阵^[55]。颗粒在静止流体中受外力和外力

矩而产生的速度和角速度由下式给出

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \boldsymbol{\Omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}^{tt} & \boldsymbol{\mu}^{tr} \\ \boldsymbol{\mu}^{rt} & \boldsymbol{\mu}^{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{T} \end{pmatrix} \quad (1)$$

式中, \mathbf{U} 是颗粒的平动速度, $\boldsymbol{\Omega}$ 是颗粒的转动角速度, $\boldsymbol{\mu}$ 是对称的 6×6 迁移率矩阵, 它与颗粒的空间位置有关, 上标 t 代表平动, r 代表转动, \mathbf{F} 是外力, \mathbf{T} 是外力矩. 作者假定腔体壁面处的边界条件为无滑移边界条件, 当颗粒半径远小于球腔半径, 且颗粒不贴近壁面时, 获得的近似解与文献中的精确解吻合较好. 通过爱因斯坦关系, 在颗粒迁移率矩阵的基础上, 作者得到了布朗颗粒扩散张量的近似结果. 最后, 针对具有半透壁面的球腔, 利用扩散张量估计了球腔内布朗颗粒的逃逸速率.

球腔内低雷诺数流体中的单颗粒动力学研究能为理解复杂胶体悬浮液中的颗粒运输奠定基础. 为了更准确地描述球腔中颗粒-颗粒、颗粒-壁面之间的多体水动力相互作用, 美国 Roseanna N. Zia 课题组运用解析方法, 推导出了一系列水动力迁移率函数, 这些函数将颗粒运动与水动力牵引力矩相耦合. 将迁移率矩阵求逆并与近场阻力函数相结合之后, 作者获得了完整的迁移率张量, 能够准确地描述球腔内的远场和近场水动力相互作用, 并且对任意数量球形颗粒有效.

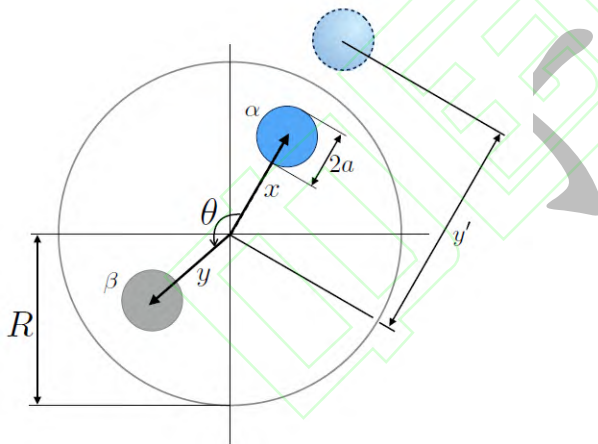
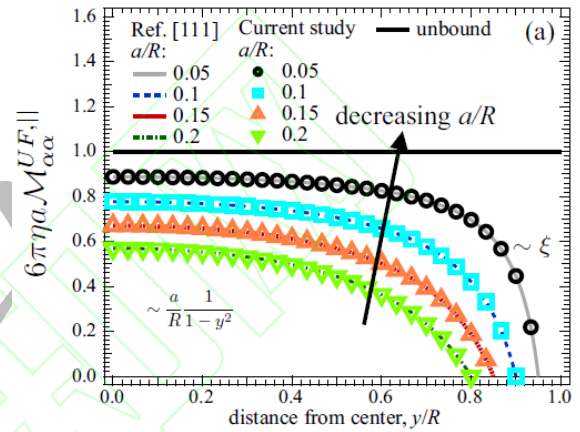


图 2 球腔内球形颗粒的系统示意图, 虚线代表解析方法中的镜像颗粒, a 为颗粒半径, R 为球腔半径, α 和 β 为颗粒编号, x (y) 为 α (β) 颗粒与球腔中心的距离, θ 为球腔内两颗粒-球腔连线之间的夹角, y' 为镜像颗粒与球腔中心的距离^[31]

Fig.2 Schematic of the model system with an image particle external to the cavity, a is particle radius, R is cavity radius, α/β is particle id, $x(y)$ is the distance between the center of $\alpha(\beta)$ particle to cavity center, θ is the angle between two particle-cavity lines of centers, and y' is the distance between image particle and cavity center^[31]

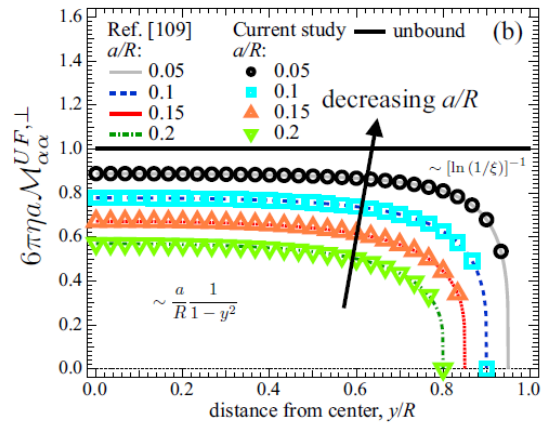
图 2 为解析解模型中球腔内球形颗粒的系统示意图 (图中球腔内的两个颗粒表示该模型也可计算

多个颗粒的运动), 外部虚线为镜像颗粒. 作者对单个颗粒在球腔中的运动进行计算, 得到颗粒的径向与切向迁移率, 并与文献中的结果进行对比 (图 3). 图 3 中空心符号为作者模型得到的结果, 实线与虚线为文献中的解析解, 黑色粗实线是无界流体中单个颗粒的结果. 从图中可以看出, 作者解析解模型的结果与文献中其他解析解的结果吻合. 在同一归一化径向位置, 迁移率随颗粒-球腔半径比的减小而增加; 切向迁移率大于径向迁移率. 当颗粒-球腔半径比固定时, 迁移率在球腔中心最大, 并随颗粒-壁面间距的减小而衰减.



(a) 归一化径向迁移率

(a) Normalized radial mobility



(b) 归一化切向迁移率

(b) Normalized transverse mobility

图 3 球腔内单个球形颗粒归一化迁移率随颗粒归一化位置的变化, a/R 为颗粒与球腔半径比, 迁移率随颗粒-壁面距离减小、受限程度增强而降低^[31]

Fig.3 Normalized mobility of a spherical particle in the spherical cavity as a function of the normalized radial distance from center, a/R is particle-to-cavity radii ratio, and the mobility decreases as particle-wall distance decreases and confinement level increases^[31]

与上述理论模型中只考虑无滑移情况不同, 中国台湾大学 Keh 和 Lee 研究了滑移条件对球形颗粒在球腔内运动的影响^[56]. 在小雷诺数的准静态极限下, 作者对具有滑移表面的球形流体或固体颗粒在球腔内粘性流体中沿颗粒-球腔连心线平动所引起的 Stokes 流动进行了半解析研究. 为了求解描述流场的 Stokes 方程, 作者将基于颗粒和球腔的两个球坐标系下的基本解叠加, 构造了一个通解. 颗粒表面和球腔壁面的边界条件通过配点法得到满足. 考虑不同的颗粒-球腔半径比、颗粒-球腔中心相对距离、颗粒相对黏度或滑移系数以及球腔壁面滑移系数, 计算得到了颗粒所受的水动力阻力. 对在球腔中心和小曲率壁面附近这两种极限情况下的球形颗粒运动, 作者关于阻力的计算结果与文献中已有的解吻合良好. 研究发现, 流体作用在颗粒上的阻力一般会随颗粒相对粘度的增加或滑移系数的降低而增大; 当颗粒-球腔半径比为 0.95 时, 阻力在一定区间内会随颗粒相对粘度的增加或滑移系数的降低而减小 (图 4).

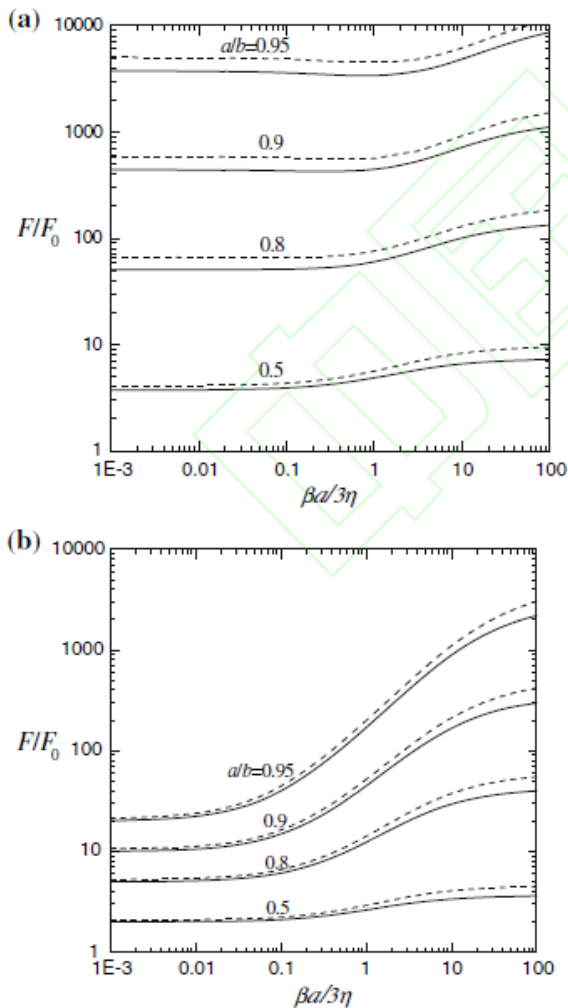


图 4 球腔内半径为 a 的球形颗粒沿径向平动时所受归一化阻力与颗粒滑移系数 β 和流体粘度 η 相关参数 $(\beta a/3\eta)$ 的变化, 阻力一

般随 $\beta a/3\eta$ 增大、受限程度增强而变大; (a) 球腔壁面无滑移, (b) 球腔壁面滑移^[56]

Fig.4 Normalized drag force on a spherical particle with radius a in the spherical cavity as a function of a parameter $(\beta a/3\eta)$ relating to particle slip coefficient β and fluid viscosity η , and the drag force generally increases as $\beta a/3\eta$ or confinement level increases; (a) no-slip condition on the cavity wall, (b) slip condition on the cavity wall^[56]

之后, Lee 和 Keh 又研究了单个球形颗粒垂直于颗粒-球腔连心线的运动^[57]. 作者考虑了不同的颗粒与壁面滑移系数、颗粒-球腔半径比、颗粒-球腔中心相对距离, 计算得到了流体作用在颗粒上的阻力与力矩. 结果表明, 当颗粒-球腔半径比、颗粒-球腔中心相对距离增加, 颗粒所受阻力增大. 当球腔壁面的滑移系数较小 (较大) 时, 旋转颗粒所受力矩一般随颗粒-腔体半径比的增加而增大 (减小). 当球腔壁面为中等滑移时, 随着颗粒-球腔半径比的增加, 力矩会先增大, 达到最大值, 然后减小. 对于给定的系统构型, 力和力矩一般会随颗粒和球腔壁面滑移系数的减小而增加; 但当流体在球腔壁面上的滑移较小 (较大), 且颗粒-球腔半径比相对较大时, 力 (力矩) 会随颗粒和球腔壁面滑移系数的减小而降低.

以上研究均假设球腔壁面为刚性, 而德国杜塞尔多夫大学 Lowen 课题组与德国拜罗伊特大学 Gekle 进一步探讨了弹性壁面对颗粒运输的影响. 该团队基于线性水动力学方程, 于 2018 年提出了描述弹性球腔内低雷诺数流体中刚性颗粒受力运动的解析理论^[58]. 研究表明, 球腔弹性壁面的剪切性质, 而不是弯曲性质, 决定了颗粒和流体的运动. 在准静态条件下, 作者发现颗粒沿径向运动时的自迁移函数要大于刚性无滑移壁面的情况. 2019 年, Lowen 团队将该理论模型拓展到处理颗粒沿任意方向运动的情况^[59]. 作者采用了经典镜像法求解此弹性水动力学问题, 他们将水动力流场表示为包含自由空间格林函数高阶导数的多极展开. 在准静态条件下, 研究证明了当颗粒沿着与球腔弹性壁面相切方向运动时, 颗粒的自迁移函数大于在相同大小刚性静止球腔内的情况.

1.2 多个球形颗粒

上小节中单个球形颗粒的研究结果为更复杂体系中的颗粒运输奠定了基础, 在实际应用中, 生物细胞和微液滴内通常包裹了多个颗粒. 为了更贴合应用, 研究人员对球腔内多个球形颗粒的定向运输和布朗扩散进行了研究. 2016 年, Zia 课题组研究了一对颗粒在球腔内的运动 (图 5). 如图 5(a) 所示,

一对颗粒受到方向相反、大小相同的力矩 L ，颗粒之间的中心距离为 d ，颗粒距离中心平面的高度为 h 。图 5 (b) 为颗粒运动方式的示意图，颗粒除了在力矩作用下绕自身转轴旋转外，还会绕着颗粒-颗粒连心线的中点旋转（白色箭头）。作者定量分析了颗粒绕连心线中点旋转的归一化角速度，结果如图 5 (c) 所示。当 d/R 恒定时，归一化角速度随 h/R 的增加先增大后减小。随着 d/R 增加，靠近中心平面的归一化角速度增大，远离中心平面的归一化角速度减小。

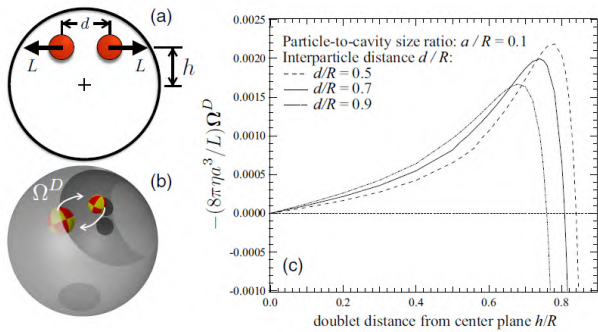
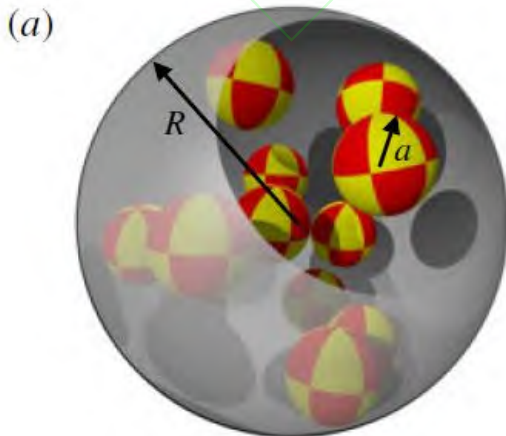


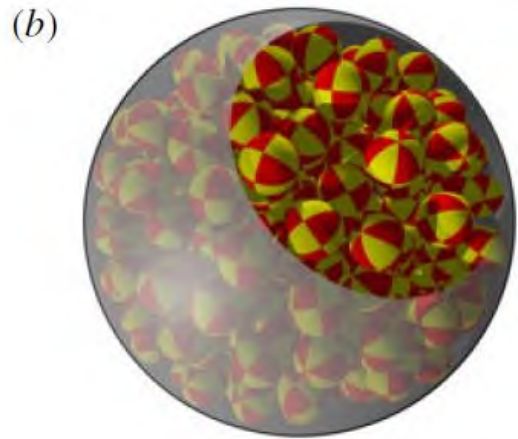
图 5 (a) 球腔内一对颗粒受力矩 L 作用的示意图；(b) 这一对颗粒绕颗粒-颗粒连心线中点旋转的示意图，旋转角速度为 Ω^D ；(c) 归一化角速度随 h/R 的变化，当 d/R 恒定时，靠近（远离）中心平面颗粒的角速度随 h/R 增加而增大（减小），当 h/R 恒定时，靠近（远离）中心平面的角速度随 d/R 增加而增大（减小）^[31]

Fig.5 (a) Schematic of a pair of spherical particles in the spherical cavity under torque L ; (b) Schematic of particle motion under the torque, and the angular velocity is Ω^D ; (c) Normalized angular velocity as a function of doublet distance from center plane h/R , for a certain d/R , the angular velocity increases (decreases) as h/R increases near (away from) the center plane, for a certain h/R , the angular velocity for particles near (away from) the center plane increases (decreases) as d/R increases^[31]



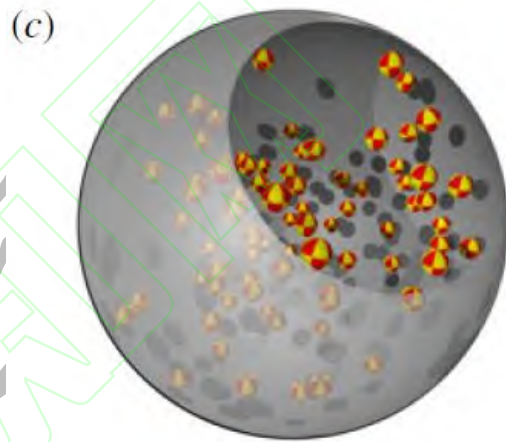
(a) 颗粒-球腔半径比为 0.2，颗粒体积分数为 0.1

(a) Particle-cavity radii ratio is 0.2, particle volume fraction is 0.1



(b) 颗粒-球腔半径比为 0.1，颗粒体积分数为 0.3

(b) Particle-cavity radii ratio is 0.1, particle volume fraction is 0.3



(c) 颗粒-球腔半径比为 0.05，颗粒体积分数为 0.05

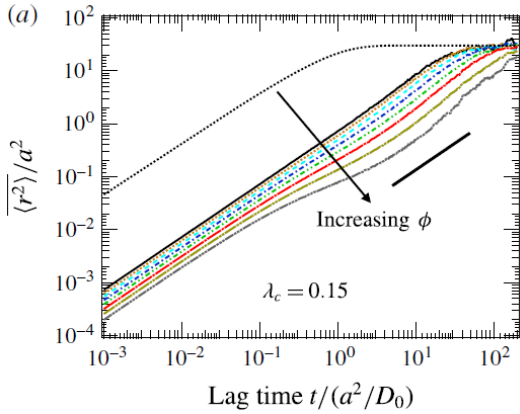
(c) Particle-cavity radii ratio is 0.05, particle volume fraction is 0.05

图 6 不同颗粒-球腔半径比以及颗粒体积分数下球腔内多个球形颗粒的模拟系统截图^[33]

Fig.6 Simulation snapshots of spherical particles confined in the spherical cavity at different particle-cavity radii ratio and particle volume fraction^[33]

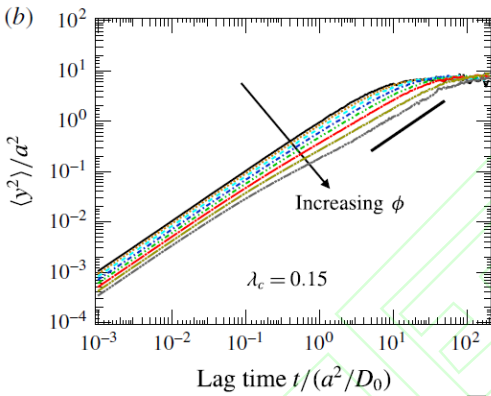
以上工作主要针对颗粒的定向输运，忽略了颗粒的布朗运动，下面的研究则分析了球腔内多个球形颗粒的布朗扩散输运和平衡态结构。2018 年，Zia 课题组使用该模型研究了不同颗粒浓度和不同颗粒-球腔半径比下，球形颗粒在球腔内低雷诺数流体中的平衡态结构、短时扩散和长时扩散^[33]。模型系统的示意图如图 6 所示。研究结果如图 7 所示，由于颗粒迁移率的各向异性和颗粒浓度的空间非均质性，颗粒的径向短时扩散系数小于切向短时扩散系数。在扩散中期，颗粒的均方位移同样表现为各向异性，并在径向和切向运动中分别呈现出超扩散和亚扩散行为。超扩散和亚扩散这两种扩散模式的出现与颗粒-球腔半径比以及颗粒浓度相关。与无界流体的情况不同，球腔内的颗粒不存在长时自由扩散状态；相反，由于有限体积的熵限制，颗粒的均方位移在

长时阶段会达到一个稳定平台. 颗粒均方位移达到稳定平台所需的时间随颗粒体积分数的增加而变长 (图 7).



(a) 归一化径向均方位移随归一化时间的变化

(a) Normalized radial mean square displacement as a function of normalized time



(b) 归一化切向均方位移随归一化时间的变化

(b) Normalized transverse mean square displacement as a function of normalized time

图 7 不同体积分数下颗粒的归一化均方位移随归一化时间的变化: 短时段, 均方位移随时间增大而变大; 长时段, 由于壁面限制, 均方位移达到恒定值^[33]

Fig.7 Normalized mean square displacement (MSD) as a function of normalized time under different particle volume fractions in the cavity: at short times, MSD increases as lag time increases; at long times, MSD reaches a plateau due to wall confinement^[33]

2021 年, Zia 课题组将理论模型扩展到考虑颗粒尺寸多分散性, 研究了尺寸多分散性对颗粒在球腔内进行平衡态扩散的影响^[36]. 图 8 (a) 为球腔中双分散颗粒悬浮液模型系统的示意图, 图 8 (b) 展示了双分散颗粒的编号规则. 研究表明, 多分散性削弱了球腔壁面附近的润滑作用, 与单分散颗粒悬浮液相比, 小(大)颗粒扩散得更快(慢). 当小(大)

颗粒远离壁面时, 多分散性削弱了多体水动力相互作用, 导致扩散率升高(降低). 作者还发现, 当颗粒体积分数较高时, 在限域效应和尺寸多分散性的共同作用下, 颗粒会沿径向产生尺寸分离.

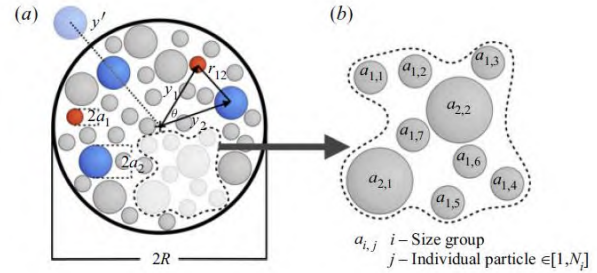


图 8 (a) 球腔中双分散颗粒悬浮液模型系统的示意图, 球腔半径为 R , 红(蓝)色颗粒半径为 a_1 (a_2), y_1 (y_2) 是红(蓝)色颗粒与球腔中心的距离, r_{12} 是红蓝两颗粒的距离, θ 是红色与蓝色颗粒与球腔中心连心线的夹角, y' 是镜像颗粒与球腔中心的距离; (b) 基于尺寸的双分散颗粒编号规则, i 为颗粒尺寸编号, j 为颗粒的单独编号^[36]

Fig.8 (a) Schematic representation of model system for a spherically confined bidisperse suspension with (b) particle labelling based on size; the cavity radius is R , the radius of red (blue) particle is a_1 (a_2), y_1 (y_2) is the distance between red (blue) particle and cavity center, r_{12} is the distance between red and blue particles, θ is the angle between particle-cavity lines of centers for red and blue particles, y' is the distance between image particle and cavity center, i is particle size group index, j is particle's individual index^[36]

2 数值模拟

上述理论研究对球腔内颗粒输运具有重要指导意义, 而理论解通常在颗粒和壁面几何形状相对简单时才能获得. 数值模拟能较为灵活地处理任意几何形状的系统, 下面将分为单个颗粒、多个颗粒两个小节, 介绍球腔内低雷诺数流体中颗粒输运数值模拟研究方面的工作.

2.1 单个颗粒

法国高等理工大学 Sellier 使用两种不同的边界元方法, 计算了悬浮在球腔内低雷诺数流体中的任意形状固体颗粒在外力驱动下的迁移^[60]. 第一种方法将无界自由空间的斯托克斯点 (Stokeslet) 分配到球腔壁面和颗粒表面上, 该方法并不局限于处理球腔, 而是能够处理任意形状的腔体和颗粒; 但当腔体尺寸较大时, 此方法需要非常多的斯托克斯点以保证计算精度. 第二种方法将 1927 年 Oseen 得到的仅适用于球腔系统的斯托克斯点分配到颗粒表面, 此方法无需将球腔壁面进行网格划分, 只需要将颗粒表面离散化; 当腔体尺寸较大时, 此方法

在合理计算时间内仍能给出较为精确的结果。作者使用两种方法，得到了相应的数值解，且都与文献中球形颗粒的精确解吻合良好。作者使用第二种方法在合理的 CPU 时间内精确计算了球形与椭球颗粒在球腔内运动所受的阻力和力矩。计算结果表明，球腔内颗粒的沉降与外力、颗粒形状以及颗粒在球腔内的位置密切相关。

以上工作只考虑了颗粒在球腔内少数几个位置的运动，为研究不同形状的颗粒在整个球腔中的输运，中国科学院力学研究所 Chen 和 Jiang 于 2023 年用数值方法研究了球腔内低雷诺数流体中的单颗粒动力学特征^[39]。分析了静止腔体中颗粒的水动力迁移率，获得了圆球与椭球的径向与横向迁移率，发现迁移率在球腔中心最大，并随颗粒-壁面径向距离的减小而降低。由于形状各向异性，椭球的迁移率会随颗粒旋转轴与颗粒-腔体连心线的夹角（颗粒姿态角）而变化。

当外力与颗粒-腔体连心线的夹角不为 0 或 90 度时，颗粒会沿垂直于外力方向进行漂移运动。揭示了受限诱导的迁移率张量各向异性是导致漂移的原因。在腔体的对称面上，圆球漂移速度为中心对称分布，如图 9 (a) 所示。图 9 (b) 的结果表明，当颗粒靠近腔体壁面（中心）时，漂移速度会随颗粒径向位置的增加而降低（升高）；颗粒-腔体尺寸比越大，归一化漂移速度越大。除了受限程度和位置，椭球漂移速度还与颗粒姿态角呈正弦函数关系。

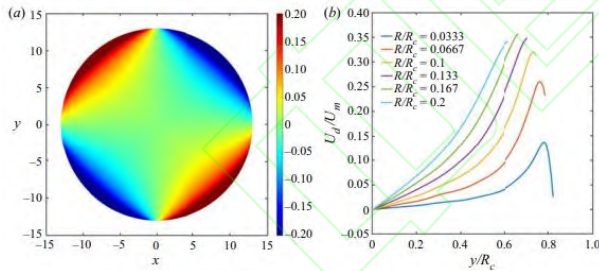


图 9 (a) 球腔对称面内球形颗粒漂移速度呈中心对称分布；(b) 不同受限程度下颗粒的归一化漂移速度随空间位置的变化，靠近球腔中心（壁面）的漂移速度随 y/R_c 增加而增大（减小），同一位置的漂移速度随受限程度增强而增大^[39]

Fig.9 (a) Spatial distribution of drift velocity of a spherical particle in a symmetry plane of the spherical cavity shows diagonal symmetry; (b) Normalized drift velocity of the particle as a function of particle location under different confinement levels, drift velocity increases (decreases) as y/R_c increases near cavity center (wall), and drift velocity at a certain position increases as confinement level increases^[39]

当液滴、细胞随流体运动时，它们通常会有平动和转动两种运动模式，而转动会使腔体内部产生旋转流。研究发现，当颗粒-流体密度差小于（大于）

0 时，旋转流中的颗粒受向心（离心）力作用。图 10 的结果表明，在任一位置释放颗粒，受向心力作用的颗粒会运动到同一驻点；受离心力作用的颗粒会进入球腔对称面内的稳定轨道。此发现为微液滴内颗粒的组装、分离与汇聚提供了新思路。

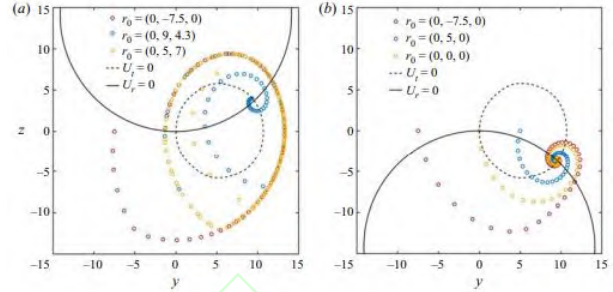


图 10 (a) 腔内旋转流中受离心力颗粒的轨迹，任一位置释放的颗粒都会运动到同一稳定轨道；(b) 腔内旋转流中受向心力颗粒的轨迹，任一位置释放的颗粒都会运动到同一驻点^[39]

Fig.10 (a) Trajectories of particles under centrifugal forces in the rotating flow in the cavity, and particle released from any position will eventually moves into the same orbit; (b) Trajectories of particles under centripetal forces in the rotating flow in the cavity, and particle released at any position will eventually arrives at the same stagnation point^[39]

对于非球形颗粒，旋转流会使颗粒上产生旋转诱导力矩。作者通过数学推导获得了一般椭球颗粒所受此力矩的解析表达式。在旋转诱导力矩作用下，长球和扁球的姿态角存在不同的亚稳态和稳态。这些状态与 2008 年美国加州理工学院 John F. Brady 团队发现的胶体悬浮液中椭球颗粒的状态相似，但其中的力学机理不同。

2.2 多个颗粒

相比单颗粒，多颗粒模拟的计算量较大，人们使用一系列颗粒动力学方法，结合加速算法与并行计算，研究了球腔内多个颗粒的输运。2015 年，美国佐治亚理工学院 Skolnick 课题组采用布朗动力学和斯托克动力学模拟，研究了球腔内低雷诺数流体中颗粒的运动^[61]。他们将细胞质中的生物大分子模拟为球腔内粘性流体中的颗粒，而细胞膜则由紧密间隔的固定壁面颗粒构成，模拟系统如图 11 所示。模拟系统中，颗粒的体积分数为 0.3，它对应于生物细胞内的拥挤环境。作者观察到壁面附近的颗粒分层现象，它是由受限空间中的空间位阻相互作用造成的。壁面附近颗粒的运动与壁面有很强的相关性；如果考虑颗粒-壁面的水动力相互作用，这种相关性还会增强。研究还发现靠近壁面的颗粒有维持靠近壁面的倾向，该结果的生物学意义是，细胞内生物大分子之间的平均接触时间在细胞壁附近比在细胞

内部更长. 这项工作采用了无界流体的颗粒动力学算法, 将壁面离散为一系列颗粒, 壁面的流动边界条件未能得到有效的控制, 因而流体很容易穿过壁面, 导致壁面附近出现非物理流动; 另外, 作者没有考虑非球形颗粒的情况.

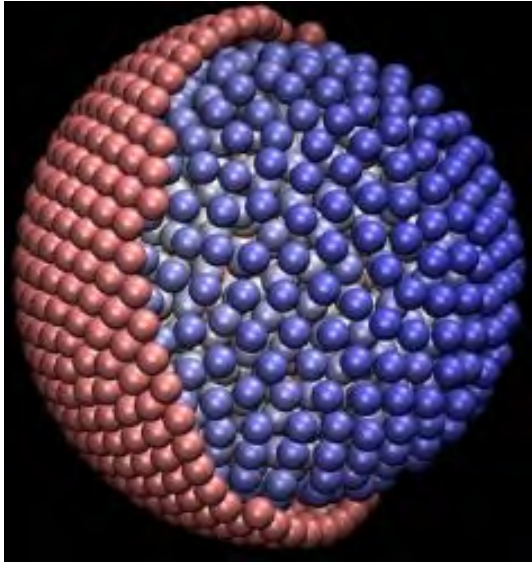


图 11 简化生物细胞模型, 红色颗粒用于模拟细胞壁, 蓝色颗粒用于模拟细胞内生物大分子^[61]

Fig.11 A snapshot of the simulation system for a model biological cell, red particles represent the cell wall, and blue particles represent biomolecules^[61]

为了分析不同形状颗粒的输运, 并较好地处理壁面的流动边界条件, 美国芝加哥大学 de Pablo 团队在 2020 年研究了多个球形颗粒和圆柱形颗粒在封闭球腔内的结构和布朗运动^[35]. 作者采用了一般几何类 Ewald (General Geometry Ewald-like) 方法来高效模拟颗粒-颗粒、颗粒-壁面之间的水动力相互作用, 球腔壁面为无滑移边界条件; 运用了切比雪夫多项式近似来计算颗粒的布朗运动, 使其满足涨落耗散定理. 该工作探讨了短程润滑力、长程水动力相互作用、颗粒体积分数、颗粒形状对颗粒的平衡态结构和扩散的影响. 研究发现, 当颗粒体积分数大于 10% 时, 颗粒开始形成层状聚集, 它使颗粒的短时扩散系数出现显著的空间依赖性. 当颗粒体积分数较小时, 球腔内部圆柱形颗粒的取向为随机分布; 随着颗粒体积分数的升高, 球腔内部圆柱形颗粒的取向逐渐从无序变为有序 (图 12).

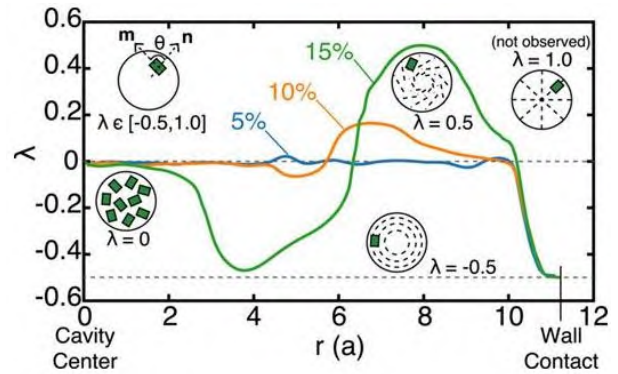


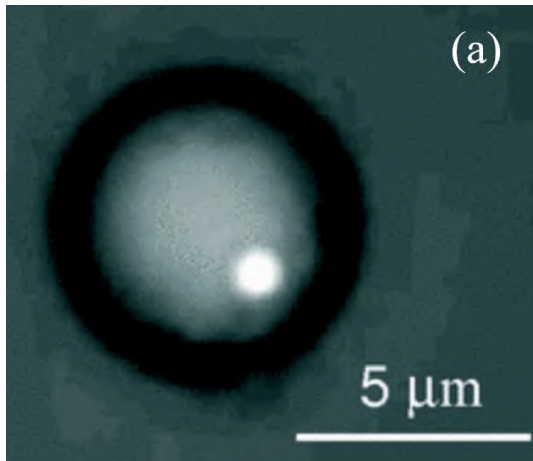
图 12 不同体积分数下球腔内圆柱形颗粒的方向序参数随径向位置的变化, 随着颗粒体积分数升高, 颗粒取向从无序变为有序^[35]

Fig.12 Distribution of the orientational order parameter of cylindrical particles in the spherical cavity under different particle volume fractions, and particle orientation moves from a random state to an ordered state as volume fraction increases^[35]

为进一步探索颗粒形状对球腔内低雷诺数流体中颗粒结构和扩散的影响, de Pablo 团队将圆柱形颗粒和球形颗粒混合, 通过改变总颗粒的体积分数以及圆柱形/球形颗粒的占比, 计算和对比了不同情况下的结果^[62]. 研究发现, 在球形颗粒中引入具有简单各向异性的圆柱体颗粒, 对颗粒的结构和动力学有明显的影 响. 增加圆柱体颗粒的占比会引起颗粒空间分布的变化, 其中球形颗粒被推向壁面, 而圆柱形颗粒则保持在球腔中心附近. 这种分离导致球形颗粒的扩散率低于其在等体积分数下纯球形颗粒系统中的扩散率.

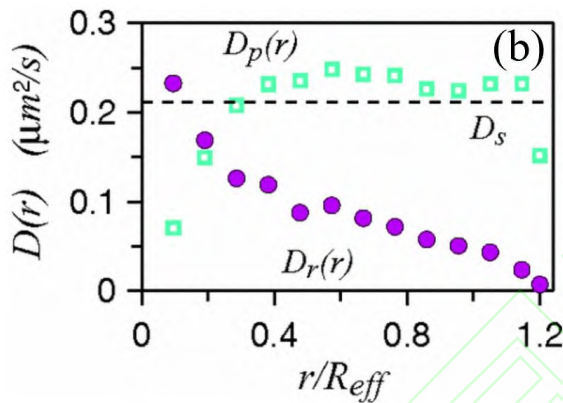
3 实验研究

实验观测能发现实际系统中颗粒输运的新现象和新规律, 也能确认和验证理论分析与数值模拟的结果. 目前, 研究全受限于低雷诺数流体中颗粒运输的一部分实验是在生物细胞内完成的. 然而生物细胞通常不是规则球形, 细胞内诸如细胞器、肌动蛋白微丝、细胞骨架、细胞核等结构十分复杂, 难以定量研究水动力相互作用和限域效应如何影响颗粒输运. 另一部分实验与微液滴技术密切相关, 这些实验目前大多是应用性研究, 它们主要关注如何在微液滴中更高效地实现特定生物化学功能, 对颗粒输运进行了定性分析, 而有关颗粒运动规律的定量研究相对较少. 以下将介绍球腔内颗粒输运定量实验研究方面的进展.



(a) 光学显微镜拍摄的含颗粒（白色）水球（黑色圆圈）

(a) Transmitted light optical microscope image of a water globule (dark circle) containing a spherical particle (white)



(b) 颗粒径向扩散系数 D_r 和切向扩散系数 D_p 随归一化径向位置的变化: D_r 随径向位置增加而减小, D_p 在球腔中心 (壁面) 附近随径向位置增加而增大 (减小)

(b) Particle's radial diffusivity D_r and transverse diffusivity D_p as a function of normalized radial position: D_r decreases as radial position increases, and D_p increases (decreases) near cavity center (wall) as radial position increases

图 13 水球中颗粒布朗运动的实验研究^[63]

Fig.13 Experimental study of a particle's Brownian motion in a water globule^[63]

墨西哥圣路易斯波托西自治大学 Arauz-Lara 团队定量研究了球腔内低雷诺数流体中的颗粒输运。该团队将单个球形颗粒放置在水球中, 通过光学显微镜观测了颗粒的布朗运动^[63]。如图 13 (a) 所示, 该实验所用水球的大小与一般生物细胞的大小在同一量级, 水球中颗粒的运动与一些生物大分子在细胞内的运动非常相似。该研究对整个球腔进行采样, 跟踪了颗粒的三维运动轨迹。研究发现, 由于颗粒与球腔壁面之间存在水动力相互作用, 颗粒的短时扩散系数与颗粒-壁面之间的距离密切相关, 且局部扩散系数的径向和切向分量并不相等, 颗粒沿切向方向扩散地更快, 见图 13 (b)。作者还发现, 颗粒

运动的快慢不仅与球腔大小有关, 也取决于颗粒在球腔中的空间位置。这项工作的实验结果对认识细胞和微液滴内大分子的运动有很好的启示作用。对于液滴中大量颗粒以及非球形颗粒的情况, 由于观测过程中可能出现的颗粒重叠、非球形颗粒姿态角不断变化等因素的影响, 实验观测较为困难, 目前未发现相关定量实验研究的报道。

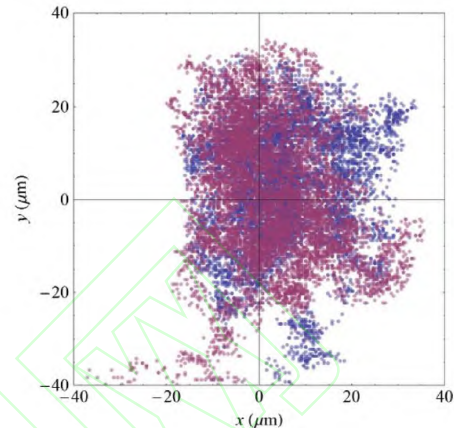


图 14 用反射暗场显微镜观测到的水液滴中两个颗粒的位置, 如红点和蓝点所示, 颗粒位置信息用于计算表征颗粒间双电层相互作用的德拜屏蔽长度^[64]

Fig. 14 Observed positions of two particles by reflected dark-field microscopy, as shown by red and blue dots, and these positions were used to compute Debye screening length for electric double layer interaction between particles^[64]

除了仅观测颗粒的扩散输运, 研究人员还利用颗粒的布朗扩散推测颗粒所处限域环境的性质。2017 年, 日本兵库县立大学 Inui 团队通过实验观测了两个悬浮在液滴底部颗粒的布朗运动, 并研究了两颗粒间的双电层相互作用^[64]。作者将颗粒间的平均距离表示为德拜屏蔽长度的函数, 利用水液滴中两个金颗粒的布朗运动轨迹来计算德拜屏蔽长度。实验中, 金颗粒的半径为 0.3 微米, 水液滴的半径为 2 毫米。作者采用光学显微镜测量了颗粒在布朗运动过程中的位置, 如图 14 中红点和蓝点所示, 数据采集时间为 2.5 小时, 时间间隔为 1 秒。基于颗粒位置的数据, 计算了颗粒间的平均距离, 从而估算出了德拜屏蔽长度, 得到的结果与理论结果一致。

颗粒的布朗运动还被用于测量囊泡的力学性质, 墨西哥国家理工学院 Carbajal-Tinoco 团队在 2020 年提出了一种使用胶体颗粒的布朗运动测定巨脂质体面积拉伸模量的方法^[65]。首先利用显微镜焦平面下的荧光球所产生的衍射图, 确定囊泡内颗粒的空间位置, 重构颗粒的运动轨迹。然后基于颗粒布朗运动引起膜弹性变形的现象以及经典弹性力学理论, 计算脂质膜的面积拉伸模量。实验中, 囊泡半径大

于 15 微米，胶体颗粒的半径约为 0.25 微米，作者观测了囊泡内颗粒在脂质双分子层附近的扩散。图 15 中，直方图显示了观测时间为 4 s 时脂质膜附近胶体颗粒 (CPr) 的概率密度函数，FPa 为自由颗粒的概率密度函数，垂直线 Ves 代表囊泡的平均半径。图 15 的插图展示了颗粒均方位移随时间的变化，BPa 为无界流体中颗粒自由扩散的情况，CPr 为囊泡内胶体颗粒扩散的情况，SW 为根据 $D_s t$ 拟合的曲线，其中 D_s 是短时自扩散系数。从图 15 中可以看到，脂质膜附近的胶体颗粒呈现出反常扩散，结合颗粒反常扩散和膜的连续介质力学理论，作者测得了脂质膜的面积拉伸模量，测量结果与其他广泛接受的实验结果一致。

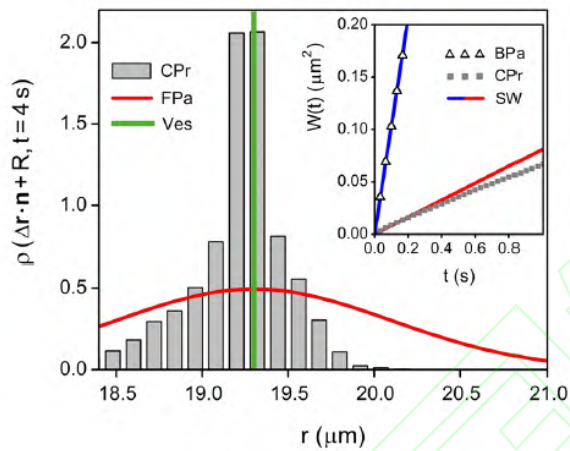


图15 二油酰基卵磷脂囊泡内脂质膜附近胶体颗粒 (CPr) 布朗扩散过程中的概率密度函数随径向位置的变化，红线 (FPa) 为自由颗粒的概率密度函数，绿色竖线 (Ves) 为囊泡平均半径；插图为颗粒均方位移随时间的变化，BPa代表无界流体中的颗粒扩散，

SW为基于短时线性扩散的拟合曲线^[65]

Fig. 15 Probability density function as a function of radial position for Brownian diffusion of a colloidal probe (CPr) near the lipid membrane of a 1,2-Dioleoyl-sn-glycero-3-phosphocholine vesicle, red line denotes the free particle, vertical green line (Ves) is average radius of vesicles; the inset shows mean square displacement as a function of time, BPa denotes particle diffusion in bulk, SW is the fitting curve based on short-time linear diffusion^[65]

4 结论

球腔内低雷诺数流体中的颗粒输运在生命、医药、化工等领域有广泛的应用。近百年来，各国学者使用理论、数值和实验方法，观测到了多种颗粒输运现象，阐明了其背后的力学机理。这些工作分别针对滑移与无滑移、刚性与可变形壁面，单颗粒与

多颗粒系统，不同颗粒-球腔尺寸比、颗粒形状等情况，进行了系统而深入的研究，取得了一系列成果。

这些研究结果为后续探索全受限环境中更复杂的颗粒输运奠定了基础，也有助于揭示细胞内的物质输运规律、为微流控封装和微液滴反应器等技术提供理论支撑。目前，精确操控细胞、微液滴等全受限复杂环境中的颗粒输运仍十分困难，微液滴技术中如何精准调控生物化学反应也极具挑战性。为解决这些问题，未来仍需对全受限低雷诺数流体中的颗粒输运进行研究，紧密结合工程应用，促进相关领域学术与技术的共同发展。进一步研究内容包括：

(1) 对应生物细胞内物质运输的应用场景，考虑细胞核、细胞器、细胞骨架等微观结构以及壁面弹性，发展新的实验观测和数值模拟方法，研究全受限复杂空间内的颗粒扩散与定向输运机理。

(2) 在理论分析和数值模拟中，根据实际应用需求，除了水动力学相互作用，添加力-电-化多场耦合，研究外加电场、表面电荷密度、离子浓度场等因素对颗粒输运的影响。

(3) 针对可变形以及活性颗粒，发展实验观测、理论分析和数值模拟方法，研究颗粒输运随颗粒表面弹性、活性颗粒运动速度、定向输运与布朗扩散之间的竞争关系而变化的力学机制。

参考文献

- Happel J, Brenner H. Low Reynolds number hydrodynamics: with special applications to particulate media. The Hague: Martinus Nijhoff Publishers. 1983.
- Shang XL, Luo ZY, Bai BF et al. A front-tracking method for simulating interfacial flows with particles and soluble surfactants. *Journal of Computational Physics*, 2023, 493:112476.
- Richter SK, Menzel AM. Mediated interactions between rigid inclusions in two-dimensional elastic or fluid films. *Physical Review E*, 2022, 105(1): 014609.
- Ziegler S, Smith AS. Hydrodynamic particle interactions in linear and radial viscosity gradients. *Journal of Fluid Mechanics*, 2022, 943:A29.
- Shen ZY, Lintuvuori JS. Collective flows drive cavitation in spinner monolayers. *Physical Review Letters*, 2023, 130(18):188202.
- Cox RG, Mason SG. Suspended particles in fluid flow through tubes. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1971, 3(1): 291-316.
- Kim S. Singularity solutions for ellipsoids in low-Reynolds-number flows: with applications to the calculation of hydrodynamic interactions in suspensions of ellipsoids. *International Journal of Multiphase Flow*, 1986, 12(3): 469-491.
- Qi XJ, Ma SH, Jiang XC et al. Single-cell characterization of deformation and dynamics of mesenchymal stem cells in microfluidic systems: A

computational study. *Physical Review E*, 2023, 108(5):054402.

9 Ma SH, Wang S, Qi XJ et al. Multiscale computational framework for predicting viscoelasticity of red blood cells in aging and mechanical fatigue. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2022, 391:114535.

10 Kabacaoğlu G, Biros G. Sorting same-size red blood cells in deep deterministic lateral displacement devices. *Journal of Fluid Mechanics*, 2017, 859: 433-475.

11 高贤,于成壮,魏春阳,等. 惯性微流体的应用与发展. 传感器与微系统, 2019, 38(3): 1-6+10. (Gao Xian, Yu Chengzhuang, Wei Chunyang et al. Application and development of inertial microfluids. *Transducer and Microsystems Technologies*, 2019, 38(3): 1-6+10 (in Chinese))

12 范亮亮,田壮壮,赵亮. 基于变截面微通道的黏弹性流体内颗粒高效分离研究. 工程热物理学报, 2021, 42(9):2316-2320. (Fan Liangliang, Tian Zhuangzhuang, Zhao Liang. Efficient separation of microparticles in viscoelastic fluid via microchannel with variable cross section. *Journal of Engineering Thermophysics*, 2021, 42(9):2316-2320. (in Chinese))

13 王生庚,易夕圆,王振宇,等. 利用体声波微流阱阵列捕获微米级颗粒. 声学学报, 2021, 46(3):440-446 (Wang Shengeng, Yi Xiyuan, Wang Zhenyu et al. Bulk acoustic wave microstreaming trap array for capturing micron particle. *Acta Acustica*, 2021, 46(3):440-446 (in Chinese))

14 李琛,袁牧,许庆铎,等. 超声空化对细微流道中固体颗粒的运动特性研究. 机械工程学报, 2022, 58(23):218-226 (Li Chen, Yuan Mu, Xu Qingduo et al. Study on the motion characteristics of solid particles in fine flow channel by ultrasonic cavitation. *Journal of Mechanical Engineering*, 2022, 58(23):218-226 (in Chinese))

15 Su JH, Zheng X, Hu GQ. New explicit formula for inertial lift in confined flows. *Physics of Fluids*, 2023, 35(9):092010.

16 Xue CD, Huang YR, Zheng X et al. Hopping behavior mediates the anomalous confined diffusion of nanoparticles in porous hydrogels. *Journal of Physical Chemistry Letters*, 2022, 13(45):10612-10620.

17 Antolik JT, Howard A, Vereda F et al. Hydrodynamic irreversibility of non-Brownian suspensions in highly confined duct flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 2023, 974:A11.

18 Guan MY, Jiang WQ, Wang BH et al. Pre-asymptotic dispersion of active particles through a vertical pipe: the origin of hydrodynamic focusing. *Journal of Fluid Mechanics*, 2023, 962:A14.

19 Traverso T, Michelin S. Collective dynamics and rheology of confined phoretic suspensions. *Journal of Fluid Mechanics*, 2022, 943:A21.

20 Xu HL, Zheng X, Shi XH. Surface hydrophilicity-mediated migration of nano/microparticles under temperature gradient in a confined space. *Journal of Colloid and Interface Science*, 2023, 637:489-499.

21 Procopio G, Giona M. Stochastic modeling of particle transport in confined geometries: problems and peculiarities. *Fluids*, 2022, 7(3):105.

22 Staben ME, Zinchenko AZ, Davis RH. Motion of a particle between two parallel plane walls in low-Reynolds-number Poiseuille flow. *Physics of*

Fluids, 2003, 15:1711-1733.

23 Staben ME, Zinchenko AZ, Davis RH. Dynamic simulation of spheroid motion between two parallel plane walls in low-Reynolds-number Poiseuille flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 2006, 553:187-226.

24 Griggs AJ, Zinchenko AZ, Davis RH. Low-Reynolds-number motion of a deformable drop between two parallel plane walls. *International Journal of Multiphase Flow*, 2007, 33(2):182-206.

25 Swan JW, Brady JF. Particle motion between parallel walls: Hydrodynamics and simulation. *Physics of Fluids*, 2010, 22(10):103301.

26 Pasol L, Martin M, Ekiel-Jezewska ML et al. Motion of a sphere parallel to plane walls in a Poiseuille flow. Application to field-flow fractionation and hydrodynamic chromatography. *Chemical Engineering Science*, 2011, 66(18):4078-4089.

27 Alba K. Colloidal exchange flow in ducts. *Journal of Fluid Mechanics*, 2022, 942:A9.

28 Zheng ZY, Xu XL, Wang YR et al. Hydrodynamic couplings of colloidal ellipsoids diffusing in channels. *Journal of Fluid Mechanics*, 2022, 933:A40.

29 Valani RN, Harding B, Stokes YM. Utilizing bifurcations to separate particles in spiral inertial microfluidics. *Physics of Fluids*, 2023, 35(1): 011703.

30 Zhu ZP, Zhou MM, Song XZ et al. Settling behavior of spherical particles in vertical annulus: experimental study and model development. *Particuology*. 2022, 68:114-123.

31 Aponte-Rivera C, Zia RN. Simulation of hydrodynamically interacting particles confined by a spherical cavity. *Physical Review Fluids*. 2016, 1(2):023301.

32 Ando T, J. Skolnick. On the importance of hydrodynamic interactions in lipid membrane formation. *Biophysical Journal*, 2013, 104(1):96-105.

33 Aponte-Rivera C, Su Y, Zia RN. Equilibrium structure and diffusion in concentrated hydrodynamically interacting suspensions confined by a spherical cavity. *Journal of Fluid Mechanics*, 2017, 836:413-450.

34 Maheshwari AJ, Sunol AM, Gonzalez E et al. Colloidal hydrodynamics of biological cells: A frontier spanning two fields. *Physical Review Fluids*, 2019, 4(11):110506.

35 Li J, Jiang X, Singh A, et al. Structure and dynamics of hydrodynamically interacting finite-size Brownian particles in a spherical cavity: spheres and cylinders. *Journal of Chemical Physics*, 2020, 152(20):204109.

36 Gonzalez E, Aponte-Rivera C, Zia RN. Impact of polydispersity and confinement on diffusion in hydrodynamically interacting colloidal suspensions. *Journal of Fluid Mechanics*, 2021, 925:A35.

37 Chen G, Jiang X. Motion of a sphere and the suspending low-Reynolds-number fluid confined in a cubic cavity. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, 2022, 12(4):100352.

38 张志炳,李亚栋,张锁江等. 纳微尺度流体传质与反应特性探索. 中

- 国科学:化学, 2023, 53:1-18 (Zhang Zhibing, Li Yadong, Zhang Suojian et al. Mass transfer and chemical properties of nano-micron fluids. *Scientia Sinica Chimica*, 2023, 53:1-18 (in Chinese))
- 39 Chen G, Jiang X. Single-particle dynamics in a low-Reynolds-number fluid under spherical confinement. *Journal of Fluid Mechanics*, 2023, 969:A15
- 40 Xiang L, Chen K, Yan R et al. Single-molecule displacement mapping unveils nanoscale heterogeneities in intracellular diffusivity. *Nature Methods*, 2020, 17:524-530.
- 41 Khoo JH, Miller H, Armitage JP. Measurement of macromolecular crowding in rhodospirillum rubrum sphaeroides under different growth conditions. *mBio*, 2022, 13(1):e0367221.
- 42 Singh P. Extreme value statistics and arcsine laws for heterogeneous diffusion processes. *Physical Review E*, 2021, 105(2):024113.
- 43 Shang L, Cheng Y, Zhao Y. Emerging droplet microfluidics. *Chemical Reviews*, 2017, 117(12):7964-8040.
- 44 Liu L, Xiang N, Ni Z. Droplet-based microreactor for the production of micro/nano-materials. *Electrophoresis*, 2019, 41(10-11):833-851.
- 45 Kim S, Wang H, Yan L et al. Continuous preparation of itraconazole nanoparticles using droplet-based microreactor. *Chemical Engineering Journal*, 2020, 393:124721.
- 46 van de Meent J, Sederman AJ, Gladden L et al. Measurement of cytoplasmic streaming in single plant cells by magnetic resonance velocimetry. *Journal of Fluid Mechanics*, 2010, 642:5-14.
- 47 Guo M, Ehrlicher AJ, Jensen MH et al. Probing the stochastic, motor-driven properties of the cytoplasm using force spectrum microscopy. *Cell*, 2014, 158(4):822-832.
- 48 Elowitz MB, Surette MG, Wolf PE, et al. Protein mobility in the cytoplasm of *Escherichia coli*. *Journal of Bacteriology*, 1999, 181(1):197-203.
- 49 Konopka MC, Shkel IA, Cayley S et al. Crowding and confinement effects on protein diffusion in vivo. *Journal of Bacteriology*, 2006, 188(17): 6115-6123.
- 50 Goldstein RE, Tuval I, van de Meent J. Microfluidics of cytoplasmic streaming and its implications for intracellular transport. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2008, 105(10):3663-3667.
- 51 Wang H, Hu G. P granules phase transition induced by cytoplasmic streaming in *Caenorhabditis elegans* embryo. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, 2016, 60:1-7.
- 52 Oseen CW. Neuere methoden und ergebnisse in der hydrodynamic, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 1927, 35:A67-A68.
- 53 O'Neill ME, Majumdar SR. Asymmetrical slow viscous fluid motions caused by the translation or rotation of two spheres. Part I: The determination of exact solutions for any values of the ratio of radii and separation parameters. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 1970, 21:164-179.
- 54 O'Neill ME, Majumdar SR. Asymmetrical slow viscous fluid motions caused by the translation or rotation of two spheres. Part II: Asymptotic forms of the solutions when the minimum clearance between the spheres approaches zero. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 1970, 21:180-187.
- 55 Felderhof BU, Sellier A. Mobility matrix of a spherical particle translating and rotating in a viscous fluid confined in a spherical cell, and the rate of escape from the cell. *Journal of Chemical Physics*, 2012, 136(5):054703.
- 56 Keh HJ, Lee TC. Axisymmetric creeping motion of a slip spherical particle in a nonconcentric spherical cavity. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 2012, 24(5):497-510.
- 57 Lee TC, Keh HJ. Slow motion of a spherical particle in a spherical cavity with slip surfaces. *International Journal of Engineering Science*, 2013, 69:1-15.
- 58 Daddi-Moussa-Ider A, Lowen H, Gekle S. Creeping motion of a solid particle inside a spherical elastic cavity. *The European Physical Journal E*, 2018, 41:104.
- 59 Hoell C, Lowen H, Menzel AM et al. Creeping motion of a solid particle inside a spherical elastic cavity: II. Asymmetric motion. *The European Physical Journal E*, 2019, 42(7):89.
- 60 Sellier A. Slow viscous motion of a solid particle in a spherical cavity. *Cmes-computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2008, 25(3):165-180.
- 61 Chow E, Skolnick J. Effects of confinement on models of intracellular macromolecular dynamics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2015, 112(48):14846-14851.
- 62 Singh A, Li J, Jiang X, et al. Shape induced segregation and anomalous particle transport under spherical confinement. *Physics of Fluids*, 2020, 32(5):053307.
- 63 Cervantes-Martinez AE, Ramirez-Saito A, Armenta-Calderon R, et al. Colloidal diffusion inside a spherical cell. *Physical Review E*, 2011, 83(3):030402.
- 64 Goto K, Sakata S, Moritani K, et al. Mean distance of two Brownian particles trapped in a suspended droplet and its dependence on the Debye length. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2017, 466: 511-520.
- 65 Sandoval-Jiménez IM, Jacinto-Méndez D, Toscano-Flores LG, et al. Brownian-particle motion used to characterize mechanical properties of lipid vesicles. *Journal of Chemical Physics*, 2020, 152 (1): 014901.