



力学学报

Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics

ISSN 0459-1879, CN 11-2062/O3

《力学学报》网络首发论文

题目： 横向振动立管上升流中球形单颗粒运动特征
作者： 魏明珠，段金龙，王旭，周济福
网络首发日期： 2024-01-25
引用格式： 魏明珠，段金龙，王旭，周济福. 横向振动立管上升流中球形单颗粒运动特征[J/OL]. 力学学报. <https://link.cnki.net/urlid/11.2062.O3.20240123.1628.002>



网络首发：在编辑部工作流程中，稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定，且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式（包括网络呈现版式）排版后的稿件，可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定；学术研究成果具有创新性、科学性和先进性，符合编辑部对刊文的录用要求，不存在学术不端行为及其他侵权行为；稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准，正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性，录用定稿一经发布，不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容，只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

出版确认：纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊（光盘版）》电子杂志社有限公司签约，在《中国学术期刊（网络版）》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版，以单篇或整期出版形式，在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊（网络版）》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物（ISSN 2096-4188，CN 11-6037/Z），所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

横向振动立管上升流中球形单颗粒运动特征¹⁾

魏明珠^{*,+} 段金龙^{*} 王旭^{*} 周济福^{*,+2)}

^{*}(中国科学院力学研究所流固耦合系统力学重点实验室, 北京 100190)

⁺(中国科学院大学工程科学学院, 北京 100049)

摘要 深海采矿过程中, 输送矿石颗粒的立管在复杂海洋环境作用下会产生运动响应, 这会对管道中矿石颗粒的运动行为产生重要影响, 从而影响矿石提升效率, 甚至可能危及整个采矿系统的安全。本文结合颗粒运动方程和软球碰撞模型, 对横向振动立管中的球形单颗粒运动特征进行研究, 主要分析了立管振动参数、颗粒与流体密度比以及颗粒与立管直径比对立管中单颗粒运动的影响。研究表明, 随振动频率和幅度、颗粒与流体密度比以及颗粒与立管直径比的增加, 颗粒垂向平均速度减小。颗粒与管壁之间无碰撞发生时, 颗粒与立管之间横向相对速度幅值、颗粒运动与立管之间横向速度的相位差以及颗粒垂向速度波动幅值, 与立管振动的频率和振幅、颗粒与流体密度比以及颗粒与立管直径比呈正相关。然而, 当颗粒与立管之间有碰撞发生时, 颗粒与立管间的横向速度的相位差减小, 而颗粒垂向速度波动幅值显著增大。另外, 随着密度比和直径比的增大, 颗粒与管壁之间更容易发生碰撞, 而碰撞会减弱密度比和直径比对颗粒横向速度和垂向速度的影响。

关键词 深海采矿, 振动立管, 上升流, 颗粒运动, 颗粒-管壁碰撞

中图分类号: O359 **文献标识码**: A

CHARACTERISTICS OF A SPHERICAL PARTICLE MOTION IN AN OSCILLATING RISER WITH UPWARD FLOW¹⁾

Wei Mingzhu^{*,+}, Duan Jinlong^{*}, Wang Xu^{*}, Zhou Jifu^{*,+2)}

^{*}(Key laboratory for Mechanics in Fluid Solid Coupling Systems, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

⁺(School of Engineering Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract In deep-sea mining, vibrations can be induced when the lifting risers subject to ocean

1) 国家自然科学基金项目 (12132018, 52394254, 12202455) 和中科院先导 A (XDA22040304) 资助。

2) 通讯作者: 周济福, 研究员, 主要从事海洋工程流体力学研究. E-mail: zhoujf@imech.ac.cn

waves and currents, and these vibrations have an impact on the lifting efficiency and ores motion transported inside the risers. Here, by using the governing equation for motion of a spherical particle and the soft sphere collision model, the particle movement in a riser with upward flow and oscillating in the lateral direction is investigated. Validations are conducted based on comparisons of our data with numerical and experimental results. Then, the motion of a single particle in the vibrating riser is explored, considering the effects of the frequency and amplitude of the riser vibrations, the density ratio of the particle to the fluid, and the diameter ratio of the particle to the riser. It is found that the average of the vertical velocity of the particle decreases with the vibrational frequency and amplitude of the riser, density ratio and diameter ratio increasing. In addition, without the occurrence of collision between the particle and riser wall, as the vibrational frequency and amplitude, density ratio and diameter ratio increase, the amplitude of relative lateral velocity between the particle and riser in the vibrational direction, the phase difference between the particle velocity and riser velocity as well as the fluctuation amplitude of the vertical velocity shows an increasing trend. Compared to the absence of collisions, a sharp increase in the fluctuation amplitude of the particle vertical velocity can be caused by the collision between the particle and riser wall. In addition, an increase of the density and diameter ratios can lead to the early appearance of collision between the particle and the riser wall, making collisions more likely to occur, while the effects of the density ratio and diameter ratio on the lateral velocity and vertical velocity can be decreased.

Key words deep-sea mining, riser vibration, upward flow, particle motion, particle-wall collision

引言

近年来,随着陆地矿产资源的枯竭,人们把目光投向深海。深海中蕴含着丰富的多金属结核、富钴结壳、热液硫化物等金属矿产资源^[1],开发这类矿产资源具有非常重要的意义。本文的研究着眼于深海海底锰结核的开采,开采系统示意如图 1,分布在几千米深海海床上的锰结核被采矿车收集,并破碎成几厘米的矿石块,经输运软管、中间舱、输运立管输送至海面的采矿船^[2]。其中,用于输送矿石的管道系统会受到波浪和海流的作用发生振动响应^{[3]-[6]}。当管道振动剧烈,并且矿石颗粒与管道流体的密度比较大^{[1],[2]}时,颗粒必然滞后于管道的运动,管道系统内的矿石颗粒会与管壁发生碰撞,必然导致管道内矿石的运动更加复杂^[7]。

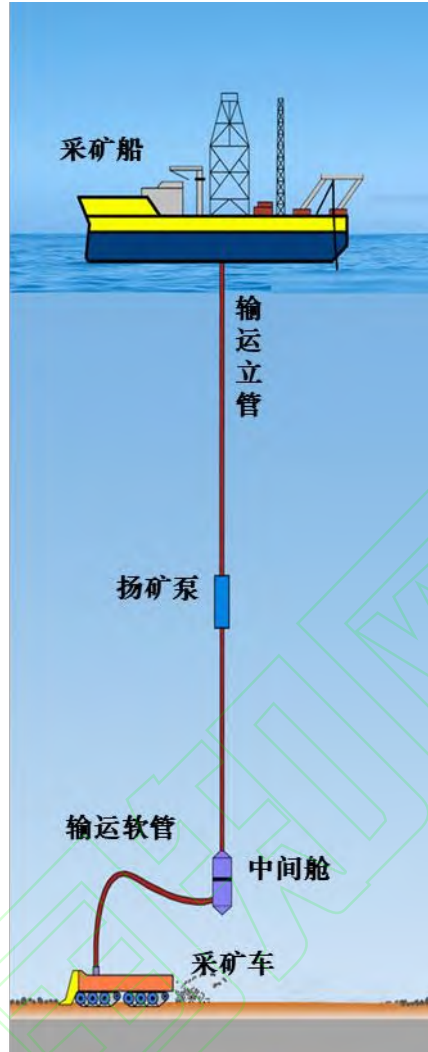


图 1 深海采矿系统示意图

Fig.1 Sketch of the deep-sea mining system.

目前，许多学者对静止管道上升流中颗粒的运动特征进行了广泛的研究，主要分析管道内流场、颗粒密度、颗粒尺寸等对颗粒运动行为的影响。如 Segre 和 Silberberg^[8] 试验观测了颗粒与流体密度比 $\beta = \rho_p/\rho_f$ (ρ_p 为颗粒密度， ρ_f 为流体密度) 接近 1.0 的悬浮颗粒在管道 Poiseuille 流中的运动特性^{[9]-[16]}，发现颗粒群总在距离管道轴线 2/3 的位置处聚集，随后更多的学者研究并验证了该现象。Feng 等^[9]和 Fox 等^[10]对平面剪切流中大密度差颗粒的运动特性进行了研究，发现颗粒的横向运动受密度比的影响较大。并且 Liu 等^[11]对密度比 β 介于 1.1 和 4.0 之间的单个球体颗粒在管道 Poiseuille 流中的运动轨迹进行了研究，通过分析球体尾涡结构解释了不同密度比的颗粒运动轨迹差异较大的原因。另外，Matas 等^{[12],[14]}和 Bai 等^[15]研究发现颗粒与管道直径比 $\lambda = d/D$ (d 为颗粒直径， D 为管道直径) 对颗粒的横向迁移运动有显著影响：小直径比的颗粒在更靠近管道轴线位置运动，而大直径比的颗粒则在更靠近于管壁位置运动。在 Matas 等^{[12]-[14]}研究基础上，Shao 等^[16]进一步对雷诺数高达 2200

的管道 Poiseuille 流中不同密度比和直径比的颗粒运动进行了研究，并分析了颗粒释放位置对其横向迁移运动的影响。

另外，由于管道压降和群颗粒在管道中的堵塞等直接影响矿石输送效率，因此，国内外很多学者研究了各种颗粒级配、颗粒尺寸和管道输送速度对两者的影响规律。如 Zhang 等^[17]重点关注了垂直管道中群颗粒运动初始阶段颗粒局部浓度和速度的变化，讨论了管道入口输送速度和浓度对管道压降和堵塞的影响。Ren 等^[18]分析了颗粒尺寸和级配对群颗粒在垂直管道中发生堵塞的影响，并分析了 S_{tp} 数 ($S_{tp} = \frac{\rho_p d^2 u_f}{18 \mu_f D}$ ，其中 u_f 和 μ_f 分别为管道中流体的速度和粘度)对颗粒间碰撞作用力和碰撞频率的影响。Wan 等^[19]分析了颗粒浓度、颗粒级配以及两相流初始混合速度对管道内流流型和摩擦损失的影响。张岩等^[20]通过分析双尺寸颗粒群的混合及分离时的颗粒浓度变化特征、颗粒间碰撞频率，颗粒群受力变化等，对颗粒群的分离机理进行了解释。除上述研究外，管道中颗粒数量、颗粒形状对其运动行为的影响也得到广泛研究^{[21]-[23]}。除管道定常流中颗粒的运动特性，一些学者还对非定常流场中颗粒的受力进行了分析。黄社华和程良骏^[24]对非定常无界流场中颗粒运动所受的 Basset 力的特性进行了分析，并证明了高频脉动下的 Basset 力可以忽略。Michaelides 等^{[25]-[27]}比较了无界振动流场中 Basset 力在颗粒所受总力中的占比，并讨论了 Basset 力可以忽略的条件：颗粒直径大于 $1\mu\text{m}$ ，流体振荡无量纲频率 $\omega^* = \omega \frac{2\rho_p R_p^2}{9\mu_f}$ (ω 表示振荡流场圆频率， ρ_p 和 R_p 分别表示颗粒密度和半径， μ_f 为流体粘度)小于 0.5，直径比 $\beta < 0.002$ 或 $\beta > 0.7$ 。这些针对静止管道和无界非定常流场中颗粒运动的研究可以为深海采矿的发展奠定一定的基础。

近年来，随着深海采矿的快速发展，横向振动管道中颗粒的运动开始引起相关学者的关注。万初一等^[28]讨论了管道振动频率与振幅、进料浓度、颗粒尺寸等对毫米量级颗粒的聚集位置、管内流场特征以及管内压降的影响。Wei 等^[7]主要分析了不同颗粒初始释放位置、管道振动频率和幅度下，单一尺寸和密度的粗颗粒的运动特征，并给出了振动管道中颗粒运动的 5 种轨迹类型。但是这些初步的研究还远远不能揭示深海采矿作业过程中振动管道系统内的矿石颗粒运动规律。

综上，虽然颗粒在静止管道或无界振动流场中运动特征已被广泛研究，但是目前对于振动管道中颗粒运动特性的认识尚不足够，特别是在现有的研究中，并未考虑不同颗粒与流体密度比 β 、颗粒与管道直径比 λ 条件下振动管道中颗粒运动行为的差异性，以及由于管道振动引起的颗粒与壁面的碰撞对颗粒运动的影响。因此，有必要从机理上深入揭示不同振动参数和颗粒自身物理参数影响下振动管道中颗粒的运动特征，特别是大密度比和大直

径比对横向振动管道中粗颗粒运动的影响规律。基于此，本文基于实际工程背景的参数，主要关注了管道振动参数、颗粒与流体密度比以及颗粒与立管直径比对横向振动立管中球形单颗粒运动的影响规律。

1 控制方程

1.1 颗粒运动方程

将输送立管中矿石视为球形颗粒，暂不考虑颗粒的旋转运动以及破碎。在立管中运动的颗粒会受到自身重力 F_G 和流体作用力的影响。其中，流体作用力包括拖曳力 F_D ，附加质量力 F_{AM} ，浮力 F_B ，Saffman 力 F_{LS} ，压力梯度力 F_P ，以及 Basset 力 F_H 。因此，颗粒运动方程如下^[29]

$$\begin{aligned} \frac{\pi d^3}{6} \rho_p \frac{d\mathbf{v}_{pi}}{dt} &= F_D + F_{AM} + F_{LS} + F_P + F_H + F_B + F_G \\ &= \frac{\pi d^2}{8} \rho_f C_D |\mathbf{u}_{fi} - \mathbf{v}_{pi}| (\mathbf{u}_{fi} - \mathbf{v}_{pi}) - \frac{\pi d^3}{12} \rho_f \left(\frac{d\mathbf{v}_{pi}}{dt} - \frac{d\mathbf{u}_{fi}}{dt} \right) + \frac{\pi d^3}{8} \rho_f C_{LS} (\mathbf{u}_{fi} - \mathbf{v}_{pi}) \times 2\boldsymbol{\omega}_{fi} \\ &\quad + \frac{\pi d^3}{6} \rho_f \left(\frac{D\mathbf{u}_{fi}}{Dt} - \frac{\mu_f}{\rho_f} \nabla^2 \mathbf{u}_{fi} \right) + \int_0^t C_H \frac{d^2}{4} \sqrt{\pi \rho_f \mu_f} \frac{d(\mathbf{u}_{fi} - \mathbf{v}_{pi})}{\sqrt{t - \tau}} d\tau + \frac{\pi d^3}{6} \rho_f (-\mathbf{g}_i) + \frac{\pi d^3}{6} \rho_p \mathbf{g}_i \end{aligned} \quad (1)$$

选取流体密度 ρ_f ，立管轴线处的流体速度 U ，以及立管直径 D 为量纲单位对方程 (1) 进行无量纲化，得到的无量纲量如下

$$\mathbf{v}_{pi}^* = \frac{\mathbf{v}_{pi}}{U}, \quad \mathbf{u}_{fi}^* = \frac{\mathbf{u}_{fi}}{U}, \quad \boldsymbol{\omega}_{fi}^* = \frac{\boldsymbol{\omega}_{fi}}{U/D}, \quad Fr = \frac{|\mathbf{g}_i| D}{U^2}, \quad Re_{cm} = \frac{\rho_f U D}{\mu_f}, \quad \lambda = \frac{d}{D}, \quad \beta = \frac{\rho_p}{\rho_f}, \quad \xi = \frac{1}{\beta + 0.5}.$$

无量纲方程为

$$\frac{d\mathbf{v}_{pi}^*}{dt} = \xi \left[\begin{aligned} &\frac{3}{4} \frac{1}{\lambda} C_D |\mathbf{u}_{fi}^* - \mathbf{v}_{pi}^*| (\mathbf{u}_{fi}^* - \mathbf{v}_{pi}^*) + \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{u}_{fi}^*}{dt} + \frac{3}{4} C_{LS} (\mathbf{u}_{fi}^* - \mathbf{v}_{pi}^*) \times 2\boldsymbol{\omega}_{fi}^* + \frac{D\mathbf{u}_{fi}^*}{Dt} \\ &-\frac{1}{Re_{cm}} \nabla^2 \mathbf{u}_{fi}^* + \frac{3}{2} \frac{1}{\lambda} C_H \sqrt{\frac{\pi}{Re_{cm}}} \int_0^t \frac{d(\mathbf{u}_{fi}^* - \mathbf{v}_{pi}^*)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau + (1 - \beta) Fr \frac{-\mathbf{g}_i}{|\mathbf{g}_i|} \end{aligned} \right] \quad (2)$$

其中， \mathbf{u}_{fi} 和 \mathbf{v}_{pi} 分别表示流场速度和颗粒速度， $\boldsymbol{\omega}_{fi} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}_{fi}$ 为颗粒所在位置处的流体旋度。

C_D ， C_{LS} 和 C_H 分别表示拖曳力系数、Saffman 力系数以及 Basset 力系数。颗粒密度和流体密度分别为 ρ_p 和 ρ_f ，颗粒直径为 d ，立管直径为 D ，流体黏性系数为 μ_f ，立管中轴线上的流体垂向速度为 U 。

考虑颗粒雷诺数 Re_p 和颗粒与立管直径比 $\lambda = d/D$ 对拖曳力系数 C_D 共同影响，拖曳力系数的表达式如下^[30]

$$C_D = \begin{cases} \frac{24}{Re_p} K, & Re_p \leq 1, \\ \frac{24}{Re_p} \left(\frac{1}{6} Re_p^{2/3} + K \right), & 1 < Re_p < 100, \\ 0.42 K_{F1}, & 100 < Re_p < 600, \\ 0.42 K_{F2}, & Re_p > 10^5, \end{cases} \quad (3)$$

其中,

$$K = \frac{1 - 0.75857\lambda^5}{1 - 2.1050\lambda + 2.0865\lambda^3 - 1.7068\lambda^5 + 0.72603\lambda^6}, \quad (4)$$

$$K_{F1} = \frac{1}{1 - 1.6\lambda^{1.6}}, \quad (5)$$

$$K_{F2} = \frac{1 + 1.45\lambda^{4.5}}{(1 - \lambda^2)^2}. \quad (6)$$

Saffman 力系数 C_{LS} 计算如下

$$C_{LS} = \frac{4.1126}{\sqrt{Re_{shear}}} f(Re_p, Re_{shear}) \quad (7)$$

$$Re_p = \frac{\rho_f d \sqrt{|\mathbf{u}_{fi} - \mathbf{v}_p|^2}}{\mu_f} \quad (8)$$

$$Re_{shear} = \frac{\rho_f d^2 |\nabla \times \mathbf{u}_{fi}|}{\mu_f} \quad (9)$$

$$f(Re_p, Re_{shear}) = \begin{cases} \left(1 - 0.3314 \sqrt{\frac{Re_{shear}}{2Re_p}} \right) e^{-0.1Re_p} + 0.3314 \sqrt{\frac{Re_{shear}}{2Re_p}}, & Re_p \leq 40, \\ 0.0524 \sqrt{0.5Re_{shear}}, & Re_p > 40. \end{cases} \quad (10)$$

另外, 由于立管在横向上作简谐振动, 立管中流体为非定常运动, 因此需要考虑 Basset 力, 其系数 C_H 由颗粒雷诺数 Re_p 和 Strouhal 数 St 共同决定^[31]

$$C_H = 6.00 - 3.16 \left[1 - \exp(-0.14 Re_p St^{0.82}) \right]^{2.5} \quad (11)$$

1.2 碰撞方程

由于颗粒与立管中流体之间存在密度差, 因此颗粒并不能完全跟随管道运动, 会出现相对运动, 从而导致两者之间发生碰撞。目前, 常采用的碰撞算法有两种: 软球碰撞模型^[32]和硬球碰撞模型^[33]。两种碰撞模型都能计算碰撞后的颗粒速度, 前者的求解过程能更好地展示碰撞过程中颗粒的速度变化, 因此, 本文运用软球碰撞模型^[32]计算颗粒与管壁碰撞后的速度, 碰撞示意如图 2 所示。碰撞力 \mathbf{F}_{col} 计算如下

$$\mathbf{F}_{col} = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_\tau \quad (12)$$

$$\mathbf{F}_n = \left(k_n |\delta_n|^{3/2} - N_n U_{pw} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n} \quad (13)$$

$$\mathbf{F}_\tau = \begin{cases} -\mu_f |k_n \delta_n| \frac{\delta_\tau}{|\delta_\tau|} \boldsymbol{\tau}, & k_\tau |\delta_\tau| > \mu_f |k_n \delta_n| \\ -k_\tau \delta_\tau \boldsymbol{\tau} - N_\tau \mathbf{U}_{pw,\tau}, & k_\tau |\delta_\tau| \leq \mu_f |k_n \delta_n| \end{cases} \quad (14)$$

$$\mathbf{U}_{pw,\tau} = \mathbf{U}_{pw} - (\mathbf{U}_{pw} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - (R_p \boldsymbol{\omega}_p + R_w \boldsymbol{\omega}_w) \times \mathbf{n} \quad (15)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{P}_c - \mathbf{P}_p}{|\mathbf{P}_c - \mathbf{P}_p|} \quad (16)$$

其中， \mathbf{F}_n 和 \mathbf{F}_τ 分别表示法向和切向力。本文采用的软球碰撞模型也被称为弹簧—阻尼模型，弹簧表示颗粒碰撞后的弹性变形，阻尼表示颗粒碰撞后的黏性耗散。 k_n 、 k_τ 和 N_n 、 N_τ 分别为法向和切向的刚度系数和阻尼系数， δ_n 和 δ_τ 为法向和切向重叠距离。相对速度 $\mathbf{U}_{pw} = \mathbf{v}_{pi} - \mathbf{U}_w$ ，其中 \mathbf{v}_{pi} 和 \mathbf{U}_w 分别为颗粒速度和管壁速度， $\mathbf{U}_{pw,\tau}$ 为相对速度的切向分量。法向单位向量 \mathbf{n} 由颗粒所处管道横截面处管道轴线坐标 $\mathbf{P}_c(x_c, y_c, z_c)$ 和颗粒位置坐标 $\mathbf{P}_p(x_p, y_p, z_p)$ 计算所得，其中 $z_c = z_p$ （颗粒所处位置的管道横截面中心的纵坐标 z_c 与颗粒圆心纵坐标 z_p 相等）。 k_n 、 k_τ 、 N_n 、 δ_n 和 δ_τ 表达式如下

$$k_n = \frac{4}{3} E_{eq} \sqrt{R_{eq}} \quad (17)$$

$$k_\tau = 8G_{eq} \sqrt{R_{eq} \delta_n} \quad (18)$$

$$N_n = C_{n,rest} \delta_n^{1/4} \sqrt{k_n M_{eq}} \quad (19)$$

$$\delta_n = R_p + R_w - |\mathbf{P}_p - \mathbf{P}_w| \quad (20)$$

$$\delta_\tau = |\mathbf{U}_{pw,\tau}| \Delta t \quad (21)$$

其中， R_p 为颗粒半径， $C_{n,rest}$ 表示法向恢复系数，时间步长为 Δt 。下标“eq”表示等效参数。等效杨氏模量 E_{eq} 、等效半径 R_{eq} 、等效质量 M_{eq} 以及等效剪切模量 G_{eq} 分别有表达式如下

$$E_{eq} = \left(\frac{1 - \nu_p^2}{E_p} + \frac{1 - \nu_w^2}{E_w} \right)^{-1} \quad (22)$$

$$G_{eq} = \left[\frac{2(2 + \nu_p - \nu_p^2)}{E_p} + \frac{2(2 + \nu_w - \nu_w^2)}{E_w} \right]^{-1} \quad (23)$$

$$R_{eq} = \left(\frac{1}{R_p} + \frac{1}{R_w} \right)^{-1} \quad (24)$$

$$M_{eq} = \left(\frac{1}{M_p} + \frac{1}{M_w} \right)^{-1} \quad (25)$$

其中，下标 p 和 w 分别代表颗粒和管壁， E 、 G 、 M 、和 R 为杨氏模量、剪切模量、质量以及半

径。在碰撞中，管壁质量和半径视为 ∞ ，因此 $R_{eq} = R_p$ 和 $M_{eq} = M_p$ 。

由于颗粒和管壁之间为三维碰撞，且管壁为弧形，因此将颗粒与管壁之间的相对速度表示如下

$$\begin{cases} v_n = (v_{py} - u_{cy}) \sin \theta + (v_{px} - u_{cx}) \cos \theta \\ v_{t\theta} = (v_{py} - u_{cy}) \cos \theta + (v_{px} - u_{cx}) \sin \theta \\ v_{tz} = v_{pz} \end{cases} \quad (26)$$

$$\theta = \arctan \left(\frac{y_p - y_c}{x_p - x_c} \right) \quad (27)$$

其中， θ 表示颗粒中心所在横截面上颗粒与管轴的连线与 x 轴正向的夹角，如图 2 所示。 v_n 和 $v_{t\theta}$ 分别与立管半径和颗粒在位置处的切线平行， v_{tz} 沿立管轴线 z 方向。

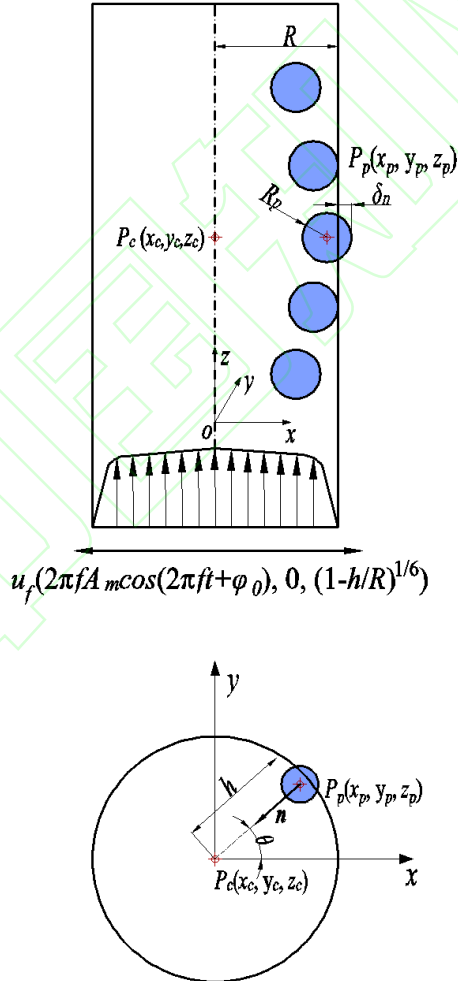


图 2 颗粒与管壁之间碰撞示意图

Fig.2 Schematic representation of the model of a collision between the particle and the riser wall

为清晰的展示颗粒运动方程（2）与上述碰撞算法的耦合求解过程，现将横向振动立管中的颗粒运动求解流程进行详细介绍，并绘制求解流程图，如图 3 所示。

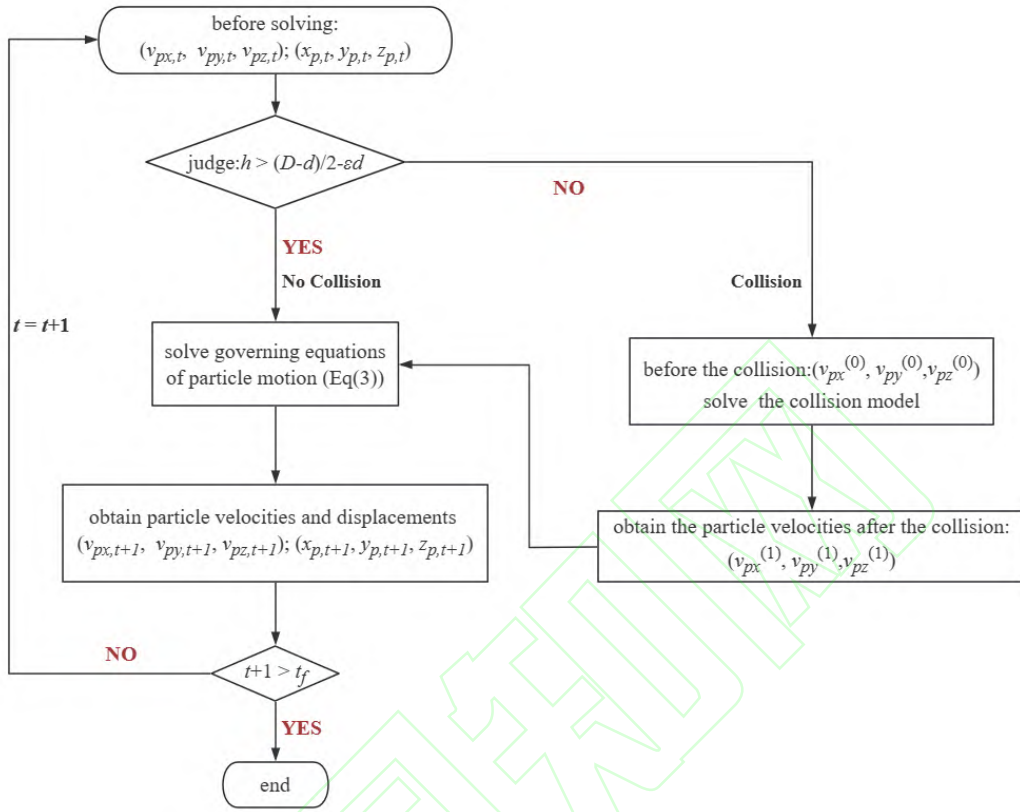


图 3 横向振动立管中颗粒运动求解流程图

Fig.3 A flowchart showing solving procedure of the coupling method.

在图 3 中， (x_{p0}, y_{p0}, z_{p0}) 和 $(v_{px0}, v_{py0}, v_{pz0})$ 分别表示颗粒的初始位置和速度。在求解颗粒速度之前，需要通过颗粒中心与管道轴线之间的距离 $h = \sqrt{(x_p - x_c)^2 + (y_p - y_c)^2}$ 和容差参数 ϵ (10^{-3} – 10^{-4}) 来判断颗粒与管壁之间是否发生碰撞。

(1) 当满足条件 $h > (D - d)/2 - \epsilon d$ 时，碰撞发生。用此时刻的颗粒速度 $(v_{px}^{(0)}, v_{py}^{(0)}, v_{pz}^{(0)})$ 和立管速度 $(v_{pc}^{(0)}, v_{pc}^{(0)}, v_{pc}^{(0)})$ ，通过上述碰撞算法求解碰后的颗粒速度 $(v_{px}^{(1)}, v_{py}^{(1)}, v_{pz}^{(1)})$ ，然后将碰后的颗粒速度代入方程（2）中，求解下一时刻的颗粒速度。

(2) 当 $h \leq (D - d)/2 - \epsilon d$ 时，碰撞未发生。此时，用变步长的四阶、五阶龙格-库塔法，求解颗粒速度。

1.3 验证

首先，通过与 Vojir 和 Mechaelides^[27]无界振荡流场中颗粒速度的数值计算结果进行对比，验证 1.1 节和 1.2 节所述计算方法的准确性。其中，流体密度为 $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$ ，流体

粘度为 $\mu_f = 0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ，颗粒半径 $R_p = 0.0001 \text{ m}$ ，颗粒密度 $\rho_p = 2700 \text{ kg/m}^3$ ，即颗粒与流体的密度比 $\beta = 2.7$ 。流体横向振动速度为 $u_{fx,Am}\cos(2\pi ft + \varphi_0)$ ，其中， $u_{fx,Am}$ 表示流场振动速度的峰值， f 和 φ_0 分别为流体振动频率和初相位， $\varphi_0 = \pi/2$ 。采用单位时间 t_p 和流场振动速度峰值 $u_{fx,Am}$ 分别对时间 t 和颗粒速度进行无量纲化，另外流场振动的圆频率 $2\pi f$ 用 $1/t_p$ 进行无量纲化。单位时间 t_p 定义如下

$$t_p = \frac{2\rho_p R^2}{9\mu} \quad (28)$$

无量纲圆频率 $2\pi ft_p = 1.0$ 和 10 的无界振荡流场中颗粒横向运动速度的数值计算结果与 Vojir 和 Mechaelides^[27] 的计算结果对比分别如图 4 (a) 和 4 (b) 所示。其中，黑色散点表示 Vojir 和 Mechaelides^[27] 的计算结果，红色虚线为本文的计算结果。可见，两种频率下，颗粒速度的波幅和相位均很好吻合。

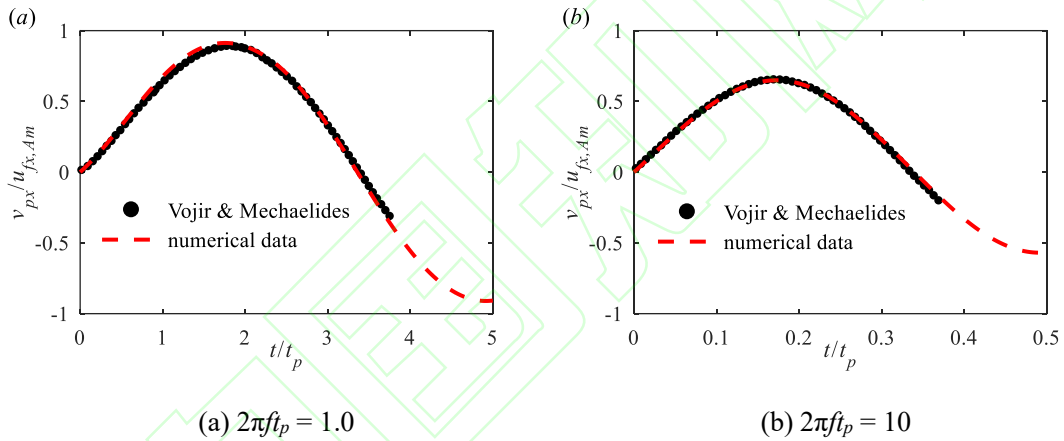


图 4 无界振荡流场中颗粒速度的计算结果与 Vojir 和 Mechaelides^[27] 的结果对比
Fig.4 Comparison of particle lateral velocity with the results of Vojir and Mechaelides^[27].

由于上述验证中并未涉及颗粒与管壁碰撞，因此进一步通过与 Gondret 等^[34] 的颗粒与容器的碰撞实验结果进行对比来验证所用计算模型的准确性。实验中，直径为 3mm、密度为 $\rho_p = 7800 \text{ kg/m}^3$ 的钢球在装有硅油的方形管道中自由沉降，流体密度为 $\rho_f = 935 \text{ kg/m}^3$ ，流体粘度为 $\mu_f = 0.01 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ 。钢球与容器底面接触后发生碰撞，速度反向，而后钢球上升至最高点转而沉降，如此反复直至钢球速度为 0。

根据 Ren 等^[18] 和 Wan 等^[19] 的研究，颗粒与颗粒之间碰撞持续时间约为 10^{-5} s 。另外，Wei 等^[7] 的分析表明，颗粒与管壁碰撞的持续时间均在 $3.5 \times 10^{-5} \text{ s}$ 内。因此，为准确计算碰撞后的颗粒速度，时间步长设置为 10^{-7} s 。钢球的位移和速度的数值计算结果与实验数据的

对比如图 5 所示，黑色散点表示实验数据，红色虚线为本文的计算结果。可以看出数值结果和实验吻合较好，4 次碰撞前后的速度误差均在 5% 以内，从而证明所发展模型的正确性。

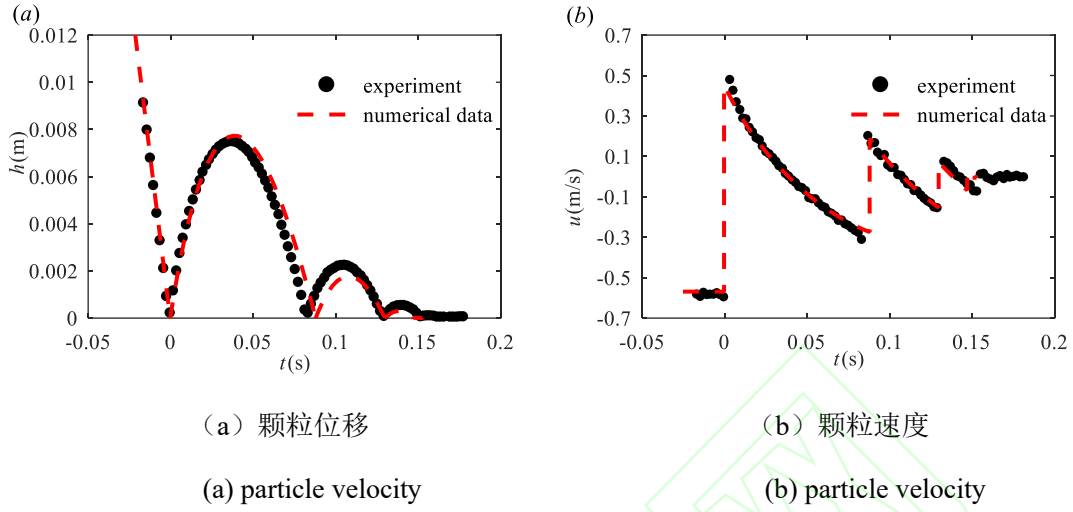


图 5 碰撞的数值计算结果与 Gondret 等^[34]的实验结果对比图

Fig.5 Comparisons of particle displacement and particle velocity between numerical results and experimental data of Gondret *et al* ^[34] for collisions.

2 结果分析

基于实际的工程背景的参数，本节主要分析了立管振动频率、振动幅度，颗粒与流体密度比，颗粒与立管直径比等参数对横向振动立管中颗粒运动的影响。由于本文研究的管道雷诺数约为 10^5 ，处于湍流状态，因此管道横截面上的速度分布采用指数形式表示^[35]，立管中的流场速度表示为

$$\mathbf{u}_f = \left[2\pi f A_m \cos(2\pi f t + \varphi_0) \right] \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + \left[U \left(1 - \frac{\sqrt{(x_p - x_c)^2 + (y_p - y_c)^2}}{D/2} \right)^{\frac{1}{6}} \right] \mathbf{k} \quad (29)$$

其中， A_m, f 和 φ_0 分别表示立管振动幅度、振动频率和振动初相位， $U = 1 \text{ m/s}$ 为立管轴线处的流体垂向速度。 D 为立管直径，颗粒位置坐标表示为 $\mathbf{P}_p(x_p, y_p, z_p)$ ，颗粒所处立管横截面处立管轴线坐标表示为 $\mathbf{P}_c(x_c, y_c, z_c)$ 。另外，如 1.2 节所述，当颗粒与立管壁面发生碰撞时，需要两者的材料参数计算颗粒碰后速度。在本节中，立管和颗粒的杨氏模量 E_w 和 E_p ，分别取 200 GPa 和 60 GPa ，泊松比 μ_w 和 μ_p 分别为 0.3 和 0.26 ，法向和切向恢复系数分别为 0.76 和 0.7 ^[36]，摩擦力系数为 0.2 。本节中，流体密度和黏性系数分别为 $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$ 和 $\mu_f = 0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ 。

需要说明的是，Wei 等^[7]的研究表明颗粒初始释放位置不影响颗粒的稳态运动，颗粒在非振动横向（ y 方向）的运动可以忽略，并且在本文研究设定的颗粒物性参数和立管振动参数范围内（根据实际工程背景设定的参数），Basset 力在颗粒运动中占比很小，可以忽略。因此，下文的计算结果未考虑 Basset 力，且只讨论颗粒在振动横向（ x 方向）和垂向（ z 方向）上的运动特征。除此之外，本文关注颗粒进入动态稳定状态后的运动特征，因此，每个工况至少计算 40 个立管运动周期，立管振动频率 $f=0.5\text{Hz}\sim 2.0\text{Hz}$ ，因此模拟时长为 20s~80s。当颗粒与管壁未发生碰撞（即颗粒距离管壁较远）时，用变步长的四阶、五阶龙格-库塔法，求解颗粒速度，时间步长最大为 10^{-4}s 。当颗粒与管壁即将发生碰撞（即颗粒距离管壁很近）时，为了准确计算碰撞后的颗粒速度，在颗粒与管壁发生碰撞的时段，时间步长设置为 10^{-7}s 。

2.1 振动参数的影响

在振动立管中，管道振动频率和管道振动幅度是影响颗粒运动的最明显的两个因素。根据刘大有^[37]的研究，一维无界振荡流场中颗粒运动速度的幅值以及其与振荡流场的相位差与管道振动频率和密度比直接相关。基于此，本节主要讨论颗粒横向和垂向运动特性在不同立管振幅和振动频率下的变化特征。本节主要分析不同管道振动频率和振幅下，颗粒横向速度相位差 φ 、相对横向速度 v_{pxre} 、以及颗粒垂向速度 v_{pz} 的变化特征。研究中，颗粒直径 $d=0.015\text{m}$ ，立管直径 $D=0.1\text{m}$ ，颗粒密度 $\rho_p=2000\text{kg/m}^3$ （密度比 $\beta=\rho_p/\rho_f=2.0$ ），振动频率 $f(U/D)$ 和振动幅度 A_m/D 的组合如表 1 所示

表 1 立管振动参数设置

Table 1 Vibrational parameters of the oscillating riser

Vibrational frequency $f/(U/D)$	0.05	0.06	0.07	0.075	0.10	0.15	0.20
	0.4	0.3	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25
	0.5	0.4	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
Vibrational amplitude A_m/D	0.6	0.5	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
	0.7	0.6	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
	0.8	0.7	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
	0.9	0.8	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
	1.0	0.9	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8

1.25	1.0	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
1.5	1.25	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1.75	1.5	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25
2.0	1.75	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
3.0	2.0	1.75	1.75	1.75	1.75	1.75
4.0	2.5	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0

2.1.1 振动参数对颗粒横向运动的影响

首先，研究立管振动参数对颗粒横向速度和位移的影响。考虑发生碰撞、未发生碰撞两种情况，以表 1 中 $f(U/D) = 0.05$ 为例，分析立管振动幅值对颗粒横向速度和位移的影响。在研究立管振动频率对颗粒运动特征影响时，选取立管振幅 $A_m/D = 1.0$ ，振动频率 $f(U/D) = 0.05, 0.06, 0.07, 0.075, 0.10, 0.15, 0.20$ 。另外，如 1.2 节所述，颗粒与壁面是否发生碰撞与颗粒中心和管道轴线之间的相对距离相关。因此，分析立管振动方向上的颗粒与管道轴线之间相对位移的波动幅值 $x_{r,Am}$ ，随立管振动参数的变化规律十分必要。 $x_{r,Am}$ 定义如下

$$x_{r,Am} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\max(x_p - x_c) - \min(x_p - x_c)] \quad (30)$$

其中， x_p 和 x_c 分别为颗粒和管道轴线所在位置的横向坐标， $\max(x_p - x_c)$ 和 $\min(x_p - x_c)$ 分别表示一个振动周期内颗粒与立管之间相对位移的最大值和最小值， N 表示振动周期的数量，为保证选取样本的代表性，每种立管振动参数下 N 取值至少为 20。不同立管振动参数下 $x_{r,Am}$ 变化如图 6 所示。

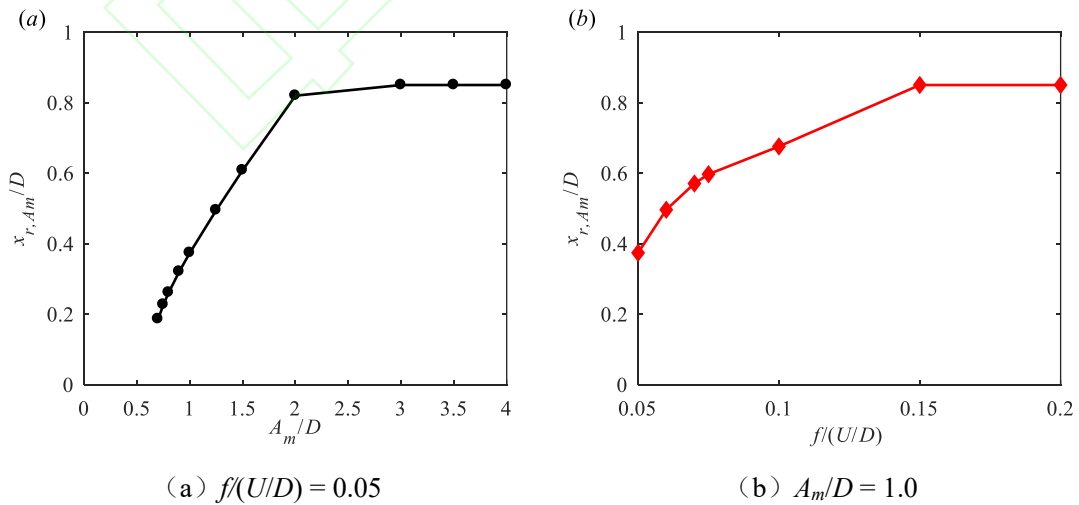


图 6 颗粒和振动立管横向相对位移幅值随立管振幅 (a) 和振动频率 (b) 的变化

Fig.6 Fluctuation amplitudes of the relative displacement between the particle and vibrating

riser with various vibrational amplitudes (a) and frequencies (b)

从图 6 中可以发现，随着立管振幅或振动频率的增加，颗粒与立管的相对位移 $x_{r,Am}$ 不断增加。然而，如图 6 (a) 和 6 (b) 所示，当 $A_m/D \geq 3.0$ 或 $f(U/D) \geq 0.15$ ， $x_{r,Am}$ 保持在一个常数值 0.85，不再继续增加，表明颗粒与管壁之间发生碰撞，由于管壁的限制 $x_{r,Am}$ 不再继续增加。 $x_{r,Am}$ 变化规律与颗粒和振动立管之间横向相对速度和相位差相关。首先，分析振动方向上颗粒速度与管道速度之间的相位差随振动参数的变化。定义颗粒横向速度极值所在时刻的相位为 φ_p ，管道振动速度极值点所在的相位为 φ_f 。两者之间相位差 φ 如下计算

$$\varphi = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\varphi_p - \varphi_f) \quad (31)$$

其中，为保证选取样本的代表性，每种立管振动参数下的 N 取值至少为 20，即选取至少 20 个周期的相位差，取其平均值作为相位差 φ 。图 7 显示了相位差 φ 随振动幅度和振动频率的变化趋势。

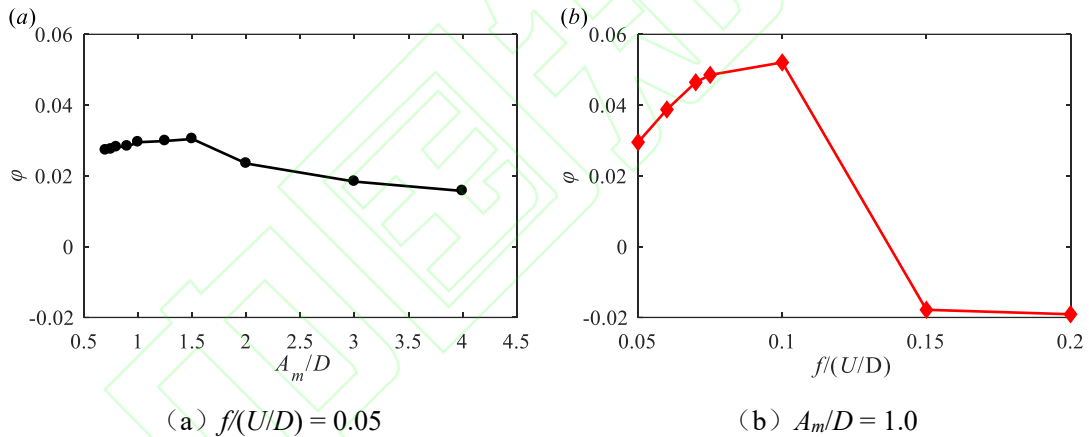


图 7 颗粒和振动立管横向速度的相位差随立管振幅 (a) 和振动频率 (b) 的变化

Fig.7 Phase differences between the particle velocity and riser velocity with various vibrational amplitudes (a) and frequencies (b)

从图 6 中可以看出，当 $f(U/D) = 0.05$ ， $A_m/D \leq 1.5$ 或 $f(U/D) \leq 0.1$ ， $A_m/D = 1.0$ 时，颗粒与管轴之间的距离随振动频率或振幅的增加持续变大，表明在此振动参数变化区间颗粒与管壁之间无碰撞发生，此时相位差（图 7）随立管振幅或振动频率的增加而增加。这是因为随着振幅和频率的增加，颗粒对管道的跟随性变弱，相位差会相应增加。而当 $f(U/D) = 0.05$ ， $A_m/D = 2.0 \sim 4.0$ 或 $f(U/D) = 0.15 \sim 0.20$ ， $A_m/D = 1.0$ 时，每个立管振动周期内颗粒与管壁碰撞 2 次，此时相位差 φ 急剧减小，且立管振幅或振动频率越大， φ 的值越小。这是因

为横向相对位移由相对速度和相位差 φ 共同决定，有碰撞发生条件下，颗粒与立管之间的相对运动位移幅值受到管壁的影响不再继续增加，而碰撞作用通过瞬时改变两者相对运动速度，从而间接影响相位差，导致相对运动距离幅值 $x_{r, Am}/D$ 不再继续变大。由此可见，碰撞对颗粒横向速度有显著影响。比较图 7 (a) 和 7 (b)，可以发现在本文研究的参数范围内，与振动幅度相比，振动频率对相位差的影响更大。

除相位差外，在振动方向上，颗粒与立管之间的速度差 v_{pxre} 是决定颗粒与管壁之间是否发生碰撞的另一决定性因素。将 v_{pxre} 的幅值定义为 $v_{pxre, Am}$ ，其求解如下

$$v_{pxre, Am} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\max(v_{pxre}) - \min(v_{pxre})] \quad (32)$$

其中， N 为颗粒运动稳定后，选取时间段内相对速度最大值或最小值出现的次数 ($N \geq 20$)。

表 1 中振动参数下， $v_{pxre, Am}$ 的值如图 8 所示。从图 8 中可以看出，无论是否发生碰撞，颗粒相对速度随立管振动频率和振动幅值的增加而增加。这是因为，无碰撞发生条件下，如图 9 中黑色实线所示，颗粒与振动立管之间的横向相对速度与颗粒对流体的跟随能力有关。如图 9 中带圆点的虚线所示，有碰撞发生条件下，两者之间的相对速度会在短暂的时间内 ($t_1 \sim t_2$) 受碰撞作用的影响，而后完全受控于流体作用^[7]。因此，碰撞不会改变相对速度随立管振动频率和振幅的变化趋势。

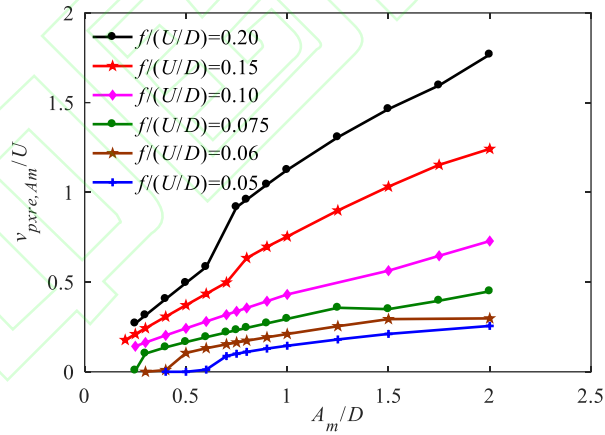


图 8 不同振动参数下的颗粒横向相对速度幅值

Fig.8 Flucutation amplitudes of the relative lateral velocity with various vibrational parameters

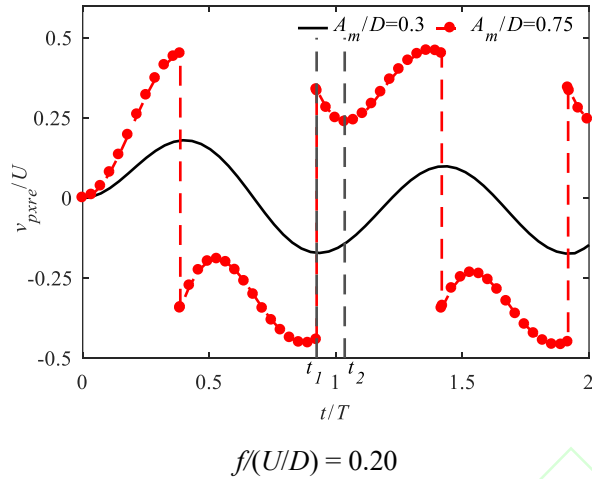


图 9 颗粒横向相对速度的历时曲线

Fig.9 Variations of the relative lateral velocity with time

2.1.2 振动参数对颗粒垂向运动的影响

颗粒的垂向平均速度变化直接影响矿石的提升效率。因此，很有必要分析立管振动频率和振动幅度对颗粒垂向平均速度的影响。在颗粒释放后的运动初期，颗粒速度并未达到稳定，因此这里选取颗粒运动速度稳定以后 20 个振动周期的垂向速度平均值作为研究对象。

垂向平均速度计算方式如下

$$v_{pz,ave} = \frac{1}{t_f - t_0} \int_{t_0}^{t_f} v_{pz} dt \quad (33)$$

其中， $v_{pz,ave}$ 表示垂向平均速度， $t_0 \sim t_f$ 表示 20 个周期的开始和截止时刻。

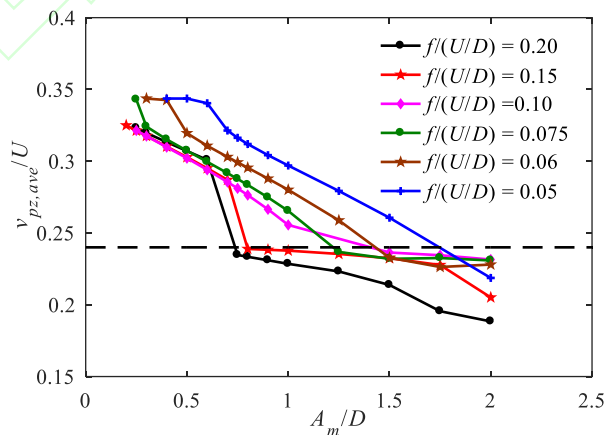


图 10 不同振动参数下的颗粒垂向平均速度

Fig.10 Particle vertical average velocity with different vibrational frequencies and amplitudes

图 10 展示了不同振动参数下颗粒垂向平均速度的变化规律，可以看出，颗粒与管壁之间无碰撞发生条件下（虚线以上），随着振动频率或振动幅值的增加，颗粒垂向平均速度减小，意味着颗粒提升效率的降低。这是因为随着立管振动频率或者振幅的增加，颗粒与振动立管的横向相对位移增加，并且越靠近管壁管道中流体垂向速度越小，从而导致颗粒垂向平均速度减小。有碰撞发生条件下，随立管振幅的增加，颗粒垂向平均速度减小的趋势变得平缓。这是因为有碰撞发生条件下，由于管壁的限制作用，颗粒与管道轴线的相对位移达到最大（如图 6 所示），不再随立管振动幅度的继续增加而改变，因此，有碰撞发生条件下，颗粒垂向平均速度随立管振动参数的变化与管内流场的非均匀性无关。颗粒垂向速度随振动幅度的变化主要由碰撞导致，但是碰撞的作用是瞬时的而不是作用在颗粒运动的整个周期，因此颗粒垂向平均速度的变化趋势减缓。另外，与静止立管中颗粒运动不同，横向振动立管中的颗粒垂向速度幅值会出现规律性波动^[7]。为探究此波动幅度 $v_{pz,Am}$ 随振动参数的变化特征，将 $v_{pz,Am}$ 定义如下

$$v_{pz,Am} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\max(v_{pz}) - \min(v_{pz})] \quad (34)$$

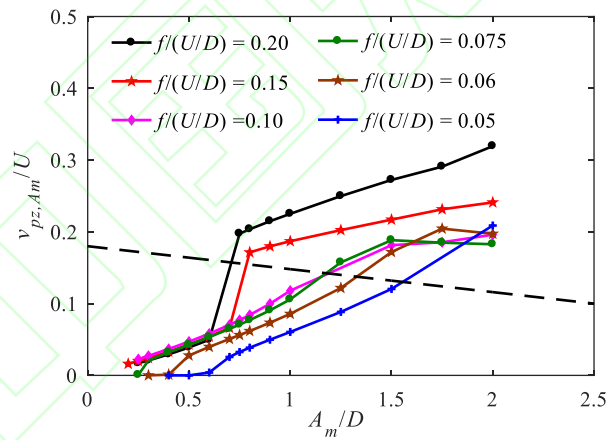


图 11 不同振动参数下的颗粒垂向速度波动幅值

Fig.11 Flucutation amplitudes of the particle verticle velocity with various vibrational parameters

图 11 展示了不同立管振动参数下颗粒的 $v_{pz,Am}$ 取值。观察图 11，可以发现在相同频率下颗粒垂向速度的波动幅度随振动频率的增加而增加。造成这种现象的原因是，随着振动立管振幅的增加，立管与颗粒横向相对位移幅值增大，颗粒更靠近管壁；同时立管中流体的垂向速度呈指数形式（式（29）），越靠近管壁流体垂向速度越小。因此，在颗粒与立管横向相对位移幅值和流体垂向速度的共同影响下，颗粒的垂向速度幅值出现波动。图 11 中左下方所示区域是无碰撞发生的情况，与之相比，在有碰撞发生条件下（图 11 虚线右上方

所示区域), 垂向速度的波动幅度出现大幅增加, 这明显与碰撞作用相关。图 12 展示了振动频率 $f(U/D) = 0.1$ 时, 不同振幅下颗粒垂向速度的历时曲线, 图中 $A_m/D = 1.5$ 和 2.0 时颗粒与管壁之间每个周期发生两次碰撞, $A_m/D \leq 1.0$ 时无碰撞发生。可以看出, 由于碰撞力的瞬时作用, 颗粒垂向速度的极小值出现在碰后的时刻^[7], 此极小值远低于未发生碰撞时。而由流场垂向速度影响的颗粒垂向速度极大值则趋于相等, 因此 $v_{pz,Am}$ 显著增加。

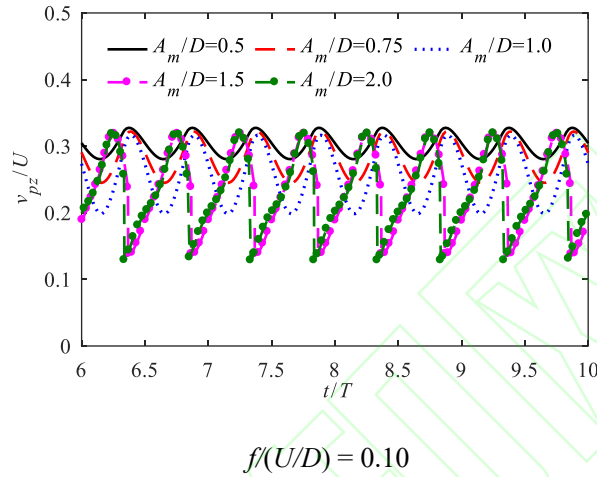


图 12 不同振幅下的颗粒垂向速度历时曲线

Fig.12 Time history of the verticle velocity with various vibrational amplitudes

2.2 密度比的影响

除立管振动参数外, 颗粒与流体密度比也会对颗粒运动特征产生影响。因此, 本节主要分析相同立管振幅和振动频率条件下, 颗粒与立管内流体密度比 β 变化对颗粒运动特征的影响。其中, 颗粒直径 $d = 0.015\text{m}$, 立管振动频率 $f(U/D) = 0.1$, 对应有碰撞、无碰撞发生的两种振动幅度 $A_m/D = 0.5$ 和 1.5 , 颗粒与流体密度比分别为 $\beta = 1.5, 1.8, 2.0, 2.2,$ 和 2.4 。

2.2.1 密度比对颗粒横向运动的影响

首先, 讨论颗粒与立管内流体密度比 β 变化对颗粒横向速度的影响。为便于比较和观察, 用立管振动周期 T 对时间 t 进行无量纲化。

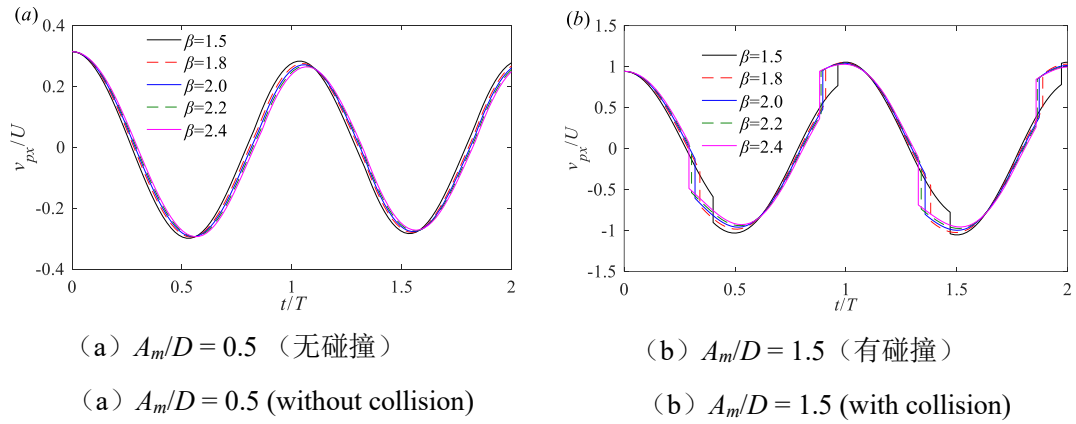
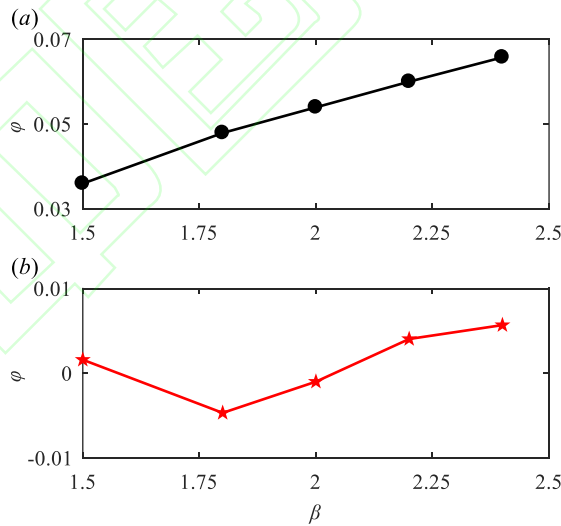


图 13 不同密度比下的颗粒横向速度历时曲线

Fig.13 Time history of lateral velocity of the particle to the riser with various density ratios

不同密度比下，颗粒横向速度随时间的变化如图 13 所示。从图 13 (a) 和图 13 (b) 中可以明显看出，无论有无碰撞发生，横向相对速度幅值随密度比的增大而减小，这是因为随着密度比的增加，颗粒的惯性增加，导致其对周围流体的跟随性变弱，相同流体速度下的颗粒速度会减小。

除此之外，通过图 13 可以发现，颗粒横向速度的相位以及颗粒与管壁发生碰撞的时刻与密度比有关。采用式 (31) 定义的相位差，颗粒横向速度与立管振动速度的相位差随密度比的变化如图 14 所示。



(a) $A_m/D = 0.5$ (无碰撞)

(b) $A_m/D = 1.5$ (有碰撞)

(a) $A_m/D = 0.5$ (without collision)

(b) $A_m/D = 1.5$ (with collision)

图 14 颗粒和振动立管横向速度的相位差随密度比的变化

Fig.14 Phase difference of the particle and riser velocity in vibrational direction with various density ratios

从图 14 (a) 中可以看出, 当颗粒与管壁之间无碰撞发生条件下 ($A_m/D = 0.5$), 随着密度比的增加, 颗粒横向速度与振动立管之间的相位差持续增加。然而, 比较图 14 (a) 和 14 (b) 中的相位差 φ 的量级可以发现, 碰撞发生条件下, 相位差急剧减小。这说明, 碰撞可以通过改变相位差而影响颗粒横向运动速度, 从而减小密度比对相位差的影响。

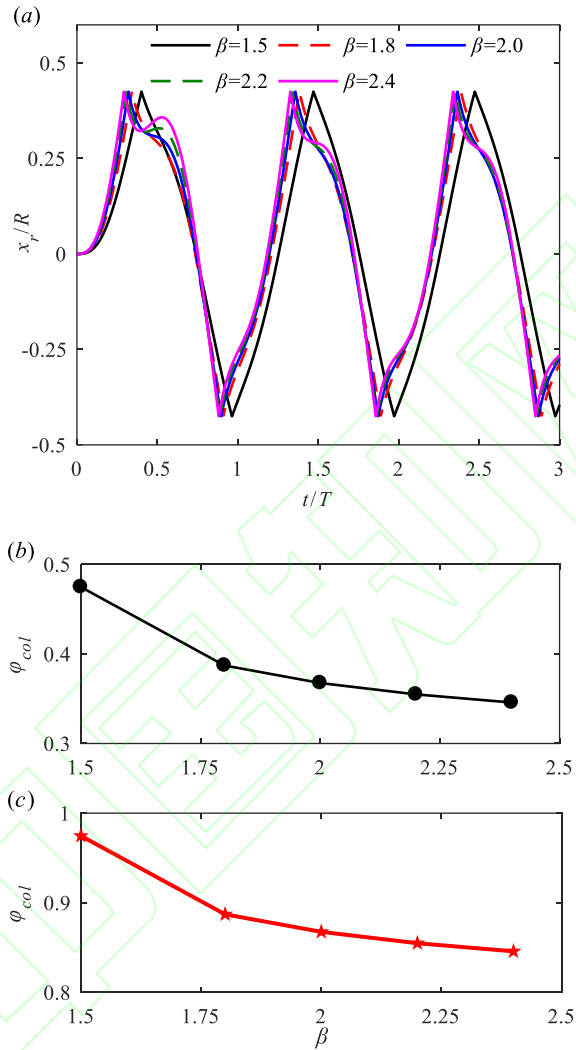


图 15 当 $f(U/D) = 0.10$, $A_m/D = 1.5$ 时, 横向相对位移随时间的变化 (a) 以及颗粒与管壁碰撞时刻的相位随密度比的变化 (b) 和 (c)

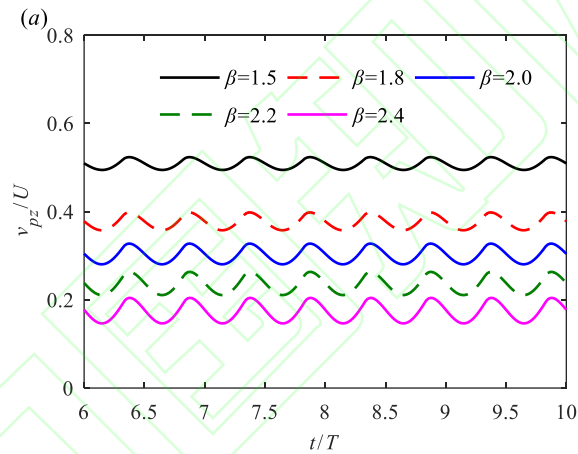
Fig.15 Time history of the relative displacement between the particle and riser in vibrational direction (a) and the phases of the collision moment with various density ratios (b) and (c) when $f(U/D) = 0.10$, $A_m/D = 1.5$

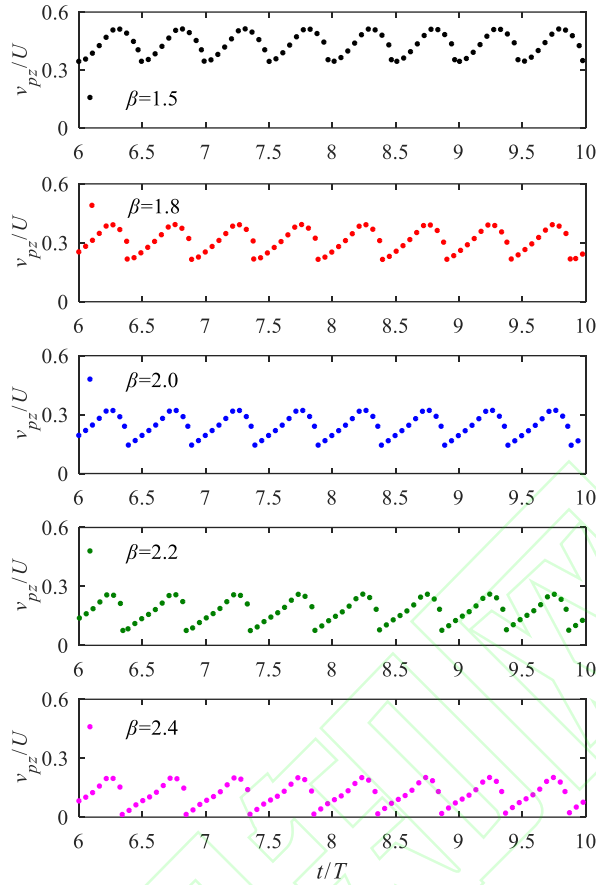
如前所述, 密度比会影响颗粒与管壁发生碰撞的时刻 (图 13 (b))。为了进行定量分析, 图 15 展示了立管振动频率 $f(U/D) = 0.10$ 、振幅 $A_m/D = 1.5$ 时, 横向相对位移随时间的变化以及颗粒与管壁碰撞时刻的相位随密度比的变化。根据碰撞发生条件, 从图 15 (a)

可以看出，在每个立管振动周期，颗粒与管壁发生2次碰撞，这两次碰撞时的相位 φ_{col} 随密度比的变化分别如图 15 (b) 和 15 (c) 所示。可以发现，随着密度比的增加，颗粒与管壁碰撞时刻的相位减小，说明颗粒与流体密度比较大时，碰撞更容易发生。造成这种现象的原因是，随着密度比的增加，颗粒惯性增大，从而颗粒与振动立管之间的相对速度增大，这使得两者之间的相对位移在更短的时间内达到立管半径，从而导致颗粒与振动立管在更早的相位处发生碰撞。

2.2.2 密度比对颗粒垂向运动的影响

颗粒运动达稳定状态后，不同密度比下的颗粒垂向速度的历时曲线如图 16 所示。可以看出随着密度比的增加，颗粒垂向速度不断减小。这是因为颗粒直径不变，颗粒密度比 β 的增加使得其自身重力增加，因此相同垂向流场速度条件下颗粒的提升速度会减小。



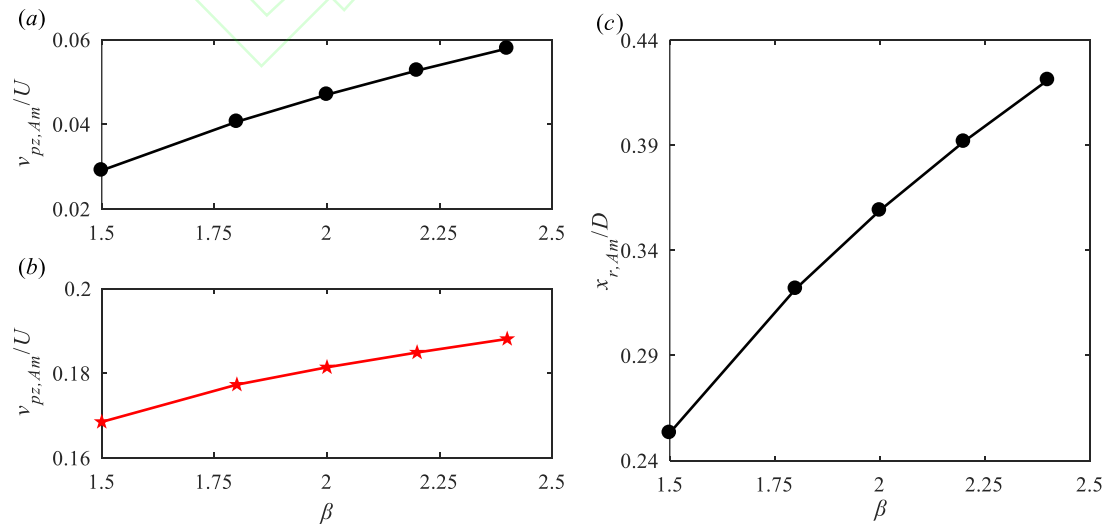


(a) $A_m/D = 0.5$ (无碰撞) (b) $A_m/D = 1.5$ (有碰撞)
 (a) $A_m/D = 0.5$ (without collision) (b) $A_m/D = 1.5$ (with collision)

图 16 不同密度比下的颗粒垂向速度历时曲线

Fig.16 Time history of vertical velocity of the particle with various density ratios

另外，通过图 16 可以发现，颗粒垂向速度的波动幅值会随密度比变化而改变。因此，接下来主要讨论颗粒与管内流体密度比变化对 $v_{pz,Am}$ 的影响。



(a) $A_m/D = 0.5$ (无碰撞) (b) $A_m/D = 1.5$ (有碰撞) (c) $A_m/D = 0.5$ (无碰撞)
 (a) $A_m/D = 0.5$ (without collision) (b) $A_m/D = 1.5$ (with collision) (c) $A_m/D = 0.5$ (without collision)

图 17 颗粒垂向速度波动幅值 (a) 和 (b) 以及横向相对位移幅值 (c) 随密度比的变化

Fig.17 The fluctuation amplitudes of the vertical velocity (a) and (b) , and relative displacement (c) between the particle and riser with various density ratios

图 17 展示了颗粒垂向速度波动幅值 $v_{pz,Am}$ 和横向相对位移幅值 $x_{r,Am}$ 随密度比的变化。从图 17 (a) 中可以发现, 对于无碰撞发生的情形, 垂向速度波动幅值与密度比呈正相关, 这是因为密度比越大, 颗粒的惯性越大, 其对周围流体的跟随性变弱, 颗粒与振动立管之间的横向相对速度值和相位差增加, 致使颗粒在立管中的运动范围变大 (图 17 (c)); 并且立管中非均匀的流体垂向速度同样会影响颗粒运动, 最终导致颗粒垂向速度波动幅值增加。从图 17 (b) 中可以明显看出, 对于有碰撞发生的情形, 颗粒垂向速度波动幅值随密度比的增加而增加, 但其增长率有所降低, 从而证明, 颗粒垂向运动随颗粒与管内流体密度比的变化特征同样受到颗粒与管道碰撞效应的影响。

2.3 直径比的影响

由于颗粒与立管直径比 λ 的变化同样对横向振动立管中颗粒运动特性产生影响, 因此本节分析横向振动立管中颗粒运动特征随着颗粒与立管直径比 λ 增大的变化规律。研究中, 颗粒与流体的密度比 $\beta = 2.0$, 立管直径 $D = 0.1\text{m}$, 立管振动频率 $f/(U/D) = 0.10$, 振动幅度 $A_m/D = 0.5$ 和 1.5 。另外, 根据深海采矿过程中矿石尺寸范围, 选取直径比 $\lambda = 0.1, 0.125, 0.15, 0.18, 0.2, 0.25$ 。

2.3.1 直径比对颗粒横向运动的影响

首先, 分析直径比 λ 变化对颗粒横向运动的影响。有无碰撞条件下, 颗粒横向速度与振动立管之间的相位差随直径比的变化如图 18 所示。

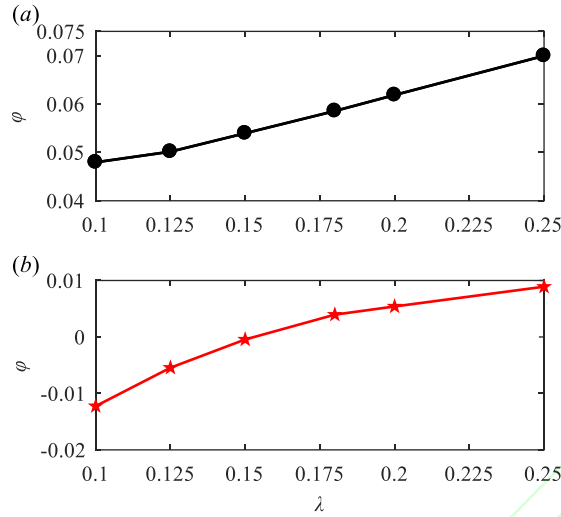
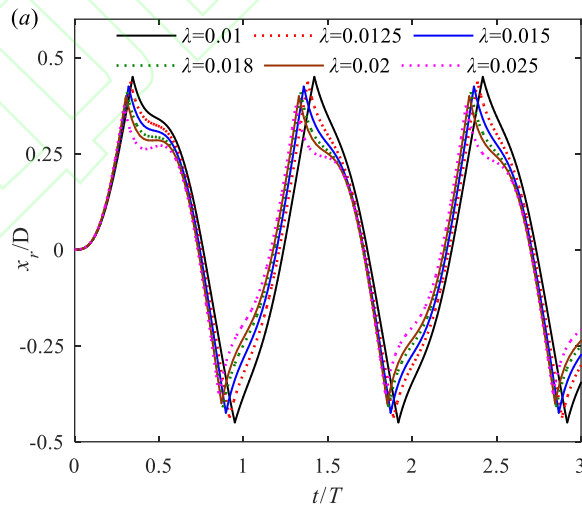


图 18 颗粒与振动立管横向速度的相位差随直径比的变化

- (a) $A_m/D = 0.5$ (无碰撞) (b) $A_m/D = 1.5$ (有碰撞)
(a) $A_m/D = 0.5$ (without collision) (b) $A_m/D = 1.5$ (with collision)

Fig.18 The phase difference of the particle and riser velocity in vibrational direction with various diameter ratios

当颗粒与管壁之间无碰撞发生条件下 ($A_m/D = 0.5$), 从图 18 (a) 中可以看出随着直径比的增加, 颗粒横向速度与振动立管之间的相位差持续增加。然而, 当有碰撞发生 ($A_m/D = 1.5$), 相位差由 0.05 ~ 0.07 急剧减小至 -0.01 ~ 0.01 (图 18 (b))。从而证明, 碰撞可以通过改变相位差而影响颗粒横向运动速度, 进而导致直径比对颗粒横向运动的影响减弱。



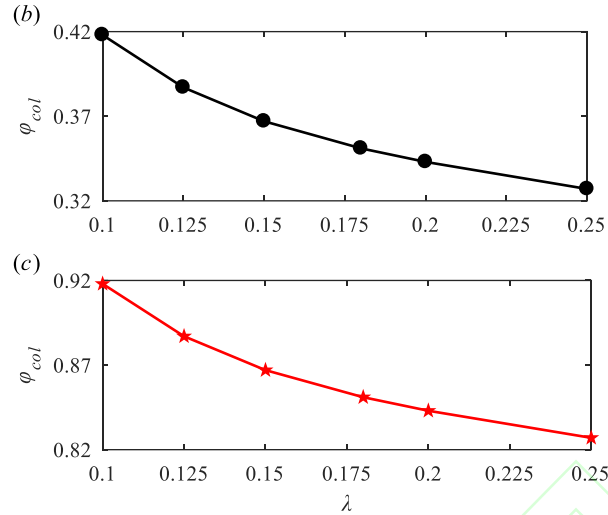


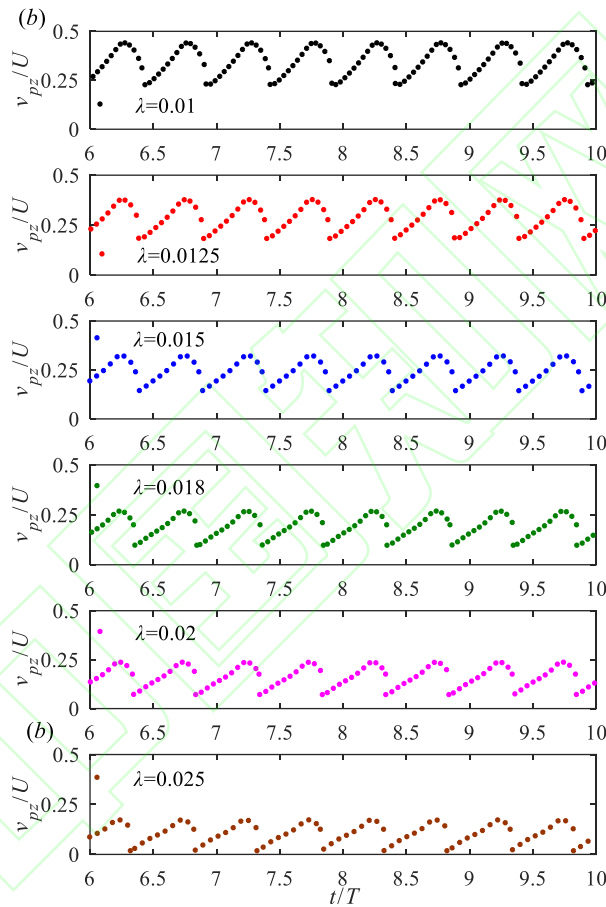
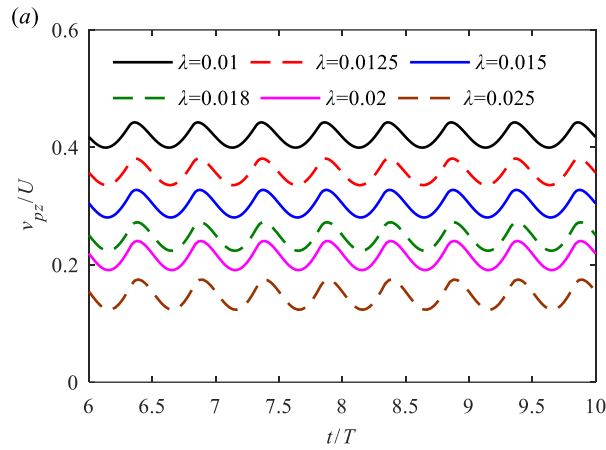
图 19 当 $f(U/D) = 0.10$, $A_m/D = 1.5$ 时, 横向相对位移随时间的变化 (a) 以及颗粒与管壁碰撞时刻的相位随直径比的变化 (b) 和 (c)

Fig.19 Time history of the relative displacement between the particle and riser in vibrational direction (a) and the phases of the collision moment with various diameter ratios (b) and (c) when $f(U/D) = 0.10$, $A_m/D = 1.5$

立管振动频率 $f(U/D) = 0.10$, 振幅 $A_m/D = 1.5$ 时, 不同直径比下, 横向相对位移随时间的变化以及颗粒与管壁碰撞时刻的相位如图 19 所示。根据碰撞发生条件, 从图 19 (a) 可以看出, 立管振幅为 $A_m/D = 1.5$ 时, 在每个立管振动周期, 颗粒与管壁发生 2 次碰撞, 该两次碰撞时的相位分别如图 19 (b) 和 19 (c) 所示。可以看出, 随着直径比的增加, 颗粒与管壁 2 次碰撞发生时刻的相位均会减小, 表明碰撞时刻提前。这是因为随着颗粒直径比增加, 颗粒对管道的跟随性变差, 导致颗粒与振动立管之间的相对速度增大; 同时, 由 1.2 节可知, 当满足 $h > (D-d)/2 - \varepsilon d$ 条件时, 颗粒与管壁发生碰撞, 当颗粒直径增加时, 不等式右侧的值会减小。鉴于上述两种原因, 随着直径比的增加, 颗粒与管壁更容易发生碰撞, 致使碰撞时刻提前, 所以发生碰撞的相位会减小。

2.3.2 直径比对颗粒垂向运动的影响

颗粒运动状态稳定后, 不同直径下的颗粒垂向速度历时曲线如图 20 所示, 可以明显看出随着直径比的增加, 颗粒垂向速度减小。结合颗粒运动方程 (2), 可以发现, 密度比 β 不变时, 随着颗粒与立管直径比 $\lambda = d/D$ 的增加, 颗粒所受的拖曳力 F_D 在总力中的占比减小, 导致颗粒最终的垂向提升速度减小, 这与张岩等^[20]分析双尺寸颗粒群分离现象的原因类似。



(a) $A_m/D = 0.5$ (无碰撞)

(b) $A_m/D = 1.5$ (有碰撞)

(a) $A_m/D = 0.5$ (without collision)

(b) $A_m/D = 1.5$ (with collision)

图 20 不同直径下的颗粒垂向速度历时曲线

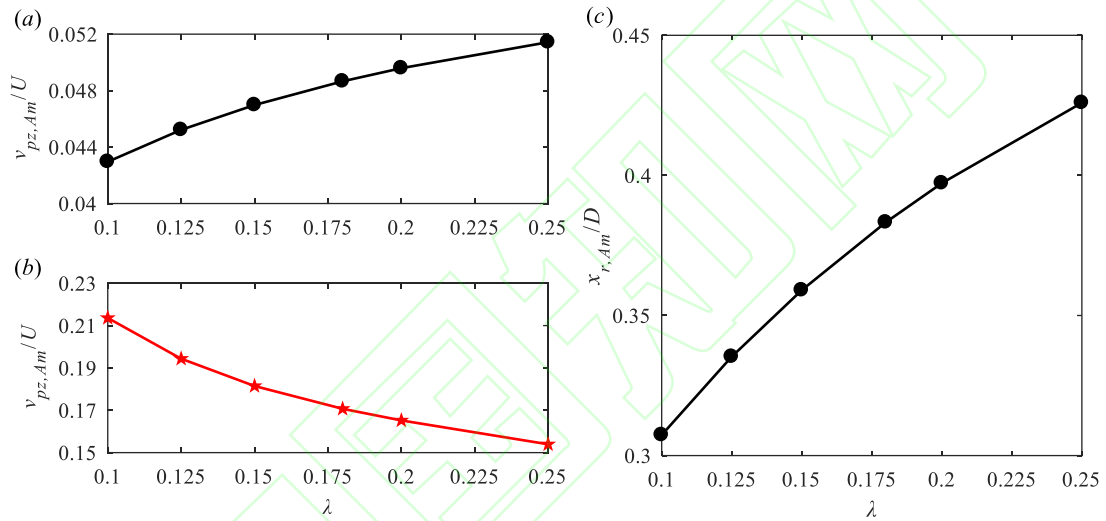
Fig.20 Time history of vertical velocity of the particle with various diameter ratios

颗粒垂向速度波动幅值和无碰撞情形的横向相对位移幅值随直径比的变化如图 21 所示。

从图 21 (a) 可以看出, 对于颗粒与管壁之间无碰撞发生的情形, 颗粒垂向速度波动幅值随其直径比的增加而变大。造成这种现象的原因是立管中流体的垂向速度呈指数型 (式

(29)), 越靠近管壁流体垂向速度越小; 同时, 如图 21 (c) 所示, 随着直径比的增加, 颗粒对振动立管的跟随性变弱, 导致颗粒在立管中的运动范围变大, 在流场和颗粒运动的共同作用下, 颗粒垂向速度波动幅度随直径比的增加而增加。

另外, 从图 21 (b) 可以发现当立管振动幅度为 $A_m/D = 1.5$, $v_{pz,Am}$ 与直径比呈现负相关。这种现象可以解释为: 有碰撞发生, 需满足条件 $h > (D - d)/2 - \varepsilon d$, 可以看出颗粒直径比越大, 颗粒与管壁发生接触时, 颗粒中心距离管壁越远, 而由式 (29) 可知, 距离管壁越远, 流场垂向速度变化越小, 导致流场对颗粒的垂向作用力的变化缓慢, 因此由流场引起的颗粒垂向速度的波动幅值会减小。



(a) $A_m/D = 0.5$ (无碰撞) (b) $A_m/D = 1.5$ (有碰撞) (c) $A_m/D = 0.5$ (无碰撞)
(a) $A_m/D = 0.5$ (without collision) (b) $A_m/D = 1.5$ (with collision) (c) $A_m/D = 0.5$ (without collision)

图 21 颗粒垂向速度波动幅值 (a) 和 (b) 以及横向相对位移幅值 (c) 随直径比的变化
Fig.21 Fluctuation amplitudes of the vertical velocity (a) and (b) , and relative displacement between the particle and riser (c) with various diameter ratios

3. 结论

本文基于颗粒运动方程和软球碰撞模型, 对横向振动立管中的单颗粒运动特性开展了数值研究, 讨论了颗粒与立管碰撞的发生条件, 分析了颗粒运动的垂向速度、相对于立管的横向速度随立管振动参数、颗粒与立管内流体密度比 (密度比) 以及颗粒与立管直径比 (直径比) 的变化规律, 得到以下主要结论。

大振幅或者高频率的立管振动可引起颗粒与立管发生碰撞，随着密度比和直径比的增加，颗粒与管壁发生碰撞的相位减小，即碰撞时刻提前，使得碰撞更容易发生。

颗粒垂向平均速度随立管振动频率和振幅、密度比以及直径比的增加而减小，但垂向速度的波动幅值呈增加趋势，颗粒与立管的碰撞导致垂向速度的波动幅值显著增加。

颗粒与立管之间无碰撞发生的条件下，颗粒与立管之间横向相对速度幅值以及两者之间的相位差随立管振动频率和振幅、密度比以及直径比的增加而增加。而有碰撞发生的条件下，颗粒与立管的横向相对速度的相位差受碰撞的影响急剧减小，从而减弱密度比和直径比对颗粒横向速度的影响。

本文的研究初步揭示了横向振动立管中单个粗颗粒的运动规律，对深海采矿工程设计有参考价值。当然，在实际海洋工程中，立管所处作业环境复杂，而且深海采矿系统中的采矿船、中间舱以及采矿车的运动，会给海洋立管施加多频成分叠加的激励形式，其运动响应更加复杂。除此之外，当输送管道中的矿石颗粒浓度较高时，矿石颗粒间的相互作用力可能会比较强。因此，在未来的研究中，将需要考虑更接近实际的情况，如考虑立管的“8字形”振动等，逐步推进单颗粒和群颗粒矿石在复杂模态运动立管中的运动特征研究。

参考文献

- ¹ K.A. Miller, K.F. Thompson, P. Johnston, et al. An Overview of Seabed Mining Including the Current State of Development, Environmental Impacts, and Knowledge Gaps. *Frontiers in Marine Science*, 2018, 4: 418. DOI: 10.3389/fmars.2017.00418
- ² Teng Shuang, Kang Can, Ding Kejin, et al. CFD-DEM Simulation of the Transport of Manganese Nodules in a Vertical Pipe. *Applied Sciences*, 2022, 12(9): 4383.
- ³ Fu Bo-Wen, Zou Lu, Wan De-Cheng. Numerical study of vortex-induced vibrations of a flexible cylinder in an oscillatory flow. *Journal of Fluids and Structures*, 2018, 77: 170–181.
- ⁴ Gao Yun, Zou Li, Zong Zhi, et al. Numerical prediction of vortex-induced vibrations of a long flexible cylinder in uniform and linear shear flows using a wake oscillator model. *Ocean Engineering*, 2019, 171: 157–171.
- ⁵ Duan Jinlong, Zhou Jifu, Wang Xu, et al. Cross-flow vortex-induced vibration of a flexible fluid-conveying riser undergoing external oscillatory flow. *Ocean Engineering*, 2022, 250: 111030.

- 6 Duan Jinlong, Zhou Jifu, Wang Xu, et al. Vortex-induced vibration of a flexible fluid-conveying riser due to vessel motion. *International Journal of Mechanical Sciences* 2022, 223: 107288.
- 7 Wei mingzhu, Duan Jinlong, Wang Xu, et al. Motion of a solid particle in an ore-lifting riser with transverse vibrations. *Physics of Fluids* 2023, 35: 113311.
- 8 G. Segre and A. Silberber. Behaviour of macroscopic rigid spheres in Poiseuille flow Part 2. Experimental results and interpretation. *Journal of Fluid Mechanics*, 1962, 14: 136-157.
- 9 J. Feng, H. H. Hu, D. D. Joseph. Direct simulation of initial-value problems for the motion of solid bodies in a Newtonian fluid. 2. Couette and Poiseuille flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 1994, 277: 271-301.
- 10 Andrew. J. Fox, James. W. Schneider and Aditya. S. Khair. Dynamics of a sphere in inertial shear flow between parallel walls. *Journal of Fluid Mechanics*, 2021, 915: A119.
- 11 Liu Lei, Yang Jianmin, Lu Haining, et al. Numerical simulations on the motion of a heavy sphere in upward Poiseuille flow. *Ocean Engineering*, 2019, 172: 245-256.
- 12 J.P. Matas, J.F. Morris, E. Guazzelli. Inertial migration of rigid spherical particles in Poiseuille flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 2004, 515: 171-195.
- 13 J.P. Matas, J.F. Morris, E. Guazzelli. Transition to turbulence in particulate pipe flow. *Physical Review Letters*. 2003, 90(1): 014501.
- 14 J.P. Matas, J.F. Morris, E. Guazzelli. Lateral forces on a sphere. *Oil & Gas Science and Technology*, 2004, 59(1): 59-70.
- 15 Bin Bai, Hui Jin, Peng Liu, et al. Experimental study on the equilibrium position of a falling sphere in a circular tube flow. *International Journal of Multiphase Flow*. 153, 104112 (2022).
- 16 Xue Ming Shao, Zhao Sheng Yu, and Bo Sun. Inertial migration of spherical particles in circular Poiseuille flow at moderately high Reynolds numbers. *Physics of Fluids*. 2008, 20: 103307.
- 17 Yan Zhang, Xiao-Bing Lu, and Xu-Hui Zhang. Numerical simulation on transportation behavior of dense coarse particles in vertical pipe with an optimized Eulerian–Lagrangian method. *Physics of Fluids*, 2022, 34(3): 033305.
- 18 Wan-Long. Ren, Xu-Hui. Zhang, Yan. Zhang, et al. Investigation of particle size impact on

- dense particulate flows in a vertical pip. *Physics of Fluids*, 2023: 35(7): 073302.
- ¹⁹ Wan Chuyi, Xiao Shengpeng, Zhou Dai, et al. Numerical simulation on transport behavior of gradated coarse particles in deep-sea vertical pipe transportation. *Physics of Fluids*, 2023, 35(4): 043328.
- ²⁰ 张岩, 任万龙, 张旭辉等. 垂直管中双尺寸颗粒群的混合及分离规律研究. *力学学报*, 2023, 55(7):1582-1592. (Zhang Yan, Ren Wanlong, Zhang Xuhui, et al. The mixing and segregation of binary particles transportation in vertical pipe. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2023, 55(7): 1582-1592. (in Chinese))
- ²¹ Yu Dai, Yanyang Zhang, and Xuyang Li. Numerical and experimental investigations on pipeline internal solid-liquid mixed fluid for deep ocean mining. *Ocean Engineering*. 2021, 220: 108411.
- ²² Mengmeng Zhou, Shuai Wang, Shibo Kuang, et al. CFD-DEM modelling of hydraulic conveying of solid particles in a vertical pipe. *Powder Technology*, 2019, 354: 893–905.
- ²³ Qianyi Chen, Ting Xiong, Xinzhuo Zhang, et al. Study of the hydraulic transport of non-spherical particles in a pipeline based on the CFD-DEM. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, 2020, 14: 53–69.
- ²⁴ 黄社华, 程良骏. 非定常流场中颗粒运动所受 Basset 力的性质解析. *力学与实践*, 1996, 18(03): 50-52.
- ²⁵ E. E. Michaelides. A novel way of computing the Basset term in unsteady multiphase flow computations. *Physics of Fluids*, 1992, A4(7): 1579-1582.
- ²⁶ Li Liang, Efstathios E. Michaelides. The Magnitude of Basset Forces in Unsteady Multiphase Flow Computations. *Journal of Fluids Engineering*. 1992, 114(3): 417-419.
- ²⁷ D. J. Vojir, E. E. Michaelides. Effect of the history Term On the motion of rigid Spheres in a viscous fluid. *International Journal of Multiphase Flow*. 1994, 20(3): 547-556.
- ²⁸ 万初一, 范祖相, 周岱等. 强迫振动下垂直管道固液两相流数值模拟研究 [J/OL]. *力学学报*, 2023. (Wan Chuyi, Fan Zuxiang, Zhou Dai, et al. Numerical simulation research of solid-liquid two-phase flow in vertical pipe under forced vibration. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2023 (in Chinese))
- ²⁹ Renwei. Mei. Flow due to an oscillating sphere and an expression for unsteady drag on the

- sphere at finite Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*. 1994, 270: 133-174.
- ³⁰ R. Clift, J. R. Grace, and M. E. Weber. *Bubbles, Drops, and Particles*. New York: Academic Press, 1978, 222-229.
- ³¹ E. E. Michaelides, M. Sommerfeld and B. V. Wachem. *Multiphase Flows with Droplets and Particles*. CRC Press, 2023, 118-119.
- ³² AD. Renzo, and FPD. Maio. Comparison of contact-force models for the simulation of collisions in DEM-based granular flow codes. *Chemical Engineering Science*, 2004, 59(3): 525–541.
- ³³ Pawel Kosinski, and Alex C. Hoffmann. Extension of the hard-sphere particle-wall collision model to account for particle deposition. *Physical Review E*. 2009, 79(6): 061302.
- ³⁴ P. Gondret, M. Lance and L. Petit. Bouncing motion of spherical particles in fluids. *Physics of Fluids*. 2002, 14(2): 643-652.
- ³⁵ 张兆顺, 崔桂香. 流体力学. 第三版. 北京: 清华大学出版社, 2015.
- ³⁶ 姬中民, 唐一举, 伍法权等. 落石形状和尺寸对恢复系数影响的室内试验研究. *岩土力学*, 2021, 42(3), 665-672. (Ji Zhong-min, Tang Yi-ju, Wu Fa-quan, et al. Laboratory investigation of the effect of rockfall shape and size on coefficient of restitution. *Rock and Soil Mechanics*, 2021, 42(3), 665-672 (in Chinese))
- ³⁷ 刘大有. 两相流体动力学. 第一版. 北京: 高等教育出版社, 1993. (Liu D-you. *Fluid Dynamic of Two-Phase Systems*. The first edition. Beijing: Higher Education Press, 1993. (in Chinese))