

抑制运动可渗透面虚假噪声的四极子修正模型

周志腾^{1, 2}, 王士召^{1, 2, *}

- 中国科学院力学研究所 非线性力学国家重点实验室, 北京 100190
- 中国科学院大学 工程科学学院, 北京 100049

摘要: Ffowcs Williams-Hawkings (FW-H) 方程是 Lighthill 声比拟方程在运动边界问题中的推广, 但在 FW-H 方程中使用运动可渗透积分面时, 常因涡结构穿过可渗透积分面引起虚假噪声。本文利用可渗透积分面上 Lighthill 应力张量的通量估计涡结构对远场噪声的贡献, 并消去其所导致的虚假噪声。在频域 Lighthill 应力张量通量四极子修正模型基础上, 本文考虑了运动积分面对四极子修正模型的影响, 提出了适用于运动可渗透积分面的四极子修正模型。该模型基于冻结流假设与格林函数的远场近似特性, 通过求解关于四极子体积分量的代数方程, 在被积函数中包含了运动积分面的速度。圆柱绕流和对流涡远场噪声预测验证了本文所提出修正模型的有效性。

关键词: 声比拟; 四极子声源; 虚假噪声; 运动积分面; 可渗透积分面

中图分类号: O357; V211.3

文献标识码: A

A quadrupole correction model to suppress spurious sound with moving permeable integral surfaces

ZHOU Zhiteng^{1, 2}, WANG Shizhao^{1, 2, *}

- The State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China
- School of Engineering Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

Abstract: Ffowcs Williams-Hawkings (FW-H) equation is the extension of the Lighthill's acoustic analogy equation for sound prediction with moving boundaries. However, the spurious sound often arises from vortex structures crossing through permeable FW-H surfaces. This work aims to approximate the contribution of the vortex structures to far-field sound using the Lighthill stress tensor flux and subtract the resulting spurious sound. Based on the frequency-domain Lighthill stress tensor quadrupole correction model, a quadrupole correction model is proposed to account for the effect of a moving integral surface on the spurious sound. Based on the frozen flow assumption and far-field approximation of the FW-H equation's Green's function, the proposed model incorporates the FW-H surface's velocity into the integrand of the quadrupole correction model by solving an algebraic equation of the quadrupole volume integral term. The proposed model is validated by the far-field sound prediction of flows over a circular cylinder and a convecting vortex.

Keywords: acoustic analogy; quadrupole sources; spurious sound; moving integral surfaces; permeable integral surfaces

收稿日期: 2023-05-15; 修回日期: 2023-08-06; 录用日期: 2023-08-21

基金项目: 国家自然科学基金基础科学中心项目(11988102); 国家自然科学基金重大研究计划重点支持项目(92252203)

* 通信作者 E-mail: wangsz@lnm.imech.ac.cn

引用格式: 周志腾, 王士召. 抑制运动可渗透面虚假噪声的四极子修正模型 [J]. 实验流体力学, 2024, 38(1): 1-11.

ZHOU Z T, WANG S Z. A quadrupole correction model to suppress spurious sound with moving permeable integral surfaces [J]. Journal of Experiments in Fluid Mechanics, 2024, 38(1): 1-11.

0 引言

噪声问题是航空航海中的重要问题,流动产生的远场噪声是噪声研究的重要内容^[1-6]。工程中各种远场噪声(如螺旋桨噪声^[7]、射流噪声^[8]、风扇噪声^[9]、高升力翼型噪声^[10-11]、钝体绕流噪声^[12]等)通常采用 Ffowcs Williams-Hawkings(FW-H)方程^[6]进行计算。FW-H 方程是 Lighthill 声比拟理论在有边界流动远场噪声问题中的拓展。求解 FW-H 方程时,可利用格林函数方法得到积分形式解(下文简称为“FW-H 积分”)。FW-H 积分包括单极子和偶极子声源的面积分及四极子声源的体积分。

FW-H 积分中的四极子声源体积分项消耗的存储量和计算量较大。在求解 FW-H 方程时,通常忽略积分面外的四极子声源体积分项^[13-14],这在积分面足够大时误差较小;对于积分面难以包含所有四极子声源的情况(如湍射流、机翼绕流),则需采取一些近似方法给出积分面下游足够远处四极子声源的贡献。一种方法是打开下游边界,这种方法通常应用于射流噪声计算^[8, 15]。对于积分面足够远的情况,该方法误差较小,但在数学上不满足积分面封闭假设,并且低估了下游观测点噪声。另一种方法是基于封闭积分面,修正积分面截断误差。Zhong 等^[16-18]构建了一种基于滤波的压力脉动的声比拟方程,给出了该方程的时域解和频域解。Wang 等^[19]则基于泰勒冻结流假设,将积分面外的四极子声源体积分以穿出口面的四极子通量形式近似。在其基础上, Nitzkorski 等^[20]对四极子声源出口速度的取法进行了讨论,认为利用关联函数可以给出更加准确的出口速度。在频域方法中, Lockard 与 Casper^[21]同样基于泰勒冻结流假设,利用分部积分将频域的四极子项展开为面积分的级数形式,正确预测了钝体绕流的辐射噪声,但该方法未能应用于来流马赫数 0.5~1.0 之间的所有远场观测点。Zhou 等^[22-24]利用远场近似重新展开四极子声源体积分项,得到了收敛的面积分级数,对该级数求极限,给出了适用于来流马赫数 1.0 以下所有远场观测点的统一形式。

目前的虚假噪声抑制方法均以积分面静止为前提,未考虑积分面运动情况。当积分面运动时,积分面主动穿过四极子声源,即便四极子声源对流速度较小,仍会产生四极子声源通量,导致虚假噪声。本文基于频域 FW-H 方程和泰勒冻结流假设,构建运动积分面导致的虚假噪声。所得到的形式表明,在

考虑运动可渗透面时,虚假噪声一部分由积分面运动引起,另一部分则来自四极子声源的运输。本文提出考虑运动可渗透面的四极子修正模型(输入数据为时域的速度、压力和密度),并利用对流涡和低雷诺数圆柱绕流算例对该模型的有效性进行验证。

1 FW-H 方程的频域形式

由考虑远场均匀来流的 FW-H 方程开始^[25]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + U_{\infty i} U_{\infty j} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} + 2U_{\infty i} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial t} - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_i} \right) [H(f)\rho'] = \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_i} [T_{ij}H(f)] - \frac{\partial}{\partial y_i} [F_i\delta(f)] + \frac{\partial}{\partial t} [Q\delta(f)] \quad (1)$$

其中:

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \rho u_i u_j + P_{ij} - c_0^2 \rho' \delta_{ij} \\ F_i &= \rho (u_i - U_{\infty i}) (u_j - v_j + U_{\infty j}) n_j + \\ &\quad \rho_0 U_{\infty i} (U_{\infty j} - v_j) n_j + p' n_i \\ Q &= \rho (u_j - v_j + U_{\infty j}) n_j - \rho_0 (U_{\infty j} - v_j) n_j \end{aligned} \quad (2)$$

式中: T_{ij} 为 Lighthill 应力张量; $P_{ij} = (p - p_0)\delta_{ij} - \tau_{ij}$, τ_{ij} 为黏性应力; ρ_0 、 c_0 、 p_0 分别为无穷远场的密度、声速和压力; 密度 $\rho' = \rho - \rho_0$, 压力脉动 $p' = p - p_0$; n_i 为 FW-H 积分面的单位外法向量的分量; $H(f)$ 为 Heaviside 函数,在 FW-H 面外为 1,在 FW-H 面内为 0; $U_{\infty i}$ 为均匀来流的速度分量; u_i 为当地流体质点相对于 $U_{\infty i}$ 的速度脉动, v_i 为 FW-H 面的运动速度。基于等熵流动假设进行傅里叶变换,上式转化为:

$$\left[(ik)^2 + Ma_{\infty i} Ma_{\infty j} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} + 2Ma_{\infty i} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial t} - \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_i} \right] [H(f)\mathcal{F}(p')] = \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_i} \mathcal{F}[T_{ij}H(f)] - \frac{\partial}{\partial y_i} \mathcal{F}[F_i\delta(f)] + i\omega \mathcal{F}[Q\delta(f)] \quad (3)$$

式中, $\mathcal{F}[q(t)]$ 表示对时域的物理量 $q(t)$ 作傅里叶变换。变换对定义为:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[q(t)] &= \tilde{q}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} q(t) \exp(-i\omega t) dt \\ \mathcal{F}^{-1}[\tilde{q}(\omega)] &= q(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \end{aligned} \quad (4)$$

定义波数 $k = \omega/c_0$ 、马赫数 $Ma_{\infty i} = U_{\infty i}/c_0$ 。需要注意的是,本文所考虑的工况为二维流动,来流马赫数在 1.0 以下。不失一般性,本文仅考虑来流方向沿 y_1 轴正向,来流速度为 $U_{\infty 1}$ 。

2 FW-H 方程的解

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\eta} + \int_t \mathbf{v} dt \quad (11)$$

2.1 单极子项和偶极子项

考虑积分面运动及来流, 给出单极子项和偶极子项的频域形式。将式(3)右端视作源项, 其解为:

$$\begin{aligned} \tilde{p}'(\mathbf{x}, \omega) = & \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \mathcal{F}\{Q(\mathbf{y}, t)\delta[f(\mathbf{y}, t)]\} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) d\mathbf{y} - \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_i} \mathcal{F}\{F_i(\mathbf{y}, t)\delta[f(\mathbf{y}, t)]\} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) d\mathbf{y} + \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \mathcal{F}\{T_{ij}(\mathbf{y}, t)H[f(\mathbf{y}, t)]\} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (5)$$

上式所需使用的二维格林函数为:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = & \frac{-i}{4\beta} \exp[iMa_{\infty 1}k(x_1 - y_1)/\beta^2] H_0^{(2)}\left(\frac{k}{\beta^2} R_\beta\right) \\ R_\beta = & \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \beta^2(x_2 - y_2)^2} \end{aligned} \quad (6)$$

格林函数的远场近似为:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = & \frac{-i}{4} \left(\frac{2}{\pi k R_\beta}\right)^{0.5} \\ & \exp[i\pi/4 + iMa_{\infty 1}k(x_1 - y_1)/\beta^2 - ikR_\beta/\beta^2] \end{aligned} \quad (7)$$

Prandtl-Glauert 因子 $\beta = \sqrt{1 - Ma_{\infty 1}^2}$, \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 分别为观测点和声源的空间坐标。在 Zhou 等^[24] 研究工作上, 考虑对流影响, 得到式(6)中的单极子项为:

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_M(\mathbf{x}, \omega) = & \int_{f=0} \int_{t_1} \frac{\omega}{4} \left(\frac{2}{\pi k R_\beta}\right)^{0.5} \exp(i\pi/4) \\ & \frac{Q}{1 + Ma_{t_1}} \exp(-i\omega t_1) dt_1 dl \end{aligned} \quad (8)$$

偶极子项为:

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_D(\mathbf{x}, \omega) = & \int_{f=0} \int_{t_1} \frac{-i}{4} \left(\frac{2}{\pi k R_\beta}\right)^{0.5} \exp(i\pi/4) \\ & \frac{F_i C_i}{1 + Ma_{t_1}} \exp(-i\omega t_1) dt_1 dl \\ C_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = & \frac{-ik}{\beta^2} \left(\frac{\partial R_\beta}{\partial y_1} + Ma_{\infty 1}\right), C_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{-ik}{\beta^2} \frac{\partial R_\beta}{\partial y_2} \end{aligned} \quad (9)$$

其中:

$$\begin{aligned} t_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = & t + [R_\beta - Ma_{\infty 1}(x_1 - y_1)]/(c_0\beta^2) \\ Ma_{t_1}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = & \frac{d\{[R_\beta - Ma_{\infty 1}(x_1 - y_1)]/(c_0\beta^2)\}}{dt_1} \end{aligned} \quad (10)$$

t 为声源所对应时刻。需要注意的是, 以上 3 式中的声源坐标 \mathbf{y} 与时间 t 相关, 可由随积分面运动的拉格朗日坐标系 $\boldsymbol{\eta}$ 及每个时刻的运动速度 \mathbf{v} 确定, 即:

为能使用 FFT 求解单极子项和偶极子项, 将式(8)和(9)中与频率有关的项置于时间积分之外:

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_M(\mathbf{x}, \omega) = & \frac{\omega}{4} \left(\frac{2}{\pi k}\right)^{0.5} \int_{f=0} \int_{t_1} \left(\frac{1}{R_\beta}\right)^{0.5} \\ & \exp(i\pi/4) \frac{Q}{1 + Ma_{t_1}} \exp(-i\omega t_1) dt_1 dl \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_D(\mathbf{x}, \omega) = & \frac{-k}{4\beta^2} \left(\frac{2}{\pi k}\right)^{0.5} \int_{f=0} \int_{t_1} \left(\frac{1}{R_\beta}\right)^{0.5} \exp(i\pi/4) \\ & \frac{\left(Ma_{\infty 1}F_1 + F_i \frac{\partial R_\beta}{\partial y_i}\right)}{1 + Ma_{t_1}} \exp(-i\omega t_1) dt_1 dl \end{aligned} \quad (13)$$

利用傅里叶变换, 单极子和偶极子源可写作:

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_M(\mathbf{x}, \omega) = & \frac{\omega}{4} \left(\frac{2}{\pi k}\right)^{0.5} \\ & \int_{f=0} \mathcal{F} \left[\left(\frac{1}{R_\beta}\right)^{0.5} \exp(i\pi/4) \frac{Q}{1 + Ma_{t_1}} \exp(-i\omega t_1) \right] dl \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_D(\mathbf{x}, \omega) = & \frac{-k}{4\beta^2} \left(\frac{2}{\pi k}\right)^{0.5} \\ & \int_{f=0} \mathcal{F} \left[\left(\frac{1}{R_\beta}\right)^{0.5} \exp(i\pi/4) \frac{\left(Ma_{\infty 1}F_1 + F_i \frac{\partial R_\beta}{\partial y_i}\right)}{1 + Ma_{t_1}} \right] dl \end{aligned} \quad (15)$$

需要注意的是, 式(14)和(15)中的傅里叶变换均在新变量 $t_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = t + [R_\beta - Ma_{\infty 1}(x_1 - y_1)]/(c_0\beta^2)$ 下进行, 因此, 需要将原先在时间序列 t 下的声源插值到 t_1 下。

2.2 四极子修正模型

对于静止积分面, 在积分面足够大或来流马赫数较低的工况下, 积分面以外的远场噪声可以由单极子项和偶极子项的贡献叠加得到。但是, 在较高来流马赫数下, 由积分面截断引起的误差可能与单极子项和偶极子项的贡献处于同一量级^[26-27]。因此, 从式(5)中的四极子项出发, 基于泰勒冻结流假设给出截断误差的远场近似面积分形式。需要注意的是, 积分面运动导致的截断误差也被纳入考虑。

四极子声源的贡献如下:

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_Q(\mathbf{x}, \omega) = & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \mathcal{F}\{T_{ij}(\mathbf{y}, t)H[f(\mathbf{y}, t)]\} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_Q(\mathbf{x}, \omega) = & \\ \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F} \{T_{ij}(\mathbf{y}, t)H[f(\mathbf{y}, t)]\} \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i \partial y_j} d\mathbf{y} & \quad (17) \end{aligned}$$

将其中的傅里叶变换展开得到:

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_Q(\mathbf{x}, \omega) = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_{ij}(\mathbf{y}, t)H[f(\mathbf{y}, t)] \\ & \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i \partial y_j} \exp(-i\omega t) dt d\mathbf{y} \quad (18) \end{aligned}$$

利用二维频域格林函数的远场渐近, 其二阶空间偏导数在远场可以写为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i \partial y_j} \approx & \left(\frac{i\omega}{c_0\beta^2}\right)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) \\ \varphi = & Ma_{\infty 1}x_1 - Ma_{\infty 1}y_1 - R_\beta \quad (19) \end{aligned}$$

将格林函数的二阶偏导数代入式(18)可以得到:

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_Q(\mathbf{x}, \omega) = & C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_{ij}H(f)A_{ij} \\ & \exp[-i\omega(t - \varphi/c_0\beta^2)] dt d\mathbf{y} \\ C = & \left(\frac{-i}{4}\right) \left(\frac{2}{\pi k}\right)^{0.5} \left(\frac{i\omega}{c_0\beta^2}\right)^2 \exp(i\pi/4) \\ A_{ij} = & \left(\frac{1}{R_\beta}\right)^{0.5} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \quad (20) \end{aligned}$$

关于时间进行分部积分, 得到:

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_Q(\mathbf{x}, \omega) = & -C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{\omega} \frac{\partial [T_{ij}H(f)]}{\partial t} \\ & A_{ij} \exp[-i\omega(t - \varphi/c_0\beta^2)] dt d\mathbf{y} \quad (21) \end{aligned}$$

上式可进一步写为:

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_Q(\mathbf{x}, \omega) = & \tilde{p}'_{Q1}(\mathbf{x}, \omega) + \tilde{p}'_{Q2}(\mathbf{x}, \omega) \\ \tilde{p}'_{Q1}(\mathbf{x}, \omega) = & -C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{\omega} \frac{\partial H(f)}{\partial t} T_{ij}A_{ij} \\ & \exp[-i\omega(t - \varphi/c_0\beta^2)] dt d\mathbf{y} \\ \tilde{p}'_{Q2}(\mathbf{x}, \omega) = & -C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{\omega} \frac{\partial T_{ij}}{\partial t} H(f)A_{ij} \\ & \exp[-i\omega(t - \varphi/c_0\beta^2)] dt d\mathbf{y} \quad (22) \end{aligned}$$

利用 Heaviside 函数的性质^[1]

$$\frac{\partial H(f)}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \delta(f) \quad (23)$$

式(22)中的 $\tilde{p}'_{Q1}(\mathbf{x}, \omega)$ 可以写为:

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_{Q1}(\mathbf{x}, \omega) = & C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{\omega} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \delta(f)] A_{ij} T_{ij} \\ & \exp[-i\omega(t - \varphi/c_0\beta^2)] dt d\mathbf{y} \quad (24) \end{aligned}$$

利用 $\delta(f)$ 的筛选性质(the sifting property of $\delta(f)$),

$\tilde{p}'_{Q1}(\mathbf{x}, \omega)$ 可以写为轮廓积分的形式:

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_{Q1}(\mathbf{x}, \omega) = & C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{f=0} \frac{i}{\omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) A_{ij} T_{ij} \\ & \exp[-i\omega(t - \varphi/c_0\beta^2)] dl dt \quad (25) \end{aligned}$$

为将 $\tilde{p}'_{Q2}(\mathbf{x}, \omega)$ 同样化为面积分, 需要使用泰勒冻结流假设, 即认为 Lighthill 应力张量近似满足对流方程:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial t} + \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla T_{ij} = 0 \quad (26)$$

其中, \mathbf{U}_∞ 为来流速度矢量。需要注意的是, Lighthill 应力张量的对流速度可以有多种确定方式, 如局部平均或交叉关联。本文选取了一种比较直接的定义方式, 这种方式在速度亏损较小的区域不会引起较大误差。将 Lighthill 应力张量满足的对流方程代入式(22)的 $\tilde{p}'_{Q2}(\mathbf{x}, \omega)$ 中, 得到:

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_{Q2}(\mathbf{x}, \omega) = & C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{f>0} \frac{i}{\omega} (\mathbf{U}_\infty \cdot \nabla T_{ij}) A_{ij} \\ & \exp[-i\omega(t - \varphi/c_0\beta^2)] dy dt \quad (27) \end{aligned}$$

利用分部积分, 上式可进一步写为:

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_{Q2}(\mathbf{x}, \omega) = & -C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{f=0} \frac{i}{\omega} (\mathbf{U}_\infty \cdot \mathbf{n}) T_{ij} A_{ij} \\ & \exp[-i\omega(t - \varphi/c_0\beta^2)] dl dt - \\ & C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{f>0} \frac{i}{\omega} (\mathbf{U}_\infty \cdot \nabla \varphi) \\ & \frac{i\omega}{c_0\beta^2} T_{ij} A_{ij} \exp[-i\omega(t - \varphi/c_0\beta^2)] dy dt \quad (28) \end{aligned}$$

式中的 $\nabla \varphi$ 为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = & -Ma_{\infty 1} - \frac{y_1 - x_1}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \beta^2(x_2 - y_2)^2}} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = & -\frac{y_2 - x_2}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \beta^2(x_2 - y_2)^2}} \quad (29) \end{aligned}$$

利用远场条件, 即 $|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{y}|$, 得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \approx & -Ma_{\infty 1} + \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + \beta^2 x_2^2}} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \approx & \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + \beta^2 x_2^2}} \quad (30) \end{aligned}$$

得到的 $\nabla \varphi$ 仅与观测点位置相关, 可将式(28)中的 $\mathbf{U}_\infty \cdot \nabla \varphi$ 由积分号中提取出来, 得到:

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_{Q2}(\mathbf{x}, \omega) = & -C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{f=0} \frac{i}{\omega} (\mathbf{U}_\infty \cdot \mathbf{n}) T_{ij} A_{ij} \\ & \exp[-i\omega(t - \varphi/c_0\beta^2)] dl dt + (\mathbf{U}_\infty \cdot \nabla \varphi) \frac{C}{c_0\beta^2} \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{f>0} T_{ij} A_{ij} \exp[-i\omega(t - \varphi/c_0\beta^2)] dy dt \quad (31) \end{aligned}$$

根据式(16), 可以进一步将 $\tilde{p}'_{Q2}(\mathbf{x}, \omega)$ 写为:

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_{Q2}(\mathbf{x}, \omega) = & -C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{f=0}^{\infty} \frac{i}{\omega} (\mathbf{U}_{\infty} \cdot \mathbf{n}) T_{ij} A_{ij} \\ & \exp[-i\omega(t - \varphi/c_0\beta^2)] dldt + \\ & (\mathbf{U}_{\infty} \cdot \nabla\varphi) \frac{1}{c_0\beta^2} \tilde{p}'_Q(\mathbf{x}, \omega) \end{aligned} \quad (32)$$

将式(32)和(25)代入式(22), 得到:

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_Q(\mathbf{x}, \omega) = & C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{f=0}^{\infty} \frac{i}{\omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) A_{ij} \\ & \exp[-i\omega(t - \varphi/c_0\beta^2)] dldt - \\ & C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{f=0}^{\infty} \frac{i}{\omega} (\mathbf{U}_{\infty} \cdot \mathbf{n}) \\ & T_{ij} A_{ij} \exp[-i\omega(t - \varphi/c_0\beta^2)] dldt + \\ & (\mathbf{U}_{\infty} \cdot \nabla\varphi) \frac{1}{c_0\beta^2} \tilde{p}'_Q(\mathbf{x}, \omega) \end{aligned} \quad (33)$$

利用上式可以解出 $\tilde{p}'_Q(\mathbf{x}, \omega)$:

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_Q(\mathbf{x}, \omega) = & \tilde{p}'_{QMS}(\mathbf{x}, \omega) + \tilde{p}'_{QMQ}(\mathbf{x}, \omega) \\ \tilde{p}'_{QMS}(\mathbf{x}, \omega) = & \left[\frac{c_0\beta^2}{c_0\beta^2 - (\mathbf{U}_{\infty} \cdot \nabla\varphi)} \right] C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{f=0}^{\infty} \frac{i}{\omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \\ & T_{ij} A_{ij} \exp[-i\omega(t - \varphi/c_0\beta^2)] dldt \\ \tilde{p}'_{QMQ}(\mathbf{x}, \omega) = & - \left[\frac{c_0\beta^2}{c_0\beta^2 - (\mathbf{U}_{\infty} \cdot \nabla\varphi)} \right] C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{f=0}^{\infty} \frac{i}{\omega} (\mathbf{U}_{\infty} \cdot \mathbf{n}) \\ & T_{ij} A_{ij} \exp[-i\omega(t - \varphi/c_0\beta^2)] dldt \end{aligned} \quad (34)$$

至此, 我们发现四极子声源的贡献由两项组成: 一项来自于运动积分面的截断, 对应于式(34)中的 $\tilde{p}'_{QMS}(\mathbf{x}, \omega)$; 另一项则主要产生于四极子声源的对流, 表示为 $\tilde{p}'_{QMQ}(\mathbf{x}, \omega)$ 。

为利用快速傅里叶变换进一步减少计算量, 参考 Zhou 等^[28]的工作, 考虑如式(10)所示的变量代换, 得到:

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_Q(\mathbf{x}, \omega) = & \left[\frac{c_0\beta^2}{c_0\beta^2 - (\mathbf{U}_{\infty} \cdot \nabla\varphi)} \right] \\ & \frac{i}{\omega} C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{f=0}^{\infty} \frac{1}{1 + Ma_{t_1}} [(\mathbf{v} - \mathbf{U}_{\infty}) \cdot \mathbf{n}] \\ & A_{ij} \exp(-i\omega t_1) dldt_1 \end{aligned} \quad (35)$$

同样可将上式中的时间积分写为傅里叶变换形式:

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_Q(\mathbf{x}, \omega) = & \left[\frac{c_0\beta^2}{c_0\beta^2 - (\mathbf{U}_{\infty} \cdot \nabla\varphi)} \right] \frac{i}{\omega} C \\ & \int_{f=0}^{\infty} \mathcal{F} \left\{ \frac{A_{ij}}{1 + Ma_{t_1}} [(\mathbf{v} - \mathbf{U}_{\infty}) \cdot \mathbf{n}] \right\} dl \end{aligned} \quad (36)$$

根据 Zhou 等^[28]的工作, 与式(34)相比, 式(35)和(36)可以采用非均匀快速傅里叶变换进行求解,

对于多频噪声问题可以节省大量计算时间。但是, 当式(35)和(36)被积函数的分母 $1 + Ma_{t_1} = 0$ 时, 两式出现奇异性问题, 这与时域 FW-H 积分中的多普勒奇异性问题相同。根据 Brentner 的工作^[29], 在时域 FW-H 积分中, 对于任意运动的 FW-H 积分面, 当积分面向观测点的运动速度达到声速时, 出现被积函数分母为 0 的情况, 即 $|1 - Ma_r| = 0$, 此时时域 FW-H 积分出现奇异性, 需采用特殊数值手段处理。Brentner 将其称为“多普勒奇异性问题(Doppler singularity)”。当积分面速度足够快时, 可能出现 $|1 + Ma_{t_1}| = 0$, 式(35)和(36)同样会出现奇异性问题, Zhou 等^[28]同样称其为“多普勒奇异性问题”。另外, 需要注意的是, 在得到四极子通量模型的过程中, 本文多次使用了远场条件, 并且认为积分面上的 Lighthill 应力张量满足对流速度不随空间位置变化的冻结流假设。对于前者, 需进一步讨论能够适用该通量模型的观测点位置; 对于后者, 则需着重考虑 FW-H 积分面的位置, 使其落在对流速度较为均匀的远尾迹区。本文虽然是在二维框架下进行推导, 但是由于频域二维格林函数的远场渐近形式与三维格林函数相似, 所以本文方法也可以很方便地推广到三维工况中。三维形式的详细推导见本文附录。

3 结果与讨论

3.1 低雷诺数圆柱绕流

低雷诺数圆柱绕流辐射噪声常用于检验流动噪声计算模型和方法的正确性。针对该问题, 采用 FW-H 方程^[20]、直接数值模拟^[30]及精确格林函数^[31]等所得到的结果显示出一致性。Inoue 等^[30]系统研究了二维圆柱绕流辐射噪声的指向性、远场压力脉动关于马赫数的标度率及二维辐射噪声的远场衰减特性, 相关结果常被用作对比算例。将本文结果直接数值模拟结果^[30]比较, 检验所发展模型的有效性。

参考 Nitzkowski 等^[20]的工作, 数值求解 Navier-Stokes 方程作为声源。以圆柱中心为原点, 基于来流速度 $U_{\infty 1}$ 和圆柱直径 D 定义的雷诺数为 150, y_1 、 y_2 分别对应流向、垂向。圆柱边界采用浸入边界法处理, 计算域为 $[-10D, 15D]$ 和 $[-12D, 12D]$, 欧拉网格尺度为 $0.01D$, 时间推进步长为 $0.001D/U_{\infty 1}$ 。选取长方形 FW-H 积分面(图 1)。圆柱两侧及上游积分面分别为 $y_2 = \pm 2D$ 和 $y_1 = -D$, 计算声场采样步长为 $0.027D/U_{\infty 1}$, 每个涡脱周期约采样 200 次。

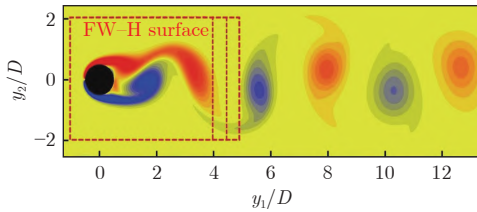
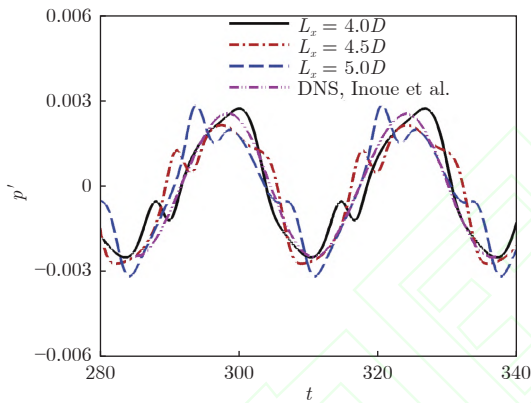


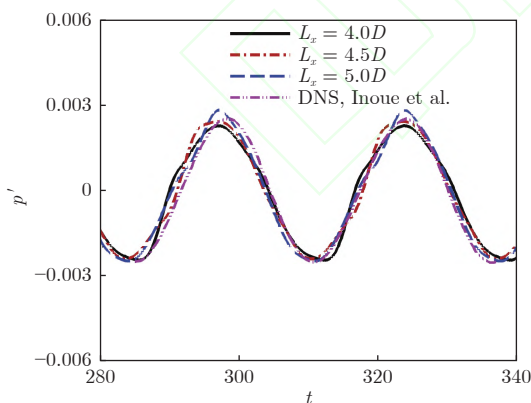
图 1 二维圆柱绕流涡量分布云图和 FW-H 积分面位置示意图

Fig. 1 Diagram of vorticity distribution of flows around a circular cylinder and the location of the FW-H integration surface

图 2(a) 给出了不同出口面 ($y_1 = 4D$ 、 $y_1 = 4.5D$ 、 $y_1 = 5D$) 下、观测点 ($0D, 100D$) 处未采用四极子通量模型修正的压力脉动计算结果 (来流马赫数 0.2)。由图可见, 基于不同出口面计算得到的远场压力脉动不一致。与直接数值模拟结果相比, 未经修正的远场声压信号中显示出更高频率的谐波, 表明远场噪声结果对 FW-H 积分面位置有依赖性。



(a) 未修正远场不同出口面噪声计算结果



(b) 修正后远场不同出口面噪声计算结果

图 2 不同出口面修正前后的远场噪声计算结果对比

Fig. 2 Comparison of far-field sound predicted by using formulations with and without quadrupole correction model

图 2(b) 展示了采用四极子通量模型得到的不同出口面远场压力脉动计算结果: 基于不同出口面计算得到的远场压力脉动一致, 且高频率谐波得到了抑制, 与直接数值模拟结果更接近。这说明本文模

型能够抑制远场噪声结果对 FW-H 积分面位置的依赖性, 并使其更接近直接数值模拟结果。更详细的圆柱绕流算例验证结果可参阅文献 [32]。

3.2 对流涡

二维对流涡是可压缩欧拉方程的一个精确解, 被广泛应用于四极子通量模型检验^[21, 26]。二维对流涡产生的压力 p 、密度 ρ 和速度场 (u, v) 如下^[21]:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{\gamma} [1 - a_2 \exp(1 - r^2)]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ \rho &= \left(\frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma} \\ u &= U_{\infty 1} - a_0 a_1 y_2 \exp[(1 - r^2)/2] \\ v &= a_0 a_1 (y_1 - Ma_{\infty 1} t) \exp[(1 - r^2)/2] \\ r^2 &= (y_1 - Ma_{\infty 1} t)^2 + y_2^2 \end{aligned} \quad (37)$$

其中, t 表示时刻, (y_1, y_2) 为空间中一点 (y_1, y_2) 到涡心 $(Ma_{\infty 1} t, 0)$ 的距离。常系数 a_0 、 a_1 、 a_2 分别为:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1/(2\pi), \quad a_2 = (\gamma - 1)a_0^2 a_1^2 / 2 \quad (38)$$

空气比热比 $\gamma = 1.4$, p_0 为背景流动的压力。以参考长度 L 、环境的声速 c_0 及密度 ρ 对式 (37) 中的所有物理量进行无量纲化。图 3 给出了随体坐标系下二维对流涡的压力变化。由图可见, 无量纲压力在远场趋近于常数 $1/\gamma$, 即远场噪声几乎消失。因此, 由式 (36) 估计的四极子通量对远场噪声的贡献应与式 (14) 和 (15) 给出的单极子项和偶极子项贡献之和的幅值相等、符号相反。

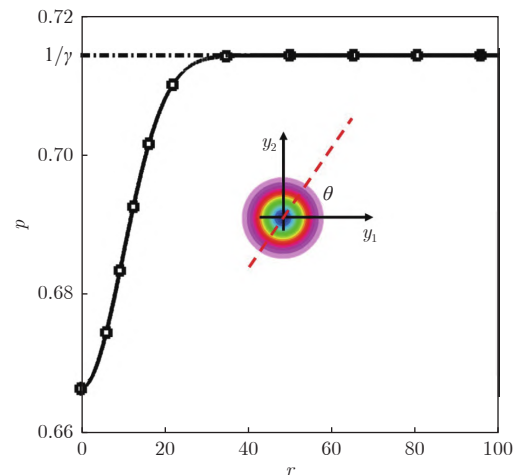


图 3 二维对流涡压力分布及坐标系定义示意图

Fig. 3 Diagram of the pressure distribution of a convecting vortex

为检验式 (36), 定义了如图 4 所示的旋转 FW-H 积分面。积分面为正方形, 边长为 $10L$, 中心位于原点, 积分面上各点按照频率 ω_{rot} 绕中心转动。由此, 可以利用转动频率 ω_{rot} 及 FW-H 面的边长

L_{FWH} 定义积分面的特征速度及特征马赫数 $u_{rot} = (\sqrt{2}/2)\omega_{rot}L_{FWH}$, $Ma_{rot} = (\sqrt{2}/2)\omega_{rot}L_{FWH}/c_0$.

图 5~7 给出了在来流马赫数 0.1、0.3、0.5 下利用式 (36) 得到的四极子项与利用式 (14) 和 (15) 得到

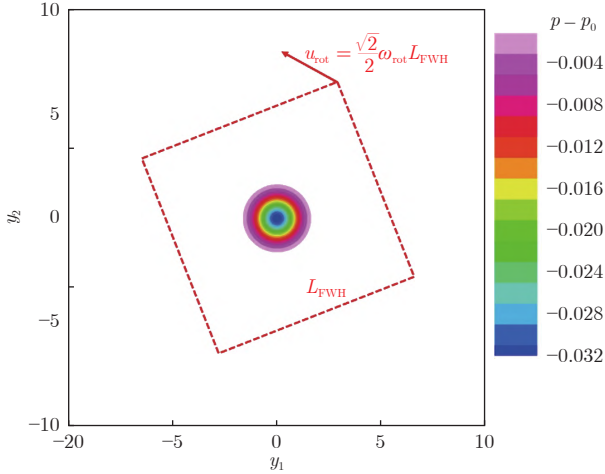


图 4 二维对流涡算例 FW-H 积分面位置及运动示意图
Fig. 4 Diagram of position and motion of the FW-H surface

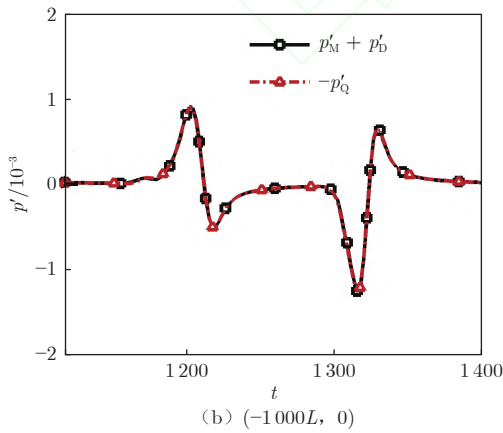
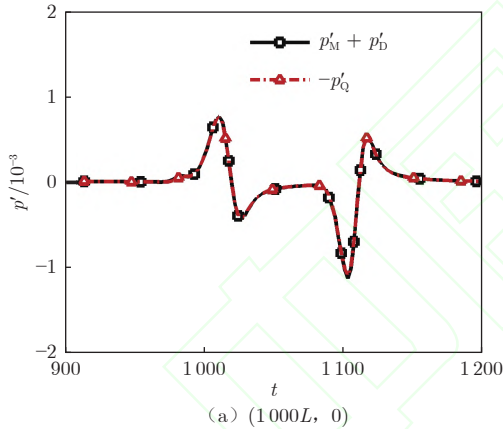


图 5 来流马赫数 0.1 的对流涡算例中，四极子项相反数与单极子项、偶极子项之和的对比
Fig. 5 Comparison between the negative quadrupole correction model and the summary of the monopole and dipole terms at the freestream Mach number 0.1

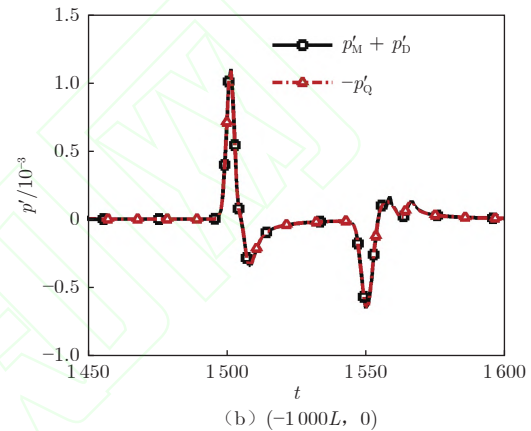
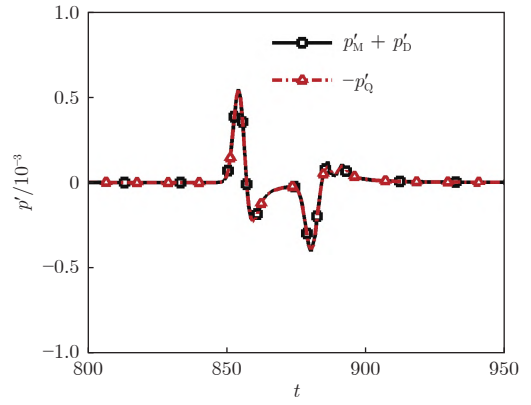
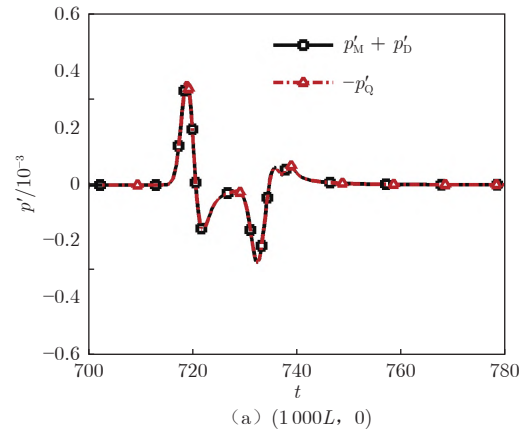


图 6 来流马赫数 0.3 的对流涡算例中，四极子项相反数与单极子项、偶极子项之和的对比
Fig. 6 Comparison between the negative quadrupole correction model and the summary of the monopole and dipole terms at the freestream Mach number 0.3

的单极子项和偶极子项之和的对比。积分面转动的特征马赫数与来流马赫数保持一致。远场观测点选在对流涡上下游距离原点 $1000L$ 处。由图 5~7 可见，在不同来流马赫数下，四极子项与偶极子项和单极子项之和互为相反数，符合对流涡在远场辐射噪声为 0 的结论。这说明利用式 (36) 能够准确估计出上下游远场观测点四极子通量的贡献，本文提出的



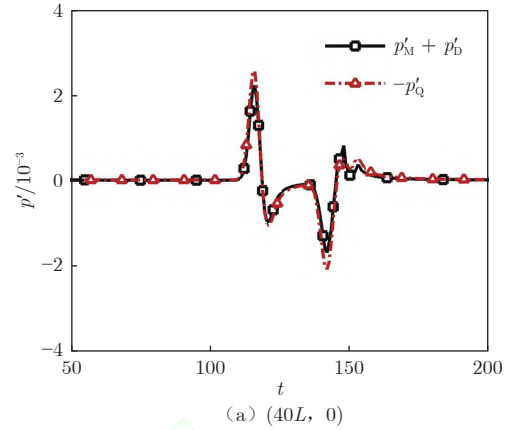
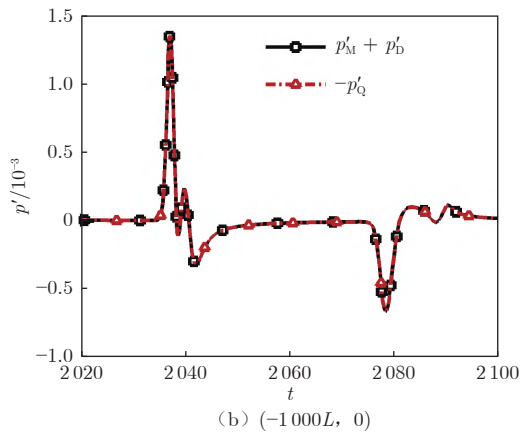


图7 来流马赫数 0.5 的对流涡算例中, 四极子项相反数与单极子项、偶极子项之和的对比

Fig. 7 Comparison between the negative quadrupole correction model and the summary of the monopole and dipole terms at the freestream Mach number 0.5

四极子通量模型成功考虑了积分面的运动, 给出了正确的远场噪声修正结果。

图 8 和 9 给出了观测点选在距离原点 $20L$ 和 $40L$ 处的压力脉动计算结果(来流马赫数 0.3), 积分

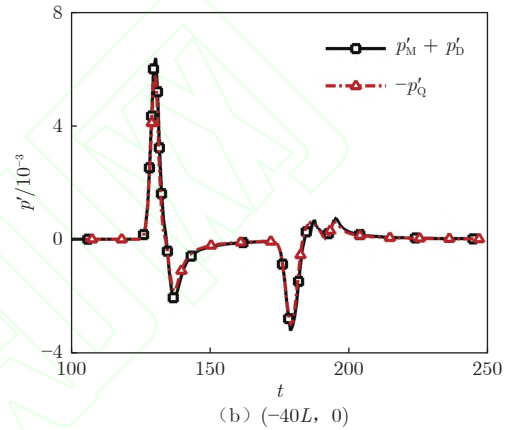


图9 来流马赫数 0.3 的对流涡算例中, 四极子项相反数与单极子项、偶极子项之和的对比

Fig. 9 Comparison between the negative quadrupole correction model and the summary of the monopole and dipole terms at the freestream Mach number 0.3

面转动的特征马赫数与来流马赫数保持一致。由图 8 可见: 在 $20L$ 处, 下游观测点的四极子项相反数与单极子项、偶极子项之和偏差较大, 而上游观测点则偏差较小; 在 $40L$ 处, 下游观测点的四极子项相反数与单极子项、偶极子项之和偏差较大, 但相比 $20L$ 处有所减小, 而上游观测点的偏差相比于 $20L$ 处的上游观测点进一步减小。出现偏差的原因可能是: 在所提模型的推导过程中, 使用了观测点位于声源区远场的假设, 而所计算的观测点距离声源区较近。这表明所提出的模型主要针对远场观测点有效。关于远场假设更为详细的分析可参考文献 [24]。

4 结论

针对 FW-H 积分中忽略四极子声源项所引起的虚假噪声问题, 本文在频域方法框架下简化了四极子通量模型的推导, 由此将四极子通量模型推广至运动可渗透面 FW-H 积分中。本文所提出的模型

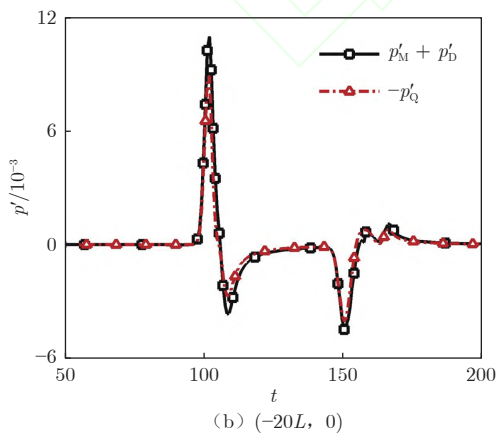
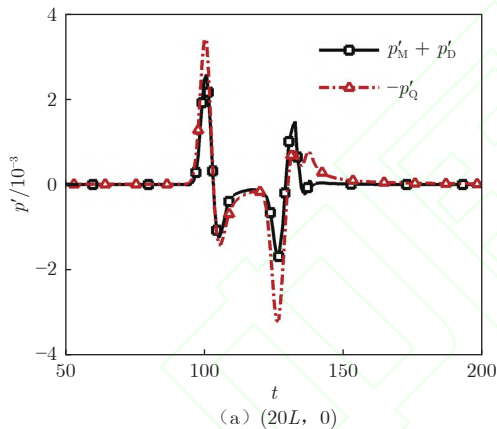


图8 来流马赫数 0.3 的对流涡算例中, 四极子项相反数与单极子项、偶极子项之和的对比

Fig. 8 Comparison between the negative quadrupole correction model and the summary of the monopole and dipole terms at the freestream Mach number 0.3

适用于亚声速来流的工况。利用二维对流涡算例和低雷诺数圆柱绕流算例对本文模型进行了检验, 结果表明: 该模型准确修正了四极子声源穿出静止及运动 FW-H 积分面所导致的虚假远场噪声。

需要注意的是, 在本文工作中, 四极子声源的对流速度需满足在积分面上均匀的条件。在本文中, 四极子声源的对流速度被强制取为来流速度, 因此, 下游 FW-H 积分面需取在远尾迹区, 以避免近尾迹区速度亏损对四极子声源对流速度的影响。另外, 还需关注多普勒奇异性对四极子通量模型的影响, 在某些工况下, 四极子通量模型(式(36))可能存在分母为 0 的情况, 使用式(34)所提供的时间积分形式能够避免多普勒奇异性。

致谢: 本文研究工作得到国家自然科学基金(基础科学中心项目, 编号 11988102; 重大研究计划重点支持项目, 编号 92252203)支持, 特此致谢。

参考文献:

- [1] JI J C, WANG C, WANG L A, et al. A recursive approach for aeroacoustic phased array measurements in wind tunnels[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2021, 150(1): 417-427.
doi:10.1121/10.0005543
- [2] LYU B, AZARPEYVAND M, SINAYOKO S. Prediction of noise from serrated trailing edges[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2016, 793: 556-588.
doi:10.1017/jfm.2016.132
- [3] TIAN H P, LYU B S. Prediction of broadband noise from rotating blade elements with serrated trailing edges[J]. *Physics of Fluids*, 2022, 34(8): 085109.
doi:10.1063/5.0094423
- [4] SUN X F, JIANG Y S, LIANG A, et al. An immersed boundary computational model for acoustic scattering problems with complex geometries[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2012, 132(5): 3190-3199.
doi:10.1121/1.4757747
- [5] LI H, LUO Y, ZHANG S H. Assessment of upwind/symmetric WENO schemes for direct numerical simulation of screech tone in supersonic jet[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2021, 87(1): 1-39.
doi:10.1007/s10915-020-01407-6
- [6] FLOWCS WILLIAMS J E, HAWKINGS D L. Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1969, 264(1151): 321-342.
doi:10.1098/rsta.1969.0031
- [7] TAY W B, LU Z B, RAMESH S S, et al. Numerical simulations of serrated propellers to reduce noise[M]//PANDA D K. *Supercomputing Frontiers*. Cham: Springer International Publishing, 2020: 87-103.
doi:10.1007/978-3-030-48842-0_6
- [8] SHUR M L, SPALART P R, STRELETS M K. Noise prediction for increasingly complex jets. part I: methods and tests[J]. *International Journal of Aeroacoustics*, 2005, 4(3): 213-245.
doi:10.1260/1475472054771376
- [9] RICHARDS S K, CHEN X X, HUANG X, et al. Computation of fan noise radiation through an engine exhaust geometry with flow[J]. *International Journal of Aeroacoustics*, 2007, 6(3): 223-241.
doi:10.1260/147547207782419534
- [10] ZHANG Y F, CHEN H X, WANG K, et al. Aeroacoustic prediction of a multi-element airfoil using wall-modeled large-eddy simulation[J]. *AIAA Journal*, 2017, 55(12): 4219-4233.
doi:10.2514/1.j055853
- [11] GAO J H, LI X D. Numerical simulation of the noise from a subsonic jet in static and flight conditions[C]//Proc of the Proceedings of the 25th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2019: AIAA2019-2666.
doi:10.2514/6.2019-2666
- [12] ZHANG P K, LIU Y, LI Z Y, et al. Numerical study on reducing aerodynamic drag and noise of circular cylinders with non-uniform porous coatings[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2020, 107: 106308.
doi:10.1016/j.ast.2020.106308
- [13] LOCKARD D P. An efficient, two-dimensional implementation of the Ffowcs Williams and Hawkings equation[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 229(4): 897-911.
doi:10.1006/jsvi.1999.2522
- [14] BOZORGI A, SIOZOS-ROUSOULIS L, AHMAD NOURBA-KHSH S, et al. A two-dimensional solution of the FW-H equation for rectilinear motion of sources[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2017, 388: 216-229.
doi:10.1016/j.jsv.2016.10.035
- [15] SHUR M L, SPALART P R, STRELETS M K. Noise prediction for increasingly complex jets. part II: applications[J]. *International Journal of Aeroacoustics*, 2005, 4(3): 247-266.
doi:10.1260/1475472054771385
- [16] ZHONG S Y, ZHANG X. A sound extrapolation method for aeroacoustics far-field prediction in presence of vortical waves[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2017, 820: 424-450.
doi:10.1017/jfm.2017.219
- [17] ZHONG S Y, ZHANG X. A generalized sound extrapolation method for turbulent flows[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2018, 474(2210): 20170614.
doi:10.1098/rspa.2017.0614
- [18] ZHONG S Y, ZHANG X. On the frequency domain formulation of the generalized sound extrapolation method[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2018, 144(1): 24-31.
doi:10.1121/1.5044515
- [19] WANG M, LELE S K, MOIN P. Computation of quadrupole noise using acoustic analogy[J]. *AIAA Journal*, 1996, 34(11): 2247-2254.
doi:10.2514/3.13387
- [20] NITZKORSKI Z, MAHESH K. A dynamic end cap technique for sound computation using the Ffowcs Williams and Hawkings equations[J]. *Physics of Fluids*, 2014, 26(11): 115101.

- doi:10.1063/1.4900876
- [21] LOCKARD D, CASPER J. Permeable surface corrections for Ffowcs Williams and Hawkings integrals[C]//Proc of the Proceedings of the 11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2005.
doi:10.2514/6.2005-2995
- [22] ZHOU Z T, WANG H P, WANG S Z, et al. Lighthill stress flux model for Ffowcs Williams–Hawkings integrals in frequency domain[J]. AIAA Journal, 2021, 59(11): 4809–4814.
doi:10.2514/1.j060070
- [23] ZHOU Z T, WANG H P, WANG S Z. Simplified permeable surface correction for frequency-domain Ffowcs Williams and Hawkings integrals[J]. Theoretical and Applied Mechanics Letters, 2021, 11(4): 100259.
doi:10.1016/j.taml.2021.100259
- [24] ZHOU Z T, ZANG Z Y, WANG H P, et al. Far-field approximations to the derivatives of Green's function for the Ffowcs Williams and Hawkings equation[J]. Advances in Aerodynamics, 2022, 4(1): 1–23.
doi:10.1186/s42774-022-00109-x
- [25] NAJAFI-YAZDI A, BRÈS G A, MONGEAU L. An acoustic analogy formulation for moving sources in uniformly moving media[J]. Proceedings of the Royal Society A:Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2011, 467(2125): 144–165.
doi:10.1098/rspa.2010.0172
- [26] IKEDA T, ENOMOTO S, YAMAMOTO K, et al. Quadrupole corrections for the permeable-surface Ffowcs Williams–Hawkings equation[J]. AIAA Journal, 2017, 55(7): 2307–2320.
doi:10.2514/1.j055328
- [27] IKEDA T, ENOMOTO S, YAMAMOTO K, et al. Quadrupole effects in the Ffowcs Williams–Hawkings equation using permeable control surface[C]//Proc of the Proceedings of the 18th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (33rd AIAA Aeroacoustics Conference). 2012.
doi:10.2514/6.2012-2069
- [28] ZHOU Z T, WANG H P, ZANG Z Y, et al. A frequency-domain formulation for predicting multi-frequency noise generated by flows with periodically moving boundaries[J]. Journal of Theoretical and Computational Acoustics, 2023, 31(1): 2350001.
doi:10.1142/s2591728523500019
- [29] BRENTNER K S. Numerical algorithms for acoustic integrals with examples for rotor noise prediction[J]. AIAA Journal, 1997, 35(4): 625–630.
doi:10.2514/3.13558
- [30] INOUE O, HATAKEYAMA N. Sound generation by a two-dimensional circular cylinder in a uniform flow[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2002, 471: 285–314.
doi:10.1017/s0022112002002124
- [31] GLOERFELT X, PÉROT F, BAILLY C, et al. Flow-induced cylinder noise formulated as a diffraction problem for low Mach numbers[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 287(1-2): 129–151.
doi:10.1016/j.jsv.2004.10.047
- [32] 周志腾, 王洪平, 王士召, 等. 基于关联速度的FW-H积分四极子声源修正模型[J]. 空气动力学学报, 2020, 38(6): 1129–1135.
ZHOU Z T, WANG H P, WANG S Z, et al. Quadrupole

source term corrections based on correlation functions for Ffowcs Williams and Hawkings integrals[J]. Acta Aerodynamica Sinica, 2020, 38(6): 1129–1135.

(编辑: 孙春晖)

附录: 三维四极子修正模型

在本附录中, 我们通过替换格林函数, 给出考虑运动面的四极子修正模型的三维形式, 首先写出三维自由空间的格林函数:

$$G_{3D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \frac{1}{4\pi d} \exp[\varphi_{3D}(\mathrm{i}\omega/c_0\beta^2)]$$

$$\varphi_{3D} = Ma(x_1 - y_1) - d$$

$$d = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \beta^2(x_2 - y_2)^2 + \beta^2(x_3 - y_3)^2} \quad (\text{A1})$$

利用三维频域格林函数的远场渐近, 其二阶空间偏导数在远场可以写为:

$$\frac{\partial^2 G_{3D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)}{\partial y_i \partial y_j} \approx \left(\frac{\mathrm{i}\omega}{c_0\beta^2} \right)^2 \frac{\partial \varphi_{3D}}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi_{3D}}{\partial y_j} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)$$

$$\varphi = Max_1 - May_1 - d \quad (\text{A2})$$

将格林函数的二阶偏导数代入式(18), 可以得到:

$$\tilde{p}'_Q(\mathbf{x}, \omega) = C_{3D} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_{ij} H(f) A_{ij3D} \exp[-\mathrm{i}\omega(t - \varphi_{3D}/c_0\beta^2)] dt d\mathbf{y}$$

$$C_{3D} = \frac{1}{4\pi}$$

$$A_{ij3D} = \left(\frac{1}{d} \right) \frac{\partial \varphi_{3D}}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi_{3D}}{\partial y_j} \quad (\text{A3})$$

关于时间进行分部积分, 得到:

$$\tilde{p}'_Q(\mathbf{x}, \omega) = -C_{3D} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{i}}{\omega} \frac{\partial [T_{ij} H(f)]}{\partial t} A_{ij3D} \exp[-\mathrm{i}\omega(t - \varphi_{3D}/c_0\beta^2)] dt d\mathbf{y} \quad (\text{A4})$$

与式(34)的推导一致, 上式可以化为:

$$\tilde{p}'_Q(\mathbf{x}, \omega) = \tilde{p}'_{QMS}(\mathbf{x}, \omega) + \tilde{p}'_{QMQ}(\mathbf{x}, \omega)$$

$$\tilde{p}'_{QMS}(\mathbf{x}, \omega) = \left[\frac{c_0\beta^2}{c_0\beta^2 - (\mathbf{U} \cdot \nabla \varphi_{3D})} \right] C_{3D} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{f=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}}{\omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) T_{ij} A_{ij3D} \exp[-\mathrm{i}\omega(t - \varphi_{3D}/c_0\beta^2)] dS dt$$

$$\tilde{p}'_{QMQ}(\mathbf{x}, \omega) = - \left[\frac{c_0\beta^2}{c_0\beta^2 - (\mathbf{U} \cdot \nabla \varphi_{3D})} \right] C_{3D} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{f=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}}{\omega} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) T_{ij} A_{ij3D} \exp[-\mathrm{i}\omega(t - \varphi_{3D}/c_0\beta^2)] dS dt \quad (\text{A5})$$

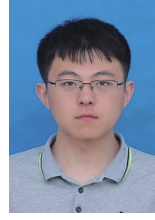
利用快速傅里叶变换进一步减少计算量。参考

Zhou 等^[28] 工作, 考虑式(10)所示的变量代换, 得到:

$$\begin{aligned} \tilde{p}'_Q(\mathbf{x}, \omega) &= \left[\frac{c_0 \beta^2}{c_0 \beta^2 - (\mathbf{U} \cdot \nabla \varphi_{3D})} \right] \\ &\frac{i}{\omega} C_{3D} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{f=0} \frac{1}{1 + Ma_{t_1}} [(\mathbf{v} - \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}] \\ &A_{ij3D} \exp(-i\omega t_1) dS dt_1 \\ Ma_{t_1 3D} &= \frac{d \{ [d - Ma(x_1 - y_1)] / c_0 \beta^2 \}}{dt_1} \quad (A6) \end{aligned}$$

式(44)即为考虑运动可渗透面的三维四极子修正模型。

作者简介:



周志腾(1996—), 男, 江苏盐城人, 博士研究生。研究方向: 湍流噪声。通信地址: 北京市海淀区北四环西路 15 号中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室(100190)。

E-mail: zhouzhiteng18@mailsucas.ac.cn

(编辑: 孙春晖)