



摩擦对力链中动态能量耗散的影响机制研究

王志超^{1,2}, 彭青^{1,2}, 刘畅^{1,2}, 刘小明^{1,2*}, 魏悦广³

1. 中国科学院力学研究所, 非线性力学国家重点实验室, 北京 100190;

2. 中国科学院大学工程科学学院, 北京 100049;

3. 北京大学工学院, 北京 100871

*联系人, E-mail: xiaomingliu@imech.ac.cn

收稿日期: 2023-08-29; 接受日期: 2023-12-19; 网络出版日期: 2024-04-29

国家自然科学基金(编号: 12022210, 12032001)和中国科学院青年创新促进会优秀会员(编号: 2018022)资助项目

摘要 本文建立了一个两侧受到约束的有限长一维颗粒系统模型, 探究了摩擦对颗粒材料耗能机制的影响. 本文采用离散元方法研究该动力学过程中能量的耗散机理, 模型中颗粒之间、颗粒和约束之间的法向接触采用非线性Hertz接触模型, 切向接触采用Mindlin剪切模型, 通过分析主孤立波的幅值和波速以及颗粒间接触力的衰减规律探究颗粒材料能量耗散机制. 结果表明: 受到冲击的一维颗粒链中会产生一道主孤立波, 孤立波的幅度在远小于颗粒间最大接触力的摩擦力作用下仍然会产生显著的衰减; 摩擦力的存在使得系统中的动态能量会在有限深度内耗散; 此耗散深度依赖于摩擦力的大小. 根据能量传播路径上的耗散规律, 将耗散过程可分为非线性接触主导过程、中间过程、摩擦和接触混合主导过程三个阶段, 分别分析了每阶段相应的力学机制.

关键词 颗粒材料, 摩擦耗散, 冲击吸能, 非线性接触

PACS: 02.70.Bf, 02.70.Ns, 45.50.Tn, 83.80.Fg

1 引言

颗粒材料的研究有悠久的历史, 其应用涉及人类社会的许多方面, 在很多工程问题中有重要意义^[1,2]. 由于不规则的颗粒形貌, 颗粒间存在很强的接触非线性; 颗粒间随机排布并存在摩擦力, 使得颗粒材料表现出独特的力学性能. 颗粒材料具有很强的防冲击吸能能力, 过去的大量研究主要关注力在颗粒材料体系中的传播与耗散, 解释颗粒材料传递载荷的机制: 例如, 颗粒材料的抗冲击特性以及承载载荷的能力^[3-5],

微扰下宏观摩擦系数、黏滑效应、记忆效应等, 冲击下的耦合动力学特性^[6-15], 以及剪切时的颗粒尺度排布问题^[16-21]. 对于这类颗粒材料的数值模拟和实验研究, 虽然已经获得了大量规律性的、经验性的认识, 但仍缺乏对其在动态冲击响应下的力学机制理解. 由于系统的无序性以及复杂的非线性, 给颗粒材料的动态耗散性能研究带来了困难, 尤其是缺少成熟的理论模型, 导致人们对该材料防冲击能力的理解尚不完整, 缺乏对力和能量在颗粒材料中传播机制的研究.

由于颗粒材料系统中复杂的排列与接触关系, 系

引用格式: 王志超, 彭青, 刘畅, 等. 摩擦对力链中动态能量耗散的影响机制研究. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2024, 54: 254616
Wang Z C, Peng Q, Liu C, et al. Effect of friction on dynamic energy dissipation in granular chain (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2024, 54: 254616, doi: 10.1360/SSPMA-2023-0307

统中形成了大量的摩擦对, 进而耗散材料受到的外部载荷(功). 研究表明, 在颗粒材料中力主要沿着力链传播^[22-26], 通过离散元数值模拟和实验光学观测可以获得力链的形成原因和结构. 力链通常由一系列排列紧密的颗粒构成, 在受力时结构稳定, 几乎不会发生位置变动, 而力链以外的颗粒则大多处于无接触力的状态.

一维颗粒系统很早之前就受到广泛关注, 有大量理论和实验方面的工作对其进行了深入研究. 在无摩擦一维系统受到冲击时, 系统中会形成一个宽度、幅值和传播速度都保持恒定的波, 称为孤立波, 其性质与应用有着广泛和重要的作用. 例如, 对一维颗粒系统与弹性体接触问题的研究^[27-32], 包括与有限厚度平面、梁和板壳等弹性体的接触问题, 观察其反射波的性质如何受影响; 利用孤立波在一维颗粒链上传播与反射特性而进行的无损探测的研究^[33-36], 可以通过反射波与入射波的对比和时间差等特性推测与其接触弹性体的物理特性; 以及利用周期性改变一维颗粒系统而控制孤立波的传播的研究^[37-41], 即通过调整颗粒材料、大小等使得幅值、宽度和波速维持稳定的孤立波发生显著的衰减或色散行为, 亦或是限制某些频率的声波的传播等一系列应用.

一方面, 由于三维颗粒系统的复杂性, 在实验上难以通过有效的观测手段测量接触力、变形、位移和速度等物理量; 另一方面, 由于系统存在很强的非线性, 数值计算往往需要庞大的计算量, 所以许多研究采用二维颗粒系统, 探索力和能量在其中的传播机理. 例如, 在实验上通过光学的方法观察颗粒的变形和位移, 以及在数值计算上利用分子动力学软件计算整个动力学过程. 此类工作皆观察到了在受力时系统中力链的存在和构成, 其形成机理也有相应的理论研究进行探索. 由于构成力链的颗粒没有很高的惯性力, 所以力链在承载和传播外载荷的同时不会产生显著的位移, 除非力链破坏与再生, 颗粒系统发生流动, 表现出类似流体的性质. 然而此类的许多研究并不能明确力链的作用机理, 在理论上也很难有深刻的认识. 在过去许多研究人员探究了孤立的一维颗粒系统对能量耗散的作用和机理, 然而无论是从实验上还是实际应用上, 一维颗粒链也总会不可避免地与环境发生接触, 产生相互作用.

力链的形成和破坏与颗粒材料所表现的宏观力学性能关系密切. 在过去对于一维力链上孤立波的研究

中, 忽略了外部环境对球链的摩擦耗散影响. 然而, 真实的颗粒材料体系中, 力链并非孤立存在, 周边颗粒对力链中的颗粒通过接触力形成摩擦作用, 这对三维颗粒材料中的能量耗散具有非常大的影响. 因此, 力链上摩擦对能量耗散的内在力学规律具有重要的意义. 本文主要研究外部摩擦作用对该一维力链的耗散作用, 给出摩擦对波的传播速度、耗散深度以及波能量的传播效率的影响规律.

2 模型介绍

本文将建立一个有限长度受约束和冲击的一维颗粒系统模型, 通过数值计算的方式研究其动力学响应, 以探究摩擦力对颗粒材料能量耗散性能的影响. 数值计算所建立的模型如图1所示. 模型由 N 个半径为 R 的颗粒排列组成(在下文的计算中, 根据需要 N 采用25-250之间的整数), 质心的初始位置坐标为 $x_i = (2i - 1)R, y_i = 0, i = 1, 2, \dots, N$, 两侧有关于 $y = 0$ 对称的刚性平面与颗粒接触. 左侧首个颗粒不受两侧刚性平面的约束, 在初始时刻以速度 V_0 冲击第二个颗粒. 动力学响应不考虑重力的作用.

颗粒之间、颗粒与刚性平面之间的法向接触力的计算采用Hertz接触模型. 在小变形条件下, 这些接触力由接触点的等效刚度和压缩位移决定^[42,43]. 即

$$F_{ij}^{(n)} = K_n \delta_{ij}^{\frac{3}{2}}, \quad (1)$$

其中, $\delta_{ij} = 2R - r_{ij}$, $r_{ij} = r_i - r_j$. K_n 为等效接触刚度, 由颗粒的材料性质和几何特性决定. $K_n = (\theta_1 + \theta_2) \times (R_1^{-1} + R_2^{-1})^{1/2}$, 其中 θ_1 和 θ_2 是两互相接触物体的等效杨氏模量, $\theta = 3(1 - \nu^2) / (4Y)$, ν 为材料泊松比, Y 为材料杨氏模量. R_1 和 R_2 是两互相接触物体的等效半径. 类比式(1), 颗粒与墙壁之间的压缩位移由法向压力 F_y 决定, $F_{iw}^{(n)} \equiv F_y = K_n \delta_{iw}^{\frac{3}{2}}$.

当颗粒与刚性约束之间发生剪切相对位移时, 由于摩擦力的存在, 接触点会发生剪切变形. 剪切变形与摩擦力之间的关系采用Mindlin剪切模型^[42,43], 即

$$F_{iw}^{(t)} = -K_t \delta_{iw}^{\frac{1}{2}} t_{iw}, \quad (2)$$

其中, t_{iw} 为颗粒与刚性约束之间的剪切相对位移, K_t 为

等效剪切刚度, 文献中通常选用 $K_t = 2K_n / 7$ ^[41,42].

摩擦力的最大值采用库仑摩擦极限, 即

$$F_{iw}^{(i)} \leq \mu F_{iw}^{(n)}, \quad (3)$$

其中, μ 为库仑摩擦系数. 结合式(1)–(3)可得 $t_{iw} \leq 7\mu\delta_{iw}/2$, 即剪切位移的最大值由摩擦系数与法向接触位移确定(图2). 由于此极限, 剪切位移需要通过增量法求得, 即

$$dt_{iw} = dx_i, \quad (4)$$

其中, dx_i 为第 i 个颗粒在 x 方向的位移改变量.

建立每一个颗粒的运动微分方程, 即

$$m \frac{d^2 r_i}{dt^2} = F_i(r_{i-1}, r_i, r_{i+1}), \quad (5)$$

其中, m 为颗粒的质量; F_i 为每一个颗粒受到的合外力, 根据式(1)和(2)可知, F_i 可由位移确定

$$F_i = \begin{cases} F_{i,i+1}^{(n)}, & i = 1, \\ F_{i,i+1}^{(n)} + F_{i,i-1}^{(n)} + 2F_{iw}^{(i)}, & 1 < i < N, \\ F_{i,i-1}^{(n)} + 2F_{iw}^{(i)}, & i = N. \end{cases} \quad (6)$$

本文选取文献[37]的实验条件, 以石英圆球的材料参

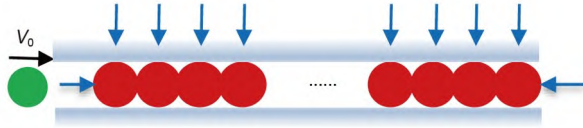


图 1 (网络版彩图) 本计算所采用的一维颗粒链模型示意图
Figure 1 (Color online) Schematic illustration of the one-dimensional particle chain in this study.

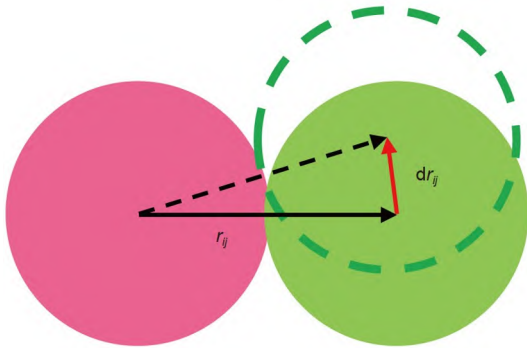


图 2 (网络版彩图) 接触点剪切变形增量示意图
Figure 2 (Color online) Schematic illustration of the shear deformation increment at each contact point.

数和几何参数作为数值计算模型的数据, 如表1所示. 使用中心差分法求解方程(5)即可得到系统的动力学响应. 为提高计算精度和减少数值积分误差, 数值计算采用的时间步长为 2×10^{-8} s.

在本文所采用的计算模型中, 设置摩擦系数为0时, 系统将退化成一维无摩擦系统. 图3展示了一个 $N = 80$ 的一维无摩擦系统在 $V_0 = 0.88$ m/s 的冲击作用下的动力学响应, 提取了 $i = 10$ 和 $i = 70$ 两个位置的速度时间曲线, 如图3(a)所示. 两颗粒之间的距离 $D = 120R$, 孤立波经过两点之间的时间差为 T , 由此可计算出孤立波在其中传播的速度, 记为 $v_s = D/T$. 图3(b)给出了该系统的“速度-时间”云图, 显示能量以固定速度传播, 且其在传播过程中并没有耗散. 孤立波波速的定义值^[27]为

$$v_s = \left(\frac{6}{5\pi\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{F_m}{\theta^2 R^2} \right)^{\frac{1}{6}}, \quad (7)$$

其中, ρ 为材料密度, F_m 为相邻两颗粒接触力的最大值. 由式(7)计算的波速理论近似值为686.3 m/s, 而数值计算值为694.6 m/s. 该验证性计算所得波速与理论值一致, 可证明本文数值模拟的准确性.

研究表明, 系统的初始横向约束力 F_0 能够对系统的特性产生显著的影响, 当 F_m 远远大于 F_0 时, 系统具有很强的非线性^[44–46]. 当摩擦力不存在时, 系统中由冲击产生的孤立波以恒定的波宽和波速传播, 此时波速取决于 F_m 和 F_0 的大小. 然而, 当 F_0 远小于 F_m 且在很小的范围内改变时, 它对冲击产生的孤立波在系统中的传播起到很小的作用^[44,46], 且对下文将要讨论的摩擦造成的耗散作用影响也很小, 因此本文不讨论 F_0 的作用.

控制两刚性约束之间的距离, 使其略小于颗粒直径 $2R$ 时, 颗粒与刚性约束之间将产生一对平衡的法向

表 1 本文使用的材料参数

Table 1 Material properties used in this article

参数	数值
密度 ρ (kg/m ³)	2200
半径 R (mm)	9
杨氏模量 Y (GPa)	72
泊松比 ν	0.17
法向接触刚度 K_n (N/m ^{3/2})	3.3×10^9

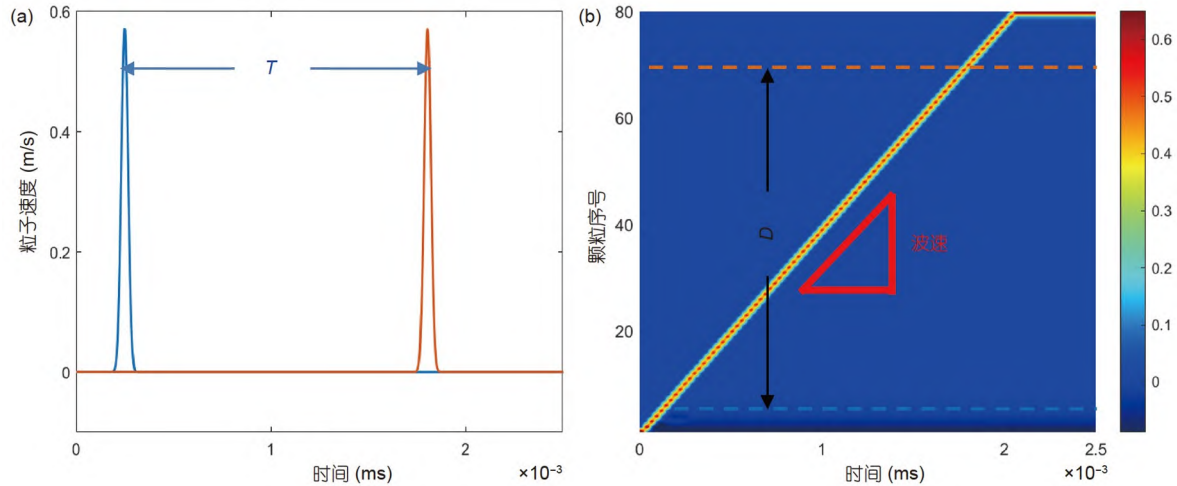


图 3 (网络版彩图)通过计算无摩擦一维模型中孤立波波速验证所提数值计算模型的可靠性. (a) 孤立波经过颗粒链两基准点的时间差 T ; (b) 上述孤立波传播云图, 其传播轨迹的斜率代表波速

Figure 3 (Color online) A verification of our model by calculating the solitary wave speed in a non-friction one-dimensional model. (a) Time difference T takes for the solitary wave to pass between the two datum points; (b) image map of particle velocity profile in spatial and transient domains, and the slope represents the propagation velocity.

压力 F_y . 在库仑摩擦的作用下, 若颗粒的质心发生了横向位移, 颗粒与刚性约束之间将会产生摩擦力, 若摩擦力到达库仑摩擦极限, 接触点将会发生滑移. 在本节的所有数值计算中, 初始条件为一个不受约束的颗粒以初速度 $V_0 = 0.88 \text{ m/s}$ 冲击受约束的一系列颗粒.

值得说明的是, 许多研究已经对初始横向约束力 F_0 对一维无摩擦系统中孤立波传播的影响做出了完备的论述^[44-46]. 该系统颗粒间的非线性接触力是系统独特动力学特性的关键, 当 F_0 远远小于 F_m 时, 系统仍然保留了很强的非线性, 此时 F_0 对系统响应的影响非常小. 同理, 本文施加在一维颗粒系统上的外力——法向压力 F_y 、切向摩擦力最大值 $\mu \cdot F_y$ ——相对于 F_m 都非常小. 另外, 颗粒材料由堆积所累积的重力势能是影响颗粒材料性质的重要指标^[2]. 当颗粒材料没有受到外力作用时, 在内部也会产生由重力所产生的静水压力. 本文所设置的数值计算外力条件为 F_y 相当于 10^1-10^2 倍颗粒自重, 即相当于颗粒材料在无外力作用下在 10^1-10^2 层堆积高度的环境压力, 这在实际应用中显然是属于“微小摩擦力作用”.

3 结果与讨论

对于一维颗粒链, 外部冲击会首先形成主孤立波,

随后由于外部作用或者颗粒链内部多次作用形成多次孤立波, 但总体上能量由主孤立波携带传播. 由于系统各处都存在摩擦力, 主孤立波所携带的能量会随着滑移而耗散, 相比无摩擦系统, 主孤立波能量和颗粒间接触力随着传播距离迅速降低. 本文针对各关键物理量在摩擦损耗作用下的变化规律展开讨论.

3.1 摩擦力对能量传播的影响

本文研究了摩擦力对能量传播的影响. 在该系统中, 可以通过改变法向压力 F_y 和摩擦系数 μ 来控制摩擦力的大小, 并且该摩擦力远小于颗粒间最大接触力. 颗粒的“速度-时间”云图可以直观地展示能量在系统中的传播轨迹与衰减程度. 冲击波在摩擦力作用下有一个明显的耗散深度. 同时, 本文也可以提取并观察接触力、颗粒速度和波速等关键物理量, 这些都可以说明系统中的能量衰减情况.

图4展示了 $N = 80$, $F_x = 0 \text{ N}$, 摩擦系数 $\mu = 0.3$, $F_y = 2, 4, 6, 8 \text{ N}$ 时的系统的速度云图. 在摩擦力的作用下, 由冲击给系统输入的能量在传播的过程中有显著的衰减. 不同于孤立一维力链上孤立波的恒定传播速度, 摩擦条件下, 孤立波随着能量衰减, 其传播速度也有所减慢. 通过对比不同 F_y 条件下的动力学响应发现, 随着法向约束力的增大, 上述衰减效应增大. 同时, 能量的传

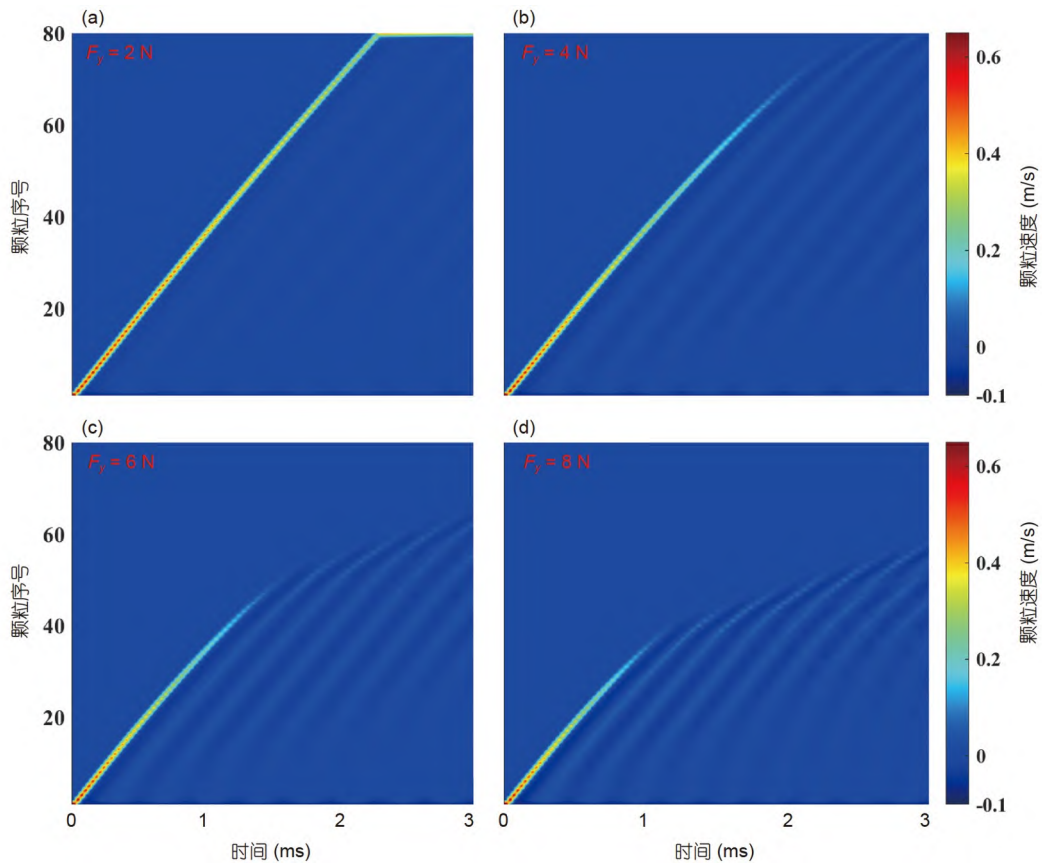


图 4 (网络版彩图)不同法向压力时主孤立波传播的“速度-时间”云图. (a) $F_y = 2\text{ N}$; (b) $F_y = 4\text{ N}$; (c) $F_y = 6\text{ N}$; (d) $F_y = 8\text{ N}$
Figure 4 (Color online) The “partical speed-time” cloud maps of the main solitary wave under different normal forces. (a) $F_y = 2\text{ N}$; (b) $F_y = 4\text{ N}$; (c) $F_y = 6\text{ N}$; (d) $F_y = 8\text{ N}$.

播有着深度的限制. 第一道波(主波)携带了绝大多数的能量, 并且在传播的过程中逐渐衰减至完全耗散. 将主波消失的位置定义为能量传播的极限深度. 由于接触点有剪切变形, 当能量经过每个颗粒时不仅被摩擦损耗, 也会以剪切变形势能存在于接触点, 进而形成幅度较小的震荡. 由于该残留能量相对较小, 本研究在这里忽略此效应.

对于一维颗粒链系统产生孤立波的研究中不乏一些对“次波”和“列波”的研究. 在无摩擦系统中, 无论何种初始条件, 其产生次孤立波的条件总是: 系统初始位置仍有动量输入系统. 例如, 在颗粒链初始位置长时间持续施加外力, 颗粒链由较大质量物体冲击, 以及由于边界条件约束导致初始位置存在颗粒反复撞击发生等. 然而条件较为特殊的一种情况为: 与颗粒链构成成员同质的撞子在额定速度内(系统仍满足小变形条件)冲击颗粒链, 则在无摩擦条件下该撞子并不会激发次

孤立波. 这一点可以由动量定理推导得出, 也可以通过简单的实验或数值计算得到. 在本文的所有数值计算中, 能够产生次孤立波的原因是: 颗粒链任何一个位置都与边界存在摩擦, 因而可达成产生次孤立波的动量条件. 当主孤立波经过某一颗粒后, 尽管颗粒不会再向前发生滑动, 但是其与边界的接触和变形所储存的弹性势能会使其在平衡位置附近反复振动, 这个振动导致颗粒间再次碰撞和挤压. 由于本文所设置的库仑摩擦阈值非常低, 颗粒本身存储的弹性势能不足以使之再发生滑移, 因此次孤立波不会产生能量损耗, 由剪切接触模型也可以推算出其中所包含的动能和弹性势能也微乎其微. 因此本文不再讨论.

图5基于颗粒最大速度、孤立波传播速度、颗粒间最大接触力等物理量, 展示了主波的耗散规律. 结果表明, 上述物理量在摩擦力的作用下随着在链中的传播有显著的衰减, 且随 F_y 的增大, 这种衰减增强.

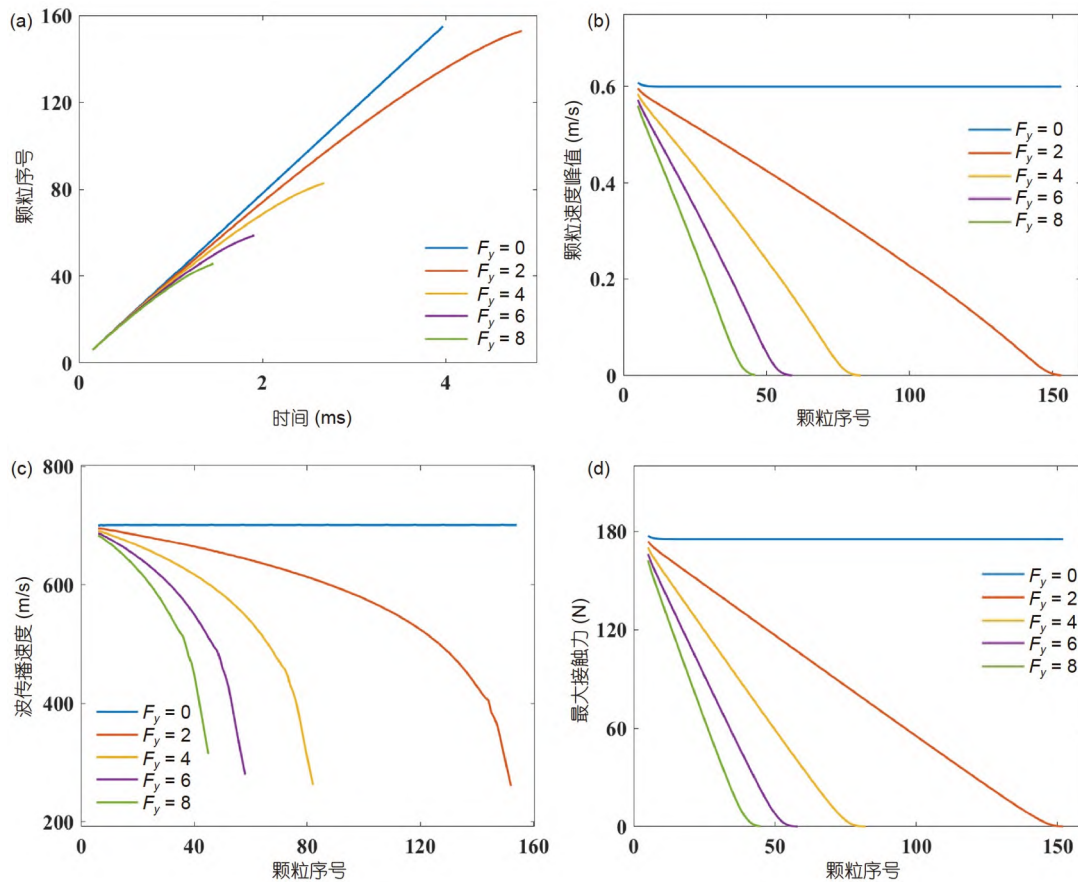


图 5 (网络版彩图)关键物理量在法向压力 F_y 作用下的损耗变化规律. (a) 波传播轨迹; (b) 颗粒速度峰值; (c) 孤立波波速; (d) 颗粒间最大接触力

Figure 5 (Color online) Dissipation change law of some physical quantities influenced by the normal force F_y . (a) Wave trajectory; (b) particle peak velocity; (c) solitary wave velocity; (d) maximum contact force.

类似地, 随摩擦系数的增加, 能量衰减增强, 图6为 $N = 80$, $F_x = 0$ N, 摩擦系数 $\mu = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$, $F_y = 4$ N 时系统的速度云图. 与法向压力 F_y 同样, 较大的摩擦系数意味着较大的库仑摩擦力阈值, 在该摩擦力作用下, 由冲击产生的主孤立波发生了显著的衰减. 该现象一定程度反映了材料颗粒系统的冲击吸能特性. 图7基于最大速度、主波的传播速度、颗粒间最大接触力等物理量, 展示了主波的耗散规律. 结果表明, 上述物理量在摩擦力的作用下随着在链中的传播有显著的衰减, 且随摩擦系数 μ 的增大, 这种衰减增强.

3.2 主孤立波的传播距离

本节探究了主孤立波传播的极限深度与系统摩擦之间的关系. 由于孤立波的波速随幅值减小而减小的特点, 本文定义当出现以下两个特征时认为主孤立波

消失:

- (1) 当主孤立波的幅值低于数值计算极限时;
- (2) 当第二道弹性波与主孤立波到达同一位置时.

经过验证, 当发生以上任一情况时, 主孤立波的幅值已远远小于初始幅值, 可以认为其所携带的能量完全耗散. 图8展示了颗粒与刚性约束之间的库仑摩擦极限——法向压力 F_y 与摩擦系数 μ 的乘积与主孤立波传播深度之间的关系. 在这一组模拟中, 分别设置摩擦系数 $\mu = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$, 法向压力 $F_y = 2, 4, 6, 8$ N 的不同组合共15个边界条件(除 $\mu = 0.1$ 且 $F_y = 2$ N), 计算并找到主孤立波耗散殆尽的位置. 在这一范围内, 发现传播深度和摩擦力之间近似满足反比关系. 当摩擦力继续增大时, 系统可采用图9中所描述物理模型, 主孤立波的传播深度并不会无限减小至0, 因为颗粒系统中能量的吸收与耗散有赖于多个接触摩擦对.

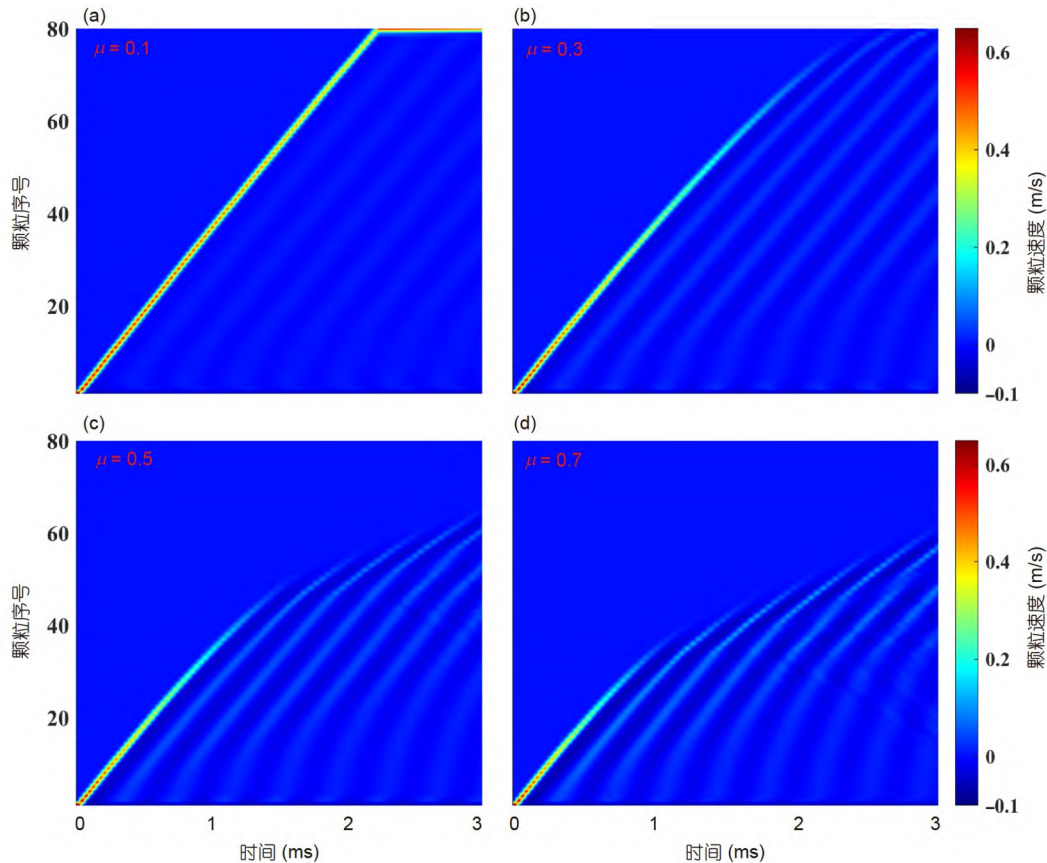


图 6 (网络版彩图)不同摩擦系数时主孤立波传播的“颗粒速度-时空”云图. (a) $\mu = 0.1$; (b) $\mu = 0.3$; (c) $\mu = 0.5$; (d) $\mu = 0.7$
Figure 6 (Color online) The “partical speed-time” cloud maps of the main solitary wave under different frictional coefficients μ . (a) $\mu = 0.1$; (b) $\mu = 0.3$; (c) $\mu = 0.5$; (d) $\mu = 0.7$.

3.3 能量传递规律

本节探究了能量在颗粒系统中的传播机制. 无摩擦一维颗粒系统的理论研究已较为完备. 式(6)描述了由高度非线性接触主导的动力学响应中波速与最大接触力的对数关系. 对比无摩擦系统, 由于摩擦耗散的作用, 孤立波在衰减到不同强度情况下会遵循不同的传播规律.

图10和11探究了摩擦力存在的情况下波速与最大接触力的关系的演化过程. 在主波生成后在链首传播过程中, 如图10和11中曲线右上部分, 波速与最大接触力的关系符合式(7)所描述的关系. 随着主波沿链传播, 波速和最大接触力衰减, 两者之间的关系也不符合式(7), 如图10和11中曲线中间部分. 当主波衰减至即将消失时, 在同一法向压力 F_y 不同摩擦系数 μ 条件下,

波速与最大接触力的对数关系回归到一条直线上, 如图11中曲线左下部分所示; 而不同的法向压力 F_y 条件则会导致波速与最大接触力的对数关系符合不同的直线关系, 如图10中曲线左下部分所示.

当主波衰减至即将消失时, 波速和最大接触力之间的对数关系将偏离式(7), 而这一关系因法向压力 F_y 的不同而不同. 这种规律可通过图9所示物理模型解释. 颗粒可用刚体代替, 颗粒之间的接触力可用非线性弹簧 $K_{(0)}$ 代替, 由Hertz接触规律可知, $K_{(0)}$ 由两相邻颗粒之间的接触位移 δ 决定. 由于颗粒与刚性约束平面之间存在法向压缩, F_y 对接触点的接触变形大小有直接影响, 根据Mindlin接触模型, F_y 对线性弹簧的刚度有直接的影响, 颗粒与刚性约束平面之间的剪切力可由线性弹簧 $K_{(F_y)}$ 代替. 当 F_y 改变了线性弹簧的刚度

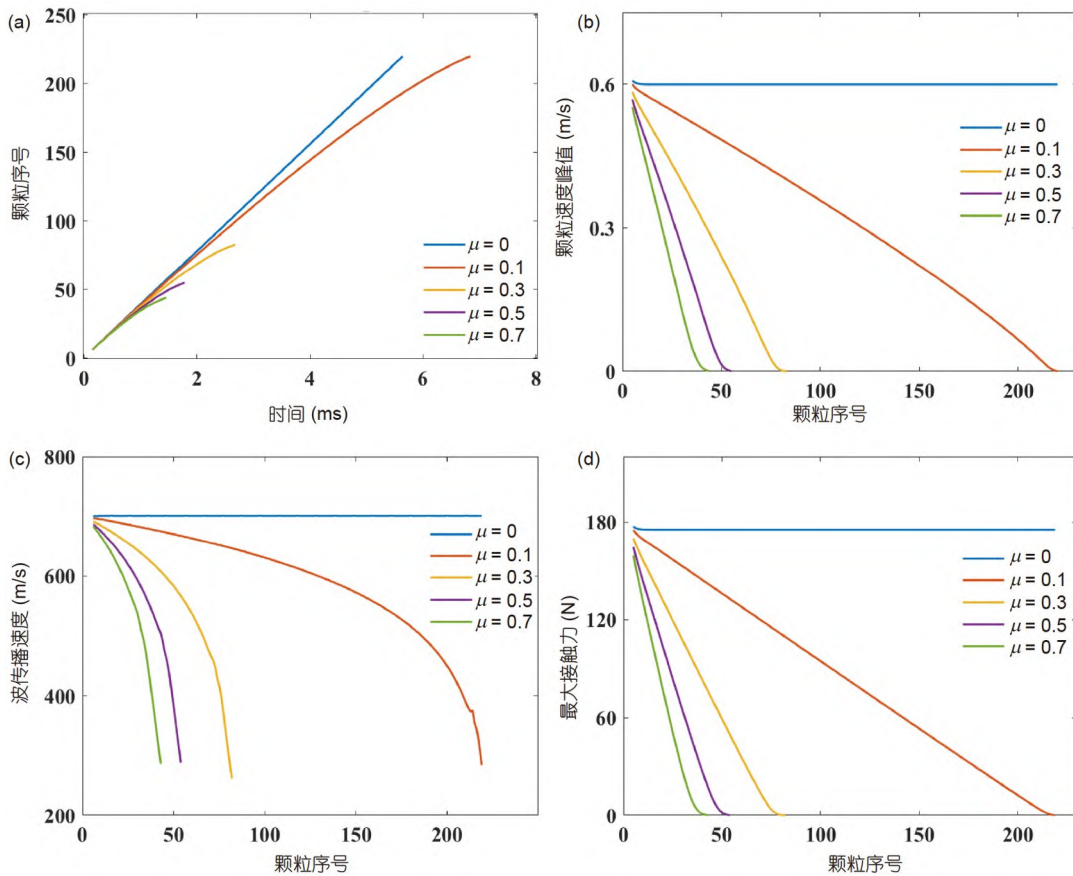


图 7 (网络版彩图)关键物理量在摩擦系数 μ 作用下的损耗变化规律. (a) 波传播轨迹; (b) 颗粒速度峰值; (c) 孤立波波速; (d) 颗粒间最大接触力

Figure 7 (Color online) Dissipation change law of some physical quantities influenced by the frictional coefficient μ . (a) Wave trajectory; (b) particle peak velocity; (c) solitary wave velocity; (d) maximum contact force.

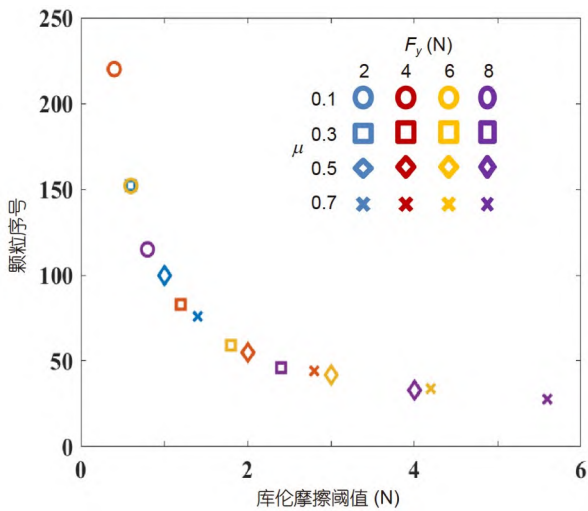


图 8 (网络版彩图)库仑摩擦阈值与主孤立波传播深度的关系

Figure 8 (Color online) Relationship between the Coulomb friction threshold and the finite propagation depth of the main solitary wave.

时, 颗粒在第三阶段的动力学方程就会有所不同, 从而使波的传播回归到不同的对数直线关系上去. 相对而言, 摩擦系数 μ 的改变并没有改变线性弹簧的刚度, 颗粒在第三阶段的动力学方程保持一致. 值得注意的是, 库仑摩擦阈值的增大使得颗粒在更高速时进入第三阶段运动规律. 将系统简化为图9所示线性弹簧与非线性弹簧耦合作用的物理模型需要以式(2)为依据. 当颗粒发生滑动摩擦时, 其剪切力的大小维持在极值并与运动方向相反; 当滑移不会再发生时, 该静摩擦可等效成线性弹簧. 当波在耗散的初期波速和接触力较大时, 摩擦力在动力学方程中的影响很小, 其大小相对于颗粒间的接触力非常小, 所以在这个过程中起主导作用的是颗粒间接触力. 由图10和11中曲线可知, 通过求解图11所示物理模型可得波速和最大接触力之间的对数关系所符合的直线规律.

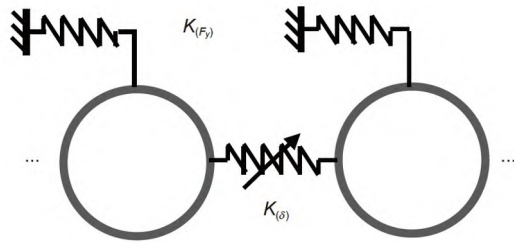


图 9 切向变形低于库仑摩擦极限的物理模型
Figure 9 A physical model while tangential deformation below the Coulomb friction threshold.

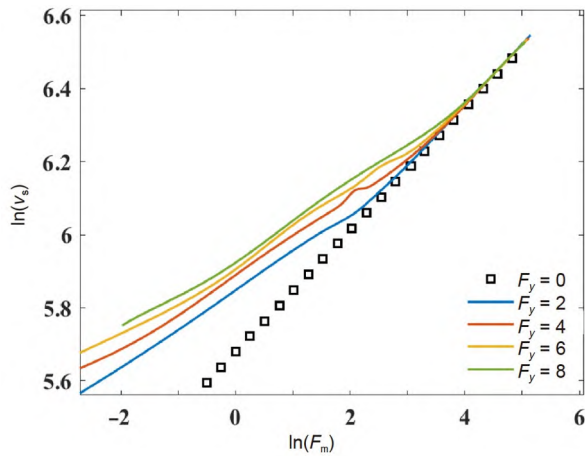


图 10 (网络版彩图)不同法向压力下的“波速-最大接触力”对数图
Figure 10 (Color online) Logarithmic relation of wave velocity and maximum contact force under various values of normal force.

在主波传播过程中, 其所携带的初始能量大部分被摩擦力耗散. 如图12所示($N = 80, F_y = 6 \text{ N}, \mu = 0.3$), 当孤立波耗散到不足以驱动颗粒链产生滑移时, 摩擦力不再做功, 系统因此成为保守系统, 剩余能量以动能和弹性能的形式残留在系统中.

摩擦力大小显著影响单位长度上能量的耗散率, 如图13所示. 当外部冲击带来的能量经过系统中的每个位置时, 由于颗粒和刚性约束之间的滑移所造成的摩擦耗散能量等比减少, 并且在一段距离(耗散截止距离)后不再发生滑移. 可以看出, 该耗散截止距离随摩擦力的增加而减小.

本文考虑外部作用建立了新的一维力链模型, 能够在一定程度上体现系统的宏观响应与环境/力链相互作用之间的关系. 结果表明, 摩擦对能量耗散的显著作用体现为能量快速耗散最终消失的物理过程. 通过该模型, 探索了摩擦力影响孤立波传播的动力学机制,

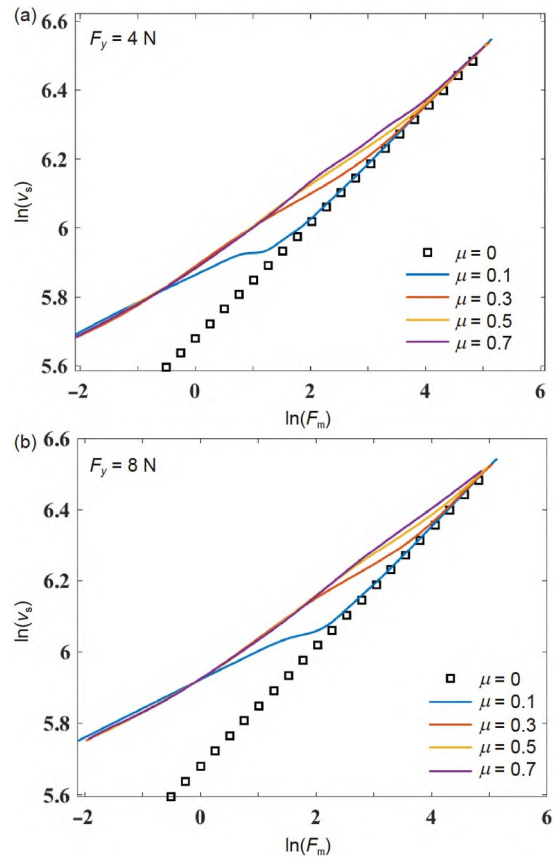


图 11 (网络版彩图)不同摩擦系数下的“波速-最大接触力”的对数关系图. (a) $F_y = 4 \text{ N}$; (b) $F_y = 8 \text{ N}$
Figure 11 (Color online) Logarithmic relations of wave velocity and maximum contact force under various values of the frictional coefficient. (a) $F_y = 4 \text{ N}$; (b) $F_y = 8 \text{ N}$.

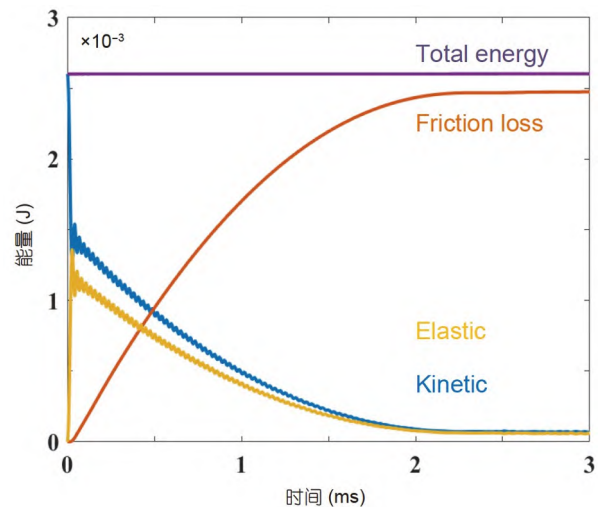


图 12 (网络版彩图)各种能量占比随时间演化规律
Figure 12 (Color online) Evolution law of energy ratios over time.

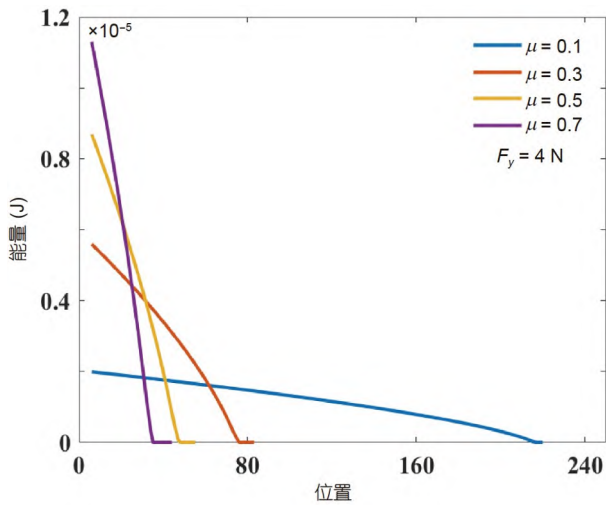


图 13 (网络版彩图)耗散过程中, 主孤立波的能量随位置的变化趋势

Figure 13 (Color online) Energy of the main solitary wave as a function of wave position during dissipation.

分析了能量传递深度与所施加外部摩擦力的关系. 本文对于探究颗粒材料摩擦耗能机制具有一定意义.

4 结论

本文建立了受外力约束的一维颗粒链模型, 探究了摩擦力对一维颗粒系统冲击耗散的影响作用, 主要的结论如下.

(1) 摩擦力对外部冲击产生显著的耗散作用, 波速和颗粒间最大接触力都会随传播而快速衰减, 外部冲击存在有限的传播深度. 传播深度与库仑摩擦极限 $F_y \cdot \mu$ 成近似反比关系.

(2) 外部冲击在颗粒系统中的传播过程中, 所携带的绝大部分能量由摩擦耗散, 仅一小部分能量以动能和弹性能的形式存留在颗粒中. 主孤立波幅值越大, 因摩擦所耗散的能量越多, 幅值衰减至库仑摩擦极限以下则不会再发生摩擦耗散, 颗粒也不再发生滑移.

(3) 主波传播与耗散过程中波速和颗粒间最大接触力存在对数关系, 该关系可将主波传播分为三个过程: 非线性接触主导过程、中间过程、摩擦与接触混合主导过程. 波速和颗粒间最大接触力的对数关系逐渐偏离式(7), 最终回归到新的由法向压力 F_y 决定的线性关系.

参考文献

- 1 Nagel S R. Experimental soft-matter science. *Rev Mod Phys*, 2017, 89: 025002
- 2 Jaeger H M, Nagel S R, Behringer R P. Granular solids, liquids, and gases. *Rev Mod Phys*, 1996, 68: 1259–1273
- 3 Katsuragi H, Durian D J. Unified force law for granular impact cratering. *Nat Phys*, 2007, 3: 420–423
- 4 Pacheco-Vázquez F, Ludewig F, Dorbolo S. Dynamics of a grain-filled ball on a vibrating plate. *Phys Rev Lett*, 2014, 113: 118001
- 5 Uehara J S, Ambroso M A, Ojha R P, et al. Low-speed impact craters in loose granular media. *Phys Rev Lett*, 2003, 90: 194301
- 6 Nasuno S, Kudrolli A, Bak A, et al. Time-resolved studies of stick-slip friction in sheared granular layers. *Phys Rev E*, 1998, 58: 2161–2171
- 7 Nasuno S, Kudrolli A, Gollub J P. Friction in granular layers: Hysteresis and precursors. *Phys Rev Lett*, 1997, 79: 949–952
- 8 Capozza R, Vanossi A, Vezzani A, et al. Suppression of friction by mechanical vibrations. *Phys Rev Lett*, 2009, 103: 085502
- 9 Clark A H, Kondic L, Behringer R P. Particle scale dynamics in granular impact. *Phys Rev Lett*, 2012, 109: 238302
- 10 Johnson P A, Savage H, Knuth M, et al. Effects of acoustic waves on stick-slip in granular media and implications for earthquakes. *Nature*, 2008, 451: 57–60
- 11 Kabla A J, Senden T J. Dilatancy in slow granular flows. *Phys Rev Lett*, 2009, 102: 228301
- 12 Kang W, Feng Y, Liu C, et al. Archimedes' law explains penetration of solids into granular media. *Nat Commun*, 2018, 9: 1101
- 13 Liu L, Li J, Wan C. Nonlinear dynamics of excited plate immersed in granular matter. *Nonlinear Dyn*, 2017, 91: 147–156
- 14 Schreck C F, Bertrand T, O'Hern C S, et al. Repulsive contact interactions make jammed particulate systems inherently nonharmonic. *Phys Rev Lett*, 2011, 107: 078301
- 15 Siavoshi S, Orpe A V, Kudrolli A. Friction of a slider on a granular layer: Nonmonotonic thickness dependence and effect of boundary conditions. *Phys Rev E*, 2006, 73: 010301
- 16 Bandi M M, Rivera M K, Krzakala F, et al. Fragility and hysteretic creep in frictional granular jamming. *Phys Rev E*, 2013, 87: 042205
- 17 Cao Y, Li J, Kou B, et al. Structural and topological nature of plasticity in sheared granular materials. *Nat Commun*, 2018, 9: 2911
- 18 Dagois-Bohy S, Tighe B P, Simon J, et al. Soft-sphere packings at finite pressure but unstable to shear. *Phys Rev Lett*, 2012, 109: 095703

- 19 Kou B, Cao Y, Li J, et al. Granular materials flow like complex fluids. *Nature*, 2017, 551: 360–363
- 20 Lade P V, Karimpour H. Stress drop effects in time dependent behavior of quartz sand. *Int J Solids Struct*, 2016, 87: 167–182
- 21 Xing Y, Zheng J, Li J, et al. X-ray tomography investigation of cyclically sheared granular materials. *Phys Rev Lett*, 2021, 126: 048002
- 22 Anthony J L, Marone C. Influence of particle characteristics on granular friction. *J Geophys Res*, 2005, 110: 1–4
- 23 Daniels K E, Hayman N W. Force chains in seismogenic faults visualized with photoelastic granular shear experiments. *J Geophys Res*, 2008, 113: 1–3
- 24 Hayman N W, Ducloué L, Foco K L, et al. Granular controls on periodicity of stick-slip events: Kinematics and force-chains in an experimental fault. *Pure Appl Geophys*, 2011, 168: 2239–2257
- 25 Macaulay M, Rognon P. Inertial force transmission in dense granular flows. *Phys Rev Lett*, 2021, 126: 118002
- 26 Rattanadit K, Bobaru F, Promratana K, et al. Force chains and resonant behavior in bending of a granular layer on an elastic support. *Mech Mater*, 2009, 41: 691–706
- 27 Job S, Melo F, Sokolow A, et al. How Hertzian solitary waves interact with boundaries in a 1D granular medium. *Phys Rev Lett*, 2005, 94: 178002
- 28 Yang J J, Silvestro C, Khatri D, et al. Interaction of highly nonlinear solitary waves with linear elastic media. *Phys Rev E*, 2011, 83: 046606
- 29 Ni X, Rizzo P. Highly nonlinear solitary waves for the inspection of adhesive joints. *Exp Mech*, 2012, 52: 1493–1501
- 30 Yang J, Khatri D, Anzel P, et al. Interaction of highly nonlinear solitary waves with thin plates. *Int J Solids Struct*, 2012, 49: 1463–1471
- 31 Cai L, Rizzo P, Al-Nazer L. On the coupling mechanism between nonlinear solitary waves and slender beams. *Int J Solids Struct*, 2013, 50: 4173–4183
- 32 Pal R K, Awasthi A P, Geubelle P H. Characterization of wave propagation in elastic and elastoplastic granular chains. *Phys Rev E*, 2014, 89: 012204
- 33 Yang L, Wang Y, Xie Y. Interaction of highly nonlinear solitary waves with large plates. In: Proceedings of the Symposium on Piezoelectricity, Acoustic Waves, and Device Applications (SPAWDA). Jinan, 2015. 363–366
- 34 Nasrollahi A, Lucht R, Rizzo P. Solitary waves to assess the internal pressure and the rubber degradation of tennis balls. *Exp Mech*, 2018, 59: 65–77
- 35 Nasrollahi A, Rizzo P. Modeling a new dynamic approach to measure intraocular pressure with solitary waves. *J Mech Behav BioMed Mater*, 2020, 103: 103534
- 36 Schiffer A, Alkhaja A I, Yang J, et al. Interaction of highly nonlinear solitary waves with elastic solids containing a spherical void. *Int J Solids Struct*, 2017, 118-119: 204–212
- 37 Chaunsali R, Toles M, Yang J, et al. Extreme control of impulse transmission by cylinder-based nonlinear phononic crystals. *J Mech Phys Solids*, 2017, 107: 21–32
- 38 Hong J. Universal power-law decay of the impulse energy in granular protectors. *Phys Rev Lett*, 2005, 94: 108001
- 39 Potekin R, McFarland D M, Vakakis A F. Nonlinear wave scattering at the flexible interface of a granular dimer chain. *Granular Matter*, 2016, 18: 68
- 40 Yang F, Xie W, Meng S. Impact and blast performance enhancement in bio-inspired helicoidal structures: A numerical study. *J Mech Phys Solids*, 2020, 142: 104025
- 41 Zhang Q, Potekin R, Li W, et al. Nonlinear wave scattering at the interface of granular dimer chains and an elastically supported membrane. *Int J Solids Struct*, 2020, 182-183: 46–63
- 42 Chattoraj J, Gendelman O, Ciamarra M P, et al. Noise amplification in frictional systems: Oscillatory instabilities. *Phys Rev E*, 2019, 100: 042901
- 43 Charan H, Chattoraj J, Ciamarra M P, et al. Transition from static to dynamic friction in an array of frictional disks. *Phys Rev Lett*, 2020, 124: 030602
- 44 Nesterenko V F. Dynamics of Heterogeneous Materials. New York: Springer-Verlag, 2001
- 45 Spadoni A, Daraio C. Generation and control of sound bullets with a nonlinear acoustic lens. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2010, 107: 7230–7234
- 46 Daraio C, Nesterenko V F, Herbold E B, et al. Tunability of solitary wave properties in one-dimensional strongly nonlinear phononic crystals. *Phys Rev E*, 2006, 73: 026610

Effect of friction on dynamic energy dissipation in granular chain

WANG ZhiChao^{1,2}, PENG Qing^{1,2}, LIU Chang^{1,2}, LIU XiaoMing^{1,2*} & WEI YueGuang³

¹ *The State Key Laboratory of Nonlinear Mechanics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;*

² *School of Engineering Science, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;*

³ *College of Engineering, Peking University, Beijing 100871, China*

**Corresponding author (email: xiaomingliu@imech.ac.cn)*

In this work, we used a one-dimensional particle system with finite length to study the effect of friction on energy propagation in granular materials. Normal contact forces acting between particles follow the nonlinear Hertz contact law, while the tangential shear forces acting between particles and plates follow the Mindlin shear force law. To simulate the wave propagation through the particle chain, a center difference method is applied, and the kinetic equation is directly solved by the discrete element method. With this model, we observed a primary solitary wave produced when a striker collides with the second particle, and the wave dissipates nonlinearly with the travelling length even when tangential frictional forces between particles and rigid boundary are very small. Energy dissipation in granular materials can be deduced by comparing the amplitude and velocity of the main solitary wave and the maximum contact force between particles. The results show that the primary solitary wave will dissipate rapidly and eventually disappear within a finite distance in the one-dimensional chain, even though the frictional forces are much smaller than the average normal contact forces between particles. This finite distance depends on the frictional forces. As the wave propagates, three stages, including nonlinear collision stage, transition stage, and friction-collision mixed stage, can be distinguished using the relation between wave speed and maximum contact force.

granular materials, frictional dissipation, impact energy, nonlinear contact

PACS: 02.70.Bf, 02.70.Ns, 45.50.Tn, 83.80.Fg

doi: [10.1360/SSPMA-2023-0307](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2023-0307)