



颗粒密度与半径影响下的多相RMI混合区域宽度极限理论模型及其规律探究

司英明^{1,2}, 孟宝清^{1,2*}, 王春^{1,2}, 田保林³, 陈潜⁴

1. 中国科学院力学研究所高温气体动力学国家重点实验室, 北京 100190;

2. 中国科学院大学工程科学学院, 北京 101408;

3. 北京航空航天大学航空科学与工程学院, 北京 100191;

4. 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100094

*联系人, E-mail: mengbaoqing92@foxmail.com

收稿日期: 2024-01-31; 接受日期: 2024-03-31; 网络出版日期: 2024-09-03

中国科学院基础与交叉前沿科研先导专项(编号: XDB0620203)、国家自然科学基金(编号: 12002063, 12002062, 91852207, 12132017, 12072353)和国家重大项目(编号: GJXM92579)资助

摘要 颗粒参数对多相Richtmyer-Meshkov不稳定性(RMI)混合区宽度演化具有显著影响, 但影响规律尚待探究. 本文基于界面运动方程, 综合颗粒体积分数、半径和气体黏度参数影响, 提出无量纲数 Sd , 表征曳力对流体速度弛豫过程的影响. 基于小扰动理论建立了极限颗粒参数下混合区宽度的增长模型, 分析表明颗粒密度与半径组合决定混合区宽度增长形态, 在颗粒密度较大时呈指数增长, 在半径较大或二者都较大时呈线性增长. 进一步分析揭示了颗粒参数变化对混合区域宽度的影响规律, 发现增大颗粒半径会促进混合区域宽度增长. 数值模拟结果验证了理论模型及 Sd 数有效性, 结果表明经典的Stokes数(St)在预测混合区宽度增长时存在失效情况, St 数和 Sd 数的组合是多相RMI演化的主控无量纲数.

关键词 多相Richtmyer-Meshkov不稳定性, 颗粒参数, 混合区域宽度, 理论模型, 影响规律

PACS: 47.20.Ma, 47.40.Nm, 47.55.Kf

1 引言

Richtmyer-Meshkov不稳定性(RMI)现象是指: 两种不同密度的流体界面受到瞬时加速作用, 所诱导的界面失稳过程^[1]. 这一现象广泛存在于自然和工程应用中^[2-6], 例如超新星爆炸^[7]、惯性约束聚变^[8]、颗粒成像测速^[9]和超音速燃烧^[10-12]. 这些过程常常伴有

颗粒等分散相, 因此有必要开展对多相RMI问题的研究. 在流动失稳过程中, “气泡”结构是指轻流体渗透到重流体的区域, 而“尖钉”结构是指重流体渗透到轻流体的区域^[13]. 气泡与尖钉之间的距离称为混合区域宽度, 用于表征两种流体的混合程度. 混合区域宽度的演化是多相RMI研究的关注点之一.

颗粒等分散相对混合区域宽度的演化产生重要影

引用格式: 司英明, 孟宝清, 王春, 等. 颗粒密度与半径影响下的多相RMI混合区域宽度极限理论模型及其规律探究. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2024, 54: 104705
Si Y M, Meng B Q, Wang C, et al. Research on the limit theoretical model and influence rules of multiphase RMI mixing zone width under the influence of particle density and radius (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2024, 54: 104705, doi: 10.1360/SSPMA-2024-0033

响, 其中颗粒的密度和半径是重要的物性参数. 实际情况中, 颗粒密度和半径往往有着较大的变化范围. 在本研究中, 我们以二者为坐标轴, 绘制了如图1所示的相图, 其中存在着四种极限状态: 颗粒的密度和半径极小(状态A), 颗粒的密度极大半径极小(状态B), 颗粒的密度极小半径极大(状态C), 颗粒的密度和半径极大(状态D). 通过改变密度或半径单一变量, 四种状态间两两转换存在四条路径: a) 在颗粒半径较小时增大密度, b) 在颗粒密度较小时增大半径, c) 在颗粒密度较大时增大半径, d) 在颗粒半径较大时增大密度. 由此, 我们构建本文所涉及的颗粒参数相图基础.

在已有的多相RMI相关研究中, 颗粒密度和半径常组合作为一个无量纲数出现, 即经典的Stokes数(St). St 数定义为颗粒弛豫时间 t_p 与流动特征时间 t_f 的比值, 如公式(1)所示:

$$St = \frac{t_p}{t_f}. \quad (1)$$

颗粒的弛豫时间 t_p 是指颗粒质量与Stokes曳力系数 $\kappa = 6\pi r_p \mu$ 的比值, 如式(2)所示:

$$t_p = \frac{\rho_p V_p}{6\pi r_p \mu}, \quad (2)$$

其中, ρ_p 、 V_p 、 r_p 、 μ 分别为颗粒的密度、体积、半径和流体动力黏度. 对于气体-颗粒系统而言, 颗粒的弛豫时间可以理解颗粒受到气流曳力作用后, 其速度达到与气流速度平衡所需的特征时间. 流动的特征时间 t_f 因问题而异, 在本研究中定义为界面扰动的波长 λ

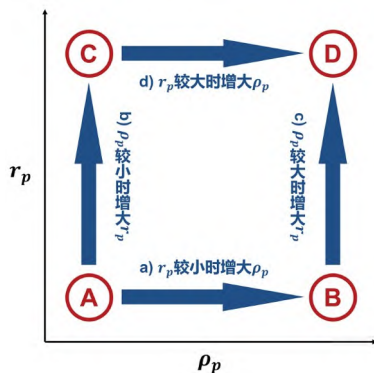


图 1 (网络版彩图) 基于颗粒密度与半径构成的状态相图
Figure 1 (Color online) State phase diagram based on particle density and radius.

与界面由激波加速后的运动速度 U_{inf0}^+ 的比值, 如式(3)所示:

$$t_f = \frac{\lambda}{U_{inf0}^+}. \quad (3)$$

St 数可以衡量颗粒跟随流体运动的能力: St 值较小($St \ll 1$)表明颗粒速度可以迅速与流体运动速度达到平衡, 而 St 值较大($St \gg 1$)表明颗粒速度很难与流体速度平衡. St 数是含颗粒的多相RMI流动的重要参数, 体现了颗粒密度和半径的综合影响.

在已有的研究中, 针对状态A, 前人开展了小 St 数气体-颗粒流的研究工作, 通过理论推导和数值验证, 给出了混合区域宽度线性段的增长模型^[13-16]. 1961年, Saffman^[14]建立了稀疏气体-颗粒的控制方程, 来描述携带小尘埃颗粒的气体运动. 2010年, Ukai等人^[13]对控制方程进行小扰动分析, 推导了小 St 数的稀疏气体-颗粒流的混合区域宽度增长率的线性理论解, 给出了多相RMI系统的Atwood数 A_m , 用于描述多相流中界面两侧流体的等效密度差异. 其中, 等效密度是气体和颗粒根据体积分数加权计算得到的混合物密度. 此后, 众多学者将该模型推广到了非线性阶段和稠密流动的情况^[16-18], 这些都反映了气粒耦合的影响. 与纯气相的RMI问题不同^[19-21], 颗粒参数对混合区域宽度演化有显著影响, 流动系统的复杂性也高于经典RMI, 相应的理论模型及演化机理尚不成熟.

因此, 已有研究中也常采用数值模拟的手段对颗粒影响开展研究. 根据 St 数的定义可知, 颗粒的 St 数和其他弛豫时间密切相关. 数值模拟研究表明, 颗粒的弛豫时间对流体的动力学行为具有显著影响. Ukai等人^[13]对大 St 数的稀疏气体-颗粒流开展了数值模拟, 发现大尺寸颗粒并不会跟随流体运动, 混合区域宽度增长速率与颗粒无关, 与纯气相的增长模型相一致. McFarland等人^[22]对颗粒弛豫时间的影响规律也开展了详细的数值模拟研究. 他们通过改变颗粒半径来控制弛豫时间, 结果表明, 较大颗粒在向下游传播的过程中会使整个界面减速, 导致混合区域宽度显著衰减. 这一滞后效应抑制了涡的发展, 使得不同颗粒半径的多相RMI在界面处产生的涡不同. 他们还指出, 对于小弛豫时间下, Ukai等人^[13]提出的多相Atwood数在预测混合区域宽度演化中有效; 但在大弛豫时间下, 混合区域宽度的增长接近于经典的纯气相RMI模型.

根据本研究的模拟结果, St 并不是多相RMI演化的主控无量纲数, 通过 St 数不能准确预测混合区域宽度增长. 对于具有相同 St 数的流动, 不同颗粒密度和半径的组合可能会导致混合区域宽度的演化完全不同. 该过程的主控无量纲数仍有待研究, 不同条件下的混合区域宽度增长的理论模型有待完善, 不同状态间颗粒参数转变对混合区域宽度的影响规律也有待探索.

本文基于颗粒密度和半径构成的相图, 研究了极限条件下多相RMI混合区域宽度理论模型和相互之间的转变规律. 我们综合了颗粒体积分数、半径和气体黏度等参数, 提出了新的无量纲数 Sd 数, 相较于 St 数更能有效预测混合区域宽度的增长规律. 在此基础上建立了极限状态下混合区域宽度增长率的理论模型, 补充了相图所涵盖的解析解. 结合理论分析以及可压缩多相质点网格模拟方法(CMP-PIC)^[23,24], 揭示了相图中不同极限状态间的转变规律, 验证了多相RMI的理论模型和 Sd 数的正确性和有效性.

2 无量纲数及多相RMI极限理论模型

我们根据界面运动控制方程推导了一个新的无量纲数 Sd . 以 Sd 数为判断依据, 我们建立了相图中B、C、D状态下的理论模型.

2.1 衡量曳力耦合效应的无量纲数

混合区域宽度的增长与界面运动速度息息相关, 因此我们从流体动量方程着手, 基于拉格朗日视角, 导出了界面附近区域的流体运动控制方程^[17], 其形式如下:

$$\alpha_f \rho_f \frac{DU_{inf}}{Dt'} = -\frac{\alpha_p}{V_p} \kappa (U_{inf} - v_{px}) - \alpha_f \frac{\partial P_f}{\partial x}, \quad (4)$$

其中 α_f 是流体的体积分数, ρ_f 是流体的密度, U_{inf} 是流体界面运动速度, $t' = t - t_0^+$, t_0^+ 是激波穿过界面的时刻, α_p 是颗粒的体积分数, v_{px} 是颗粒水平方向上的速度, P_f 是流体压强. 方程左端是界面附近流体的惯性项, 右端代表动量源项, 依次为曳力项和压强梯度项.

在不改变流体类型和马赫数的情况下, St 数仅与颗粒半径和密度相关, 即 $St \propto \rho_p r_p^2$. 因此改变 St 数通常采用改变颗粒密度或半径的方式. 而在方程(4)的曳力

项中, 增加颗粒密度会导致颗粒速度降低, 相间速度差增大, 因而曳力绝对值增大, 界面处流体速度减小; 而增大颗粒半径会导致颗粒体积增大, 在颗粒体积分数不变的情况下意味着颗粒数量减小, 因而曳力绝对值减小, 界面处流体速度增大. 因此, 即使同等程度地增大 St , 通过改变不同的颗粒参数也会导致流体速度朝不同方向发展. 这是根据 St 数无法准确预测混合区域宽度增长的主要原因. 因此, 需要一个新的无量纲数来衡量曳力的相对大小.

曳力对于混合区域附近的流体速度有着重要影响, 因此首先考虑仅有曳力作用的界面运动方程:

$$\alpha_f \rho_f \frac{DU_{inf}}{Dt'} = -\frac{\alpha_p}{V_p} \kappa (U_{inf} - v_{px}). \quad (5)$$

当 St 数较大时, 颗粒速度不会发生显著变化, 并考虑到 $t' = 0$ 时, $U_{inf} = U_{inf0}^+$. 对上式积分得到如下方程:

$$U_{inf} = (U_{inf0}^+ - v_{px}) e^{-t'/t_{drag}} + v_{px}, \quad (6)$$

其中 t_{drag} 量纲为时间, 其表达式如下:

$$t_{drag} = \frac{\alpha_f \rho_f V_p}{\alpha_p \kappa}, \quad (7)$$

代表曳力对流体速度产生显著影响的特征时间. 因此, 我们定义流体受曳力影响的弛豫时间 t_{drag} 与流动特征时间 t_f 的比值为一新的无量纲数 Sd , 用以衡量曳力对流体速度的影响^[25]. 带入物理量后得到 Sd 数的具体表达式为:

$$Sd = \frac{t_{drag}}{t_f} = \frac{\alpha_f \rho_f V_p U_{inf0}}{\alpha_p \kappa \lambda}. \quad (8)$$

Sd 数由流体和颗粒共同决定, 其中 α_f 、 ρ_f 、 U_{inf0} 与流体属性相关, 而 α_p 、 V_p 与颗粒属性相关, κ 由二者共同决定. 参数 α_p 、 V_p 、 κ 通常是可变的, 因此该无量纲数与颗粒体积分数 α_p 、颗粒半径 r_p 和气体动力黏度 μ 密切相关. 当 $Sd \ll 1$ 时, 即曳力影响流体运动的弛豫时间远小于流动特征时间, 则曳力在流动过程中可以较快地改变流体速度; 当 $Sd \gg 1$ 时, 即曳力影响流体运动的弛豫时间远大于流动特征时间, 也意味着曳力几乎无法影响流体速度.

Sd 数与 St 数具有不同的性质. 从式(8)可知, Sd 数的表达式与 St 数不同, 其包含流体密度, 并考虑了颗粒和

流体的体积分数. 从物理的角度来看, St 数代表曳力对颗粒速度的影响, 而 Sd 数则代表曳力对流体速度的影响, 并考虑了颗粒稠密效应的影响. 在 St 数较小的情况下, 颗粒可以快速追上流体, 相间的速度差极小, 导致流体的曳力影响并不显著, 而 Sd 数仅用于衡量曳力, 在该情况下失效, 对应于相图中的状态A. 在 St 数较大的情况下, 颗粒速度的滞后会导明显的速度差, 而 Sd 数综合考虑诸多物理参数来衡量曳力大小, 以此判断流体速度和混合区域宽度的演化趋势, 对应于相图中的状态B、C和D.

2.2 相图状态B、C、D下混合区域宽度增长模型

由于多相RMI流动的复杂性, 对相图中每个点构建混合区域宽度增长模型难度较大. 我们仅考虑颗粒密度极大或半径极大的情况, 简化分析过程. 极限状态A下混合区域宽度增长的理论模型已由前人给出^[13,16]. 这里我们使用无量纲数 Sd 作为流动状态划分标准, 给出极限状态B、C、D下混合区域宽度的增长模型.

对于颗粒密度大、半径小的状态B, Sd 数相对较小, 曳力主导气体速度, 因此压力梯度项小于曳力项. 另外, 由于 St 数较大, 颗粒由静止开始逐渐加速较慢, 有 $v_{px} \ll U_{inf}$. 界面运动方程可简化为

$$\alpha_f \rho_f \frac{DU_{inf}}{Dt'} = -\frac{\alpha_p \kappa}{V_p} U_{inf}. \quad (9)$$

在激波穿过界面的 $t' = 0$ 时刻, 界面的运动速度为 U_{inf0}^+ , 得到式(9)的解为

$$U_{inf} = U_{inf0}^+ e^{-\frac{\alpha_p \kappa}{\alpha_f \rho_f V_p} t'}. \quad (10)$$

根据前人的小扰动理论研究, RMI问题中扰动的幅度 a 与界面运动速度 U_{inf} 和多相Atwood数 A_m 有如下关系^[1,13]:

$$\frac{da}{dt} = ka_0^+ A_m U_{inf}, \quad (11)$$

其中 k 是界面扰动的波数, a_0^+ 是激波经过后的扰动振幅. $A_m = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$, 可以描述多相流界面前后气体密度的差异. 混合区域宽度的值 h 是扰动的振幅 a 的两倍. 因此, 我们得到混合区域宽度的增长速率如下:

$$\frac{dh}{dt} = 2ka_0^+ A_m U_{inf0}^+ e^{-t'/t_{drag}}. \quad (12)$$

通过对增长速率积分, 得到颗粒密度大、半径小条件下混合区域宽度的增长模型, 如下所示:

$$h = -2ka_0^+ A_m U_{inf0}^+ t_{drag} (e^{-t'/t_{drag}} - 1) + h_0^+, \quad (13)$$

其中 h_0^+ 为激波穿过界面时混合区域宽度的值. 该方程为指数形式, 且不包含颗粒密度 ρ_p , 因此该模型下混合区域宽度仅与颗粒半径相关, 而与颗粒密度无关.

对于颗粒密度小、半径大的状态C, Sd 数相对较大, 曳力项近似为零. 界面运动方程可简化为

$$\alpha_f \rho_f \frac{DU_{inf}}{Dt'} = -\alpha_f \frac{\partial P_f}{\partial x}. \quad (14)$$

上式不包含任何与颗粒相关的参数, 与经典的纯气相RMI问题方程相同. 因此, 其解应等同于经典纯气相RMI问题的线性形式解, 如下所示:

$$\frac{dh}{dt} = 2ka_0^+ A_m U_{inf0}^+. \quad (15)$$

通过对增长速率积分, 我们得到颗粒半径大、密度小条件下混合区域宽度的增长模型, 如下所示:

$$h = 2ka_0^+ A_m U_{inf0}^+ t' + h_0^+, \quad (16)$$

该方程为线性形式, 与经典气相RMI问题相同. 因此该模型下混合区域宽度与颗粒密度和半径均无关.

对于颗粒密度大、半径大的状态D, Sd 数也相对较大. 而大 Sd 数下的理论解与颗粒密度无关, 因此状态D的理论解与状态C的相同, 均为具有线性形式的理论解, 即式(16). 此外, 状态D既可视在状态B的基础上增加了极大颗粒半径条件, 也可视为在状态C的基础上增加了极大颗粒密度条件. 而在颗粒密度极大情况下的式(16)与颗粒半径极大情况下的式(13)的表达式相同, 这也证明了理论模型的一致性和统一性. 需要注意的是, 上述理论解仍基于小扰动理论, 仅适用于低马赫数激波冲击下界面早期的演化.

在本节中, 我们综合了颗粒体积分数、半径和气体黏度等参数的影响, 基于曳力弛豫时间与流动特征时间之比, 推导了无量纲数 Sd 来表征曳力对气体速度的影响. 基于小扰动理论建立了极限颗粒密度和半径的混合区域宽度增长率的理论模型, 在颗粒密度极大时混合区域宽度随时间呈指数增长, 在颗粒半径极大

时或二者都较大时随时间呈线性增长, 补全颗粒参数相图中各个极限状态下的理论解.

3 多相RMI数值验证和相图分析

我们通过改变颗粒的密度和半径, 设置了一系列算例来模拟多相RMI中混合区域宽度的演化. 根据理论模型预测了混合区域宽度的演化趋势和相对变化, 通过对数值模拟的结果进行比较分析, 总结出颗粒参数对多相RMI演化的影响规律, 验证了多相RMI理论模型的正确性和有效性.

3.1 数值方法和网格无关性验证

我们使用基于欧拉-拉格朗日框架的CMP-PIC方法来模拟多相流^[23,24], 该方法可以模拟从稀疏到稠密以及颗粒流的全流态流动. 采用Runge-Kutta方法进行时间推进, 使用TVD格式^[26]来重构原始流动变量, 应用Harten等人^[27]提出的黎曼求解器来求解通量. 将具有相似物理性质的颗粒打包为颗粒包, 并使用软球模型计算颗粒之间的碰撞, 方便相间耦合的计算, 显著降低大规模颗粒群模拟所需的计算量. CMP-PIC方法广泛应用于激波-颗粒群作用和多相RMI等问题模拟中, 取得良好的应用效果, 该方法的验证可参考文献^[16,17,23,28,29].

我们开展了网格无关性验证, 使用四种不同的网格分辨率来检验结果收敛性, 详细数据列于表1中. 其他条件的设置方式与第3.2节的Case1相同. N_x 和 N_y 分别是 x 和 y 方向上的网格数. 混合区域宽度随时间变化的曲线如图2所示. 分辨率C与分辨率D的结果吻合良好, 表明进一步地细化网格对模拟结果没有显著影响. 考虑计算时间, 后续算例均采用分辨率C开展模拟. 此外, 根据Ukai等人^[13]和Meng等人^[16,23]的研究, 在每个网格单元布置四个颗粒包, 可保证网格内颗粒包分辨率的收敛.

3.2 多相RMI模拟算例设置

$Ma=1.2$ 的激波依次通过二维余弦形单模空气/SF₆界面, 空间上均匀分布有直径、密度一致的颗粒^[28], 如图3所示. 其中, 轻流体为空气, 重流体为SF₆, 黄色圆点代表颗粒包. 界面上添加了余弦形式的扰动, 如方程(17):

表 1 四种网格分辨率的详细信息

Table 1 Detailed information on four mesh resolutions

Case	N_x	N_y	网格数	颗粒包数
分辨率A	300	50	15000	45000
分辨率B	600	100	60000	180000
分辨率C	1200	200	240000	720000
分辨率D	1800	300	540000	1620000

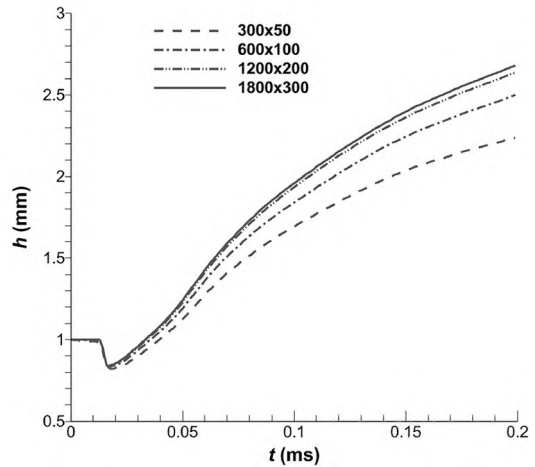


图 2 四种分辨率下的混合区域宽度

Figure 2 Mixing zone widths of four resolutions.

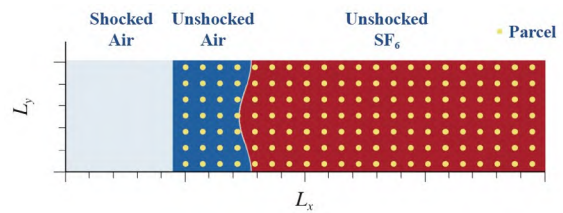


图 3 (网络版彩图)颗粒均匀分布的多相RMI计算示意图

Figure 3 (Color online) Schematic diagram of multiphase RMI calculation with uniformly distributed particles.

$$a(y) = a_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}y\right), \quad (17)$$

其中 a_0 为初始界面振幅, λ 为初始界面波长. 相同的计算域设置可参考已有的研究^[16-18,22]. 界面的位置定义为空气体积分数 $\beta_1 = 0.5$ 位置. 对气相中空气的体积分数 β_1 通过误差函数在界面周围进行平滑过渡^[30].

表2列出了计算所需的其他初始条件参数, 其中, L_x 为计算域流向长度, L_y 为计算域纵向长度, L_{shock} 为

表 2 计算域设置和流场初始条件

Table 2 Calculation domain settings and flow field initial conditions

L_x	L_y	L_{shock}	$L_{interface}$	$L_{particle}$	a_0	λ	P_0	Ma	α_{p0}
60 mm	10 mm	9 mm	15 mm	>10 mm	0.5 mm	10 mm	101 kPa	1.2	1%

初始激波位置, $L_{interface}$ 为空气/SF₆界面初始位置, $L_{particle}$ 是颗粒分布的初始位置, P_0 为无激波流体压强, α_{p0} 是颗粒初始体积分数. 计算域左边界设置为气流入口条件, 右边界设置为气流出口条件, 域上下两侧设置为气体和颗粒的周期性边界.

考虑到 St 数和颗粒密度及半径相关, 而 Sd 数仅和颗粒半径相关, 因此我们通过改变颗粒密度和半径, 使 St 数和 Sd 数规律变化, 设置系列算例来模拟多相RMI问题, 探究颗粒参数对混合区域宽度的影响. 表3列出了各个算例的详细信息. 算例1中的颗粒密度 $\rho_{p,1}=500 \text{ kg/m}^3$, 颗粒半径 $r_{p,1}=5 \text{ }\mu\text{m}$, St 数的值约为1, Sd 数的值约为0.2. 将算例1作为基准算例, 其余算例的颗粒密度和半径均进行无量纲化,

$$\text{即 } \hat{\rho}_p = \rho_p / \rho_{p,1}, \hat{r}_p = r_p / r_{p,1}.$$

为了更清晰地展示不同算例之间的关系, 我们将其绘制在由颗粒密度和半径构成的相图上, 如图4所示. 图中横坐标和纵坐标均为对数刻度. A、B、C、D是前文定义的颗粒密度和半径在极限情况下的四种状

表 3 不同工况下颗粒参数及对应的无量纲数

Table 3 Particle parameters and corresponding dimensionless numbers under different cases

Case	$\hat{\rho}_p$	\hat{r}_p	St	Sd
1	1	1	$\approx 10^0$	≈ 0.2
2	9	1	$\approx 10^1$	≈ 0.2
3	100	1	$\approx 10^2$	≈ 0.2
4	900	1	$\approx 10^3$	≈ 0.2
5	1	3	$\approx 10^1$	≈ 2
6	1	10	$\approx 10^2$	≈ 20
7	1	30	$\approx 10^3$	≈ 200
8	900	3	$\approx 10^4$	≈ 2
9	900	10	$\approx 10^5$	≈ 20
10	900	30	$\approx 10^6$	≈ 200
11	9	30	$\approx 10^4$	≈ 200
12	100	30	$\approx 10^5$	≈ 200

态. 以它们为端点, 得到单一参数变化的四条路径. 系列算例沿着这四条路径设置, 方便进行比较和分析, 并探索不同状态之间的变化规律.

3.3 不同极限状态间混合区域宽度的变化规律

根据第2节的理论模型, 我们针对相图中路径a)–d)上不同算例的混合区域宽度的变化规律进行预测, 并与数值模拟获得的结果相互验证.

a): 小颗粒半径条件下, 逐渐增加颗粒密度, 对应算例1、2、3、4, 其无量纲的颗粒密度 $\hat{\rho}_p$ 分别为1、9、100、900. 由理论模型分析, 随着颗粒密度逐渐增大, St 数逐渐增大, 而 Sd 数保持不变, 颗粒起动过程变慢使得相间速度差增加, 导致曳力增大从而降低混合区域宽度. 此外, 当颗粒密度较大时, 混合区域宽度应逐渐趋近于状态B下指数形式的理论解. 算例1、2、3、4混合区域宽度的数值模拟结果如图5所示. 在给定的计算时间(0.2 ms)内, 其混合区域宽度在激波经过后均随时间增长. 从算例1到4, 颗粒密度依次增大, 混合区域宽度依次减小, 最终接近指数形式的理论解.

值得注意的是, 在 $t=0.01\text{--}0.02 \text{ ms}$, 混合区域宽度快速下降, 这是因为激波会先后穿过尖钉和气泡, 首先对混合区域宽度有压缩作用. 而理论模型只能预测不

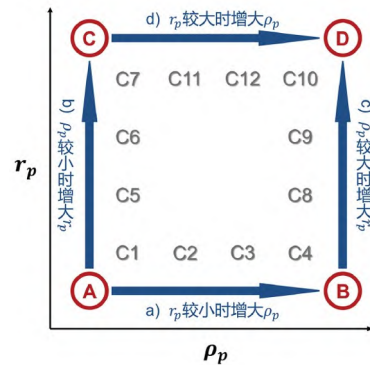


图 4 (网络版彩图)基于颗粒密度与半径相图上的算例分布
Figure 4 (Color online) Distribution of the calculation examples on phase diagram based on particle density and radius.

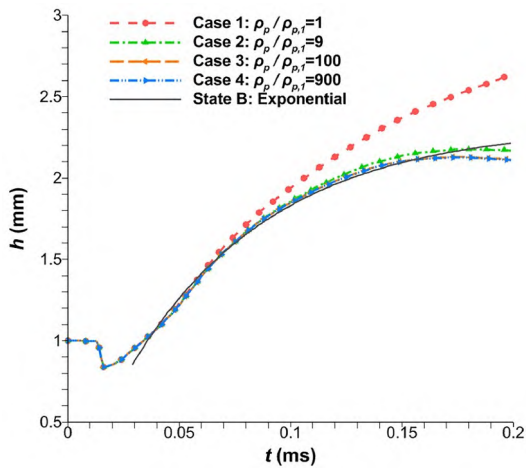


图5 (网络版彩图)颗粒半径小且密度递增的混合区域宽度演变

Figure 5 (Color online) Mixing zone width evolutions with small particle radius and increasing particle density.

可压条件下的RMI演化, 因此将 $t=0.03$ ms选作理论预测的起始时间, 这与激波穿过扰动界面的时间处于同一量级. 此外, 在 $t=0.15$ ms后, 数值结果与理论解的结果也稍有不同, 这是因为理论解使用小扰动理论获得, 因此仅适用于线性阶段演化. 后续比较中类似的情形原因不再赘述.

b): 小颗粒密度条件下, 逐渐增加颗粒半径, 对应算例1、5、6、7, 其无量纲的颗粒半径 \bar{r}_p 分别为1、3、10、30. 由理论模型分析, 随着颗粒半径逐渐增大, St 数和 Sa 数都逐渐增大, 在体积分数不变的情况下, 颗粒体积变大等同于颗粒数目变小, 导致相间曳力减弱, 从而增加混合区域宽度. 此外, 当颗粒半径较大时, 混合区域宽度应逐渐趋近于状态C下线性形式的理论解. 算例1、5、6、7混合区域宽度的数值模拟结果如图6所示. 在0.2 ms内, 其混合区域宽度在激波经过后均随时间增长. 从算例1到7, 颗粒半径依次增大, 混合区域宽度依次增大, 最终接近线性形式的理论解.

c): 大颗粒密度条件下, 逐渐增加颗粒半径, 对应算例4、8、9、10, 其无量纲的颗粒半径 \bar{r}_p 分别为1、3、10、30. 由理论模型分析, 随着颗粒半径的逐渐增大, St 和 Sa 都逐渐增大, 曳力逐渐减弱, 导致混合区域宽度逐渐增大. 由于颗粒密度已足够大, 四条混合区域宽度曲线均应呈现指数形式, 且只和颗粒半径相关. 随着半径增大, 混合区域宽度逐渐由状态B下的指数形

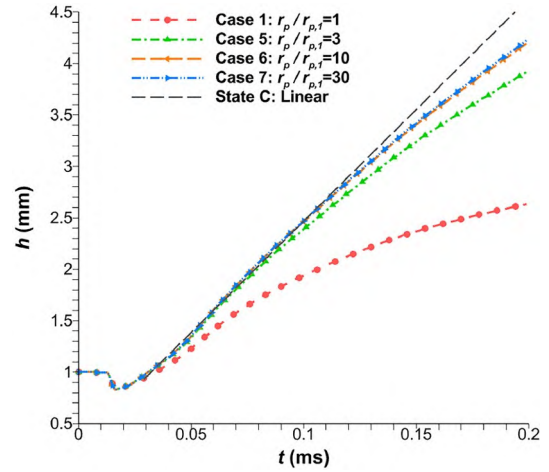


图6 (网络版彩图)颗粒密度小且颗粒半径递增的混合区域宽度演变

Figure 6 (Color online) Mixing zone width evolutions with small particle density and increasing particle radius.

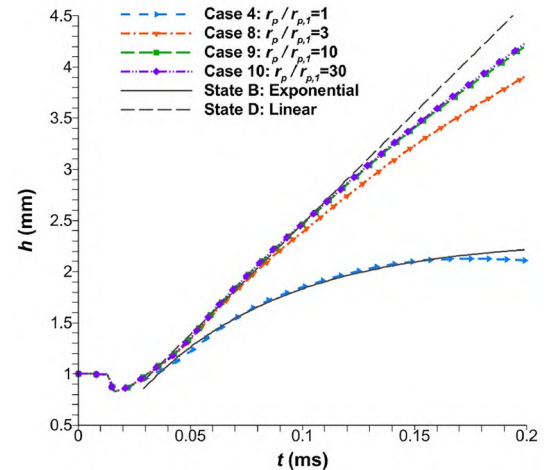


图7 (网络版彩图)颗粒密度大且颗粒半径递增的混合区域宽度演变

Figure 7 (Color online) Mixing zone width evolutions with large particle density and increasing particle radius.

式转变为状态D下的线性形式. 算例4、8、9、10的混合区域宽度的数值模拟结果如图7所示. 在0.2 ms内, 其混合区域宽度在激波经过后均随时间增长. 从算例4到10, 颗粒半径依次增大, 混合区域宽度依次增大, 由指数解逐渐演变为线性解.

d): 大颗粒半径条件下, 逐渐增加颗粒密度, 对应算例7、11、12、10, 其无量纲的颗粒密度 $\bar{\rho}_p$ 分别为1、9、100、900. 由理论模型分析, 随着颗粒密度逐

渐增大, St 数逐渐增大, 而 Sa 数保持不变, 但四种算例下颗粒已经几乎保持静止, 曳力不再变化, 因而混合区域宽度曲线几乎重合. 由于颗粒半径已足够大, 四条混合区域宽度曲线均退化为线性形式, 与颗粒密度和半径均无关. 因此, 混合区域宽度始终维持状态C或D下的线性形式. 算例7、11、12、10的混合区域宽度的数值模拟结果如图8所示. 在0.2 ms内, 其混合区域宽度在激波经过后均随时间增长. 从算例7到10, 颗粒密度依次增大, 混合区域宽度保持不变, 始终和线性理论相吻合.

综合四条路径上的各个算例, 我们可以看出, 数值模拟的结果与理论分析的预测是相一致的. 此外, 我们总结了颗粒参数对混合区域宽度的影响规律: 增大颗粒半径会增大混合区域宽度, 而增大颗粒密度后混合区域宽度减小与否取决于颗粒半径的大小.

进一步地, 我们讨论 St 数逐渐增大的情形, 用以说明 St 数在预测混合区域宽度增长时的失效现象. 以状态A下的算例1作为起始位置, 状态D下的算例10为终止位置, 规划两条较长的参数变化路径: 其一为状态A→B→D, 对应算例为1→2→3→4→8→9→10, 其二为状态A→C→D, 对应算例为1→5→6→7→11→12→10. 每条路径上, 相邻算例的 St 数相差约10倍, 两条路径对应算例的 St 数依次相等. 提取两路径上0.2 ms时刻混合区域宽度的大小, 绘制如图9所示.

从图9中可以看出, 对于相同的始末位置, 逐渐增大 St 数, 采用不同的颗粒参数变化路径会导致混合区域宽度发生分叉现象: 在路径一中, 先增大颗粒密度再增大颗粒半径会导致混合区域宽度经历先减小再增大的过程, 而在路径二中, 先增大颗粒半径再增大颗粒密度会导致混合区域宽度经历先增大再不变的过程.

两条路径的不同表明, St 数在预测混合区域宽度增长时存在失效现象: 混合区域宽度和 St 数之间并不存在明显的单调关系, 其演化取决于颗粒密度和半径的具体变化. 这也体现了颗粒参数对混合区域宽度演化影响的复杂性.

3.4 无量纲数的有效性验证

分析无量纲数 Sa 和混合区域宽度的理论模型, 我们发现它们均不包含颗粒密度这一物理量, 即混合区域宽度与颗粒密度无关. 因而, 在探究此问题时, Sa 数和颗粒半径是等价的. 在 St 数足够大的情况下, 对于具

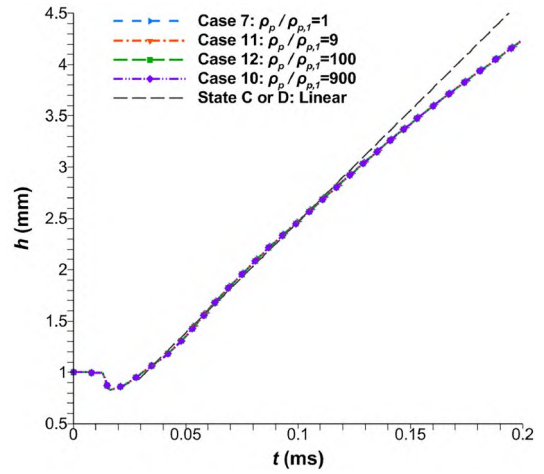


图8 (网络版彩图) 颗粒半径大且颗粒密度递增的混合区域宽度演变

Figure 8 (Color online) Mixing zone width evolutions with large particle radius and increasing particle density.

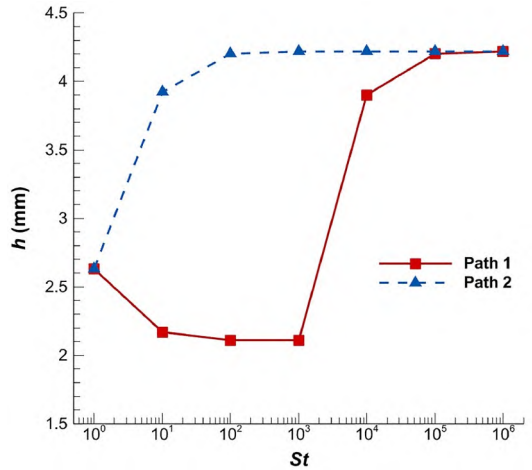


图9 (网络版彩图) 0.2 ms时刻两路径上混合区域宽度随 St 数的分叉图

Figure 9 (Color online) Bifurcation of mixing zone widths with St number on two paths at 0.2 ms.

有相同颗粒半径(相同 Sa 数)和不同颗粒密度的算例, 它们的混合区域宽度也应该是相似的.

我们提取具有不同 St 数、相同 Sa 数的四组算例. 组A包含算例1、2、3、4, 它们的 Sa 数约为0.2; 组B包含算例5、8, 它们的 Sa 数约为2; 组C包含算例6、9, 它们的 Sa 数约为20; 组D包含算例7、11、12、10, 它们的 Sa 数约为200. 分别绘制每一组算例的混合区域宽度曲线并作对比, 得到图10.

对于 St 数较小的A组算例, 随着颗粒密度的增大,

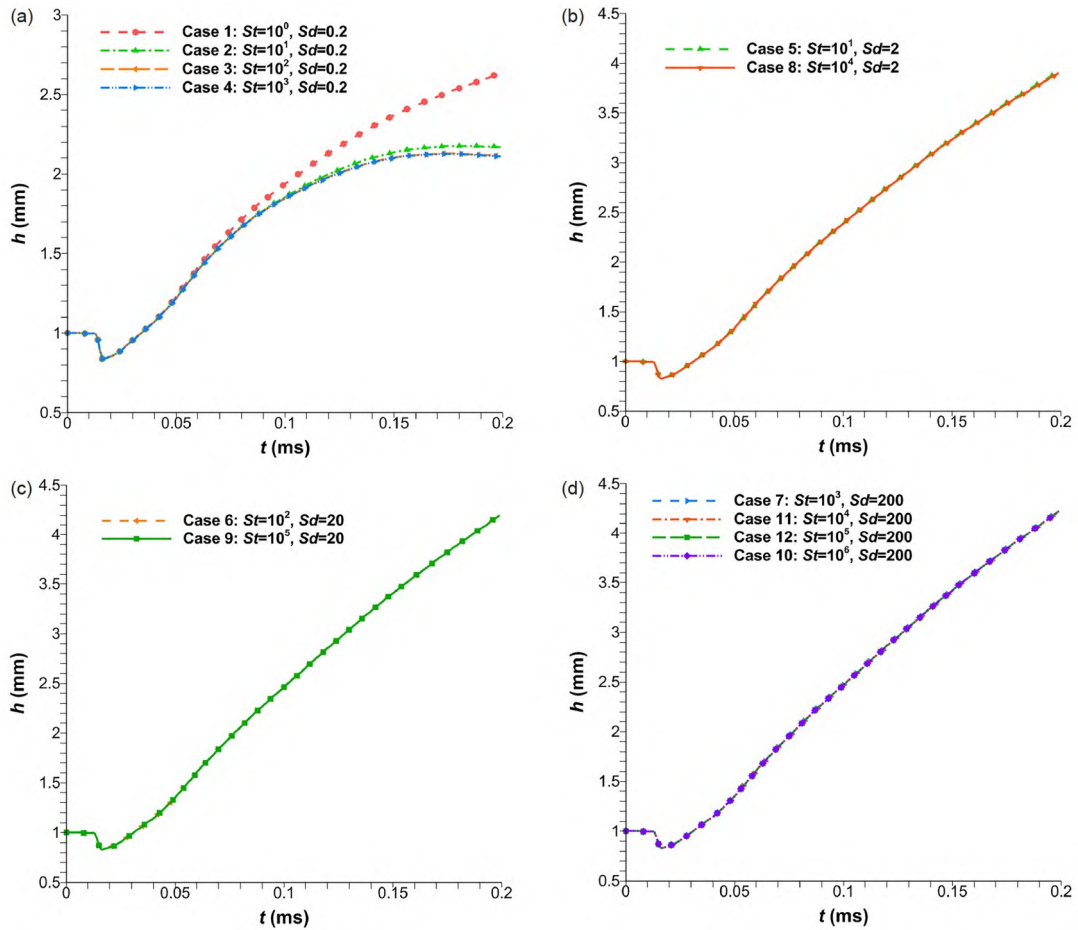


图 10 (网络版彩图) 相同 Sd 数算例的混合区域宽度对比. (a) $Sd \approx 0.2$; (b) $Sd \approx 2$; (c) $Sd \approx 20$; (d) $Sd \approx 200$

Figure 10 (Color online) Comparison of mixing zone widths for calculation examples with the same Sd number. (a) $Sd \approx 0.2$; (b) $Sd \approx 2$; (c) $Sd \approx 20$; (d) $Sd \approx 200$.

颗粒速度由紧紧跟随流体运动变为逐渐滞后直至几乎静止. 因此, 尽管A组的算例具有相同的 Sd 数, 但混合区域宽度曲线并不完全一致. 这也从侧面表明, 只有在大 St 数的情况下, Sd 数才可以发挥作用. 而对于 St 数较大的B、C、D三组, 组内算例具有相同 Sd 数, 其混合区域宽度的演化趋势近似. 这表明了在大 St 数的情况下, Sd 数可以有效控制多相RMI流动状态, 也进一步验证了上述理论模型的正确性. 而对于整个相图, St 数和 Sd 数的组合才是混合区域宽度演化主控参数.

在本节中, 我们通过改变颗粒参数设置了系列算例来模拟多相RMI中混合区域宽度的演化, 阐明了相图中不同路径下颗粒参数的影响规律, 即增大颗粒半径会增大混合区域宽度, 而增大颗粒密度后混合区域宽度减小与否取决于颗粒半径. 而 St 数在预测混合区

域宽度增长时失效, 即对于相图中相同始末位置, 通过不同颗粒参数的变化路径来增大 St 数, 混合区域宽度增长存在分叉现象. 对于具有大 St 数的情况, Sd 数可以有效控制混合区域宽度演化; 而对于任意颗粒参数条件, St 数和 Sd 数的组合才是混合区域宽度演化主控参数.

4 结论

本文基于颗粒密度和半径构成的相图, 建立了极限颗粒密度或半径下多相RMI演化的理论模型, 揭示了颗粒参数对混合区域宽度的影响规律.

我们基于界面处流体运动的动量方程, 考虑颗粒体积分数、半径和气体黏度等参数影响, 提出了新的无量纲 Sd , 代表曳力弛豫时间与流动特征时间之比,

能够有效表征曳力对流体速度的影响. 基于小扰动理论建立了极限颗粒密度和半径的混合区域宽度增长率的理论模型, 在颗粒密度极大时混合区域宽度呈指数增长, 在颗粒半径极大时或二者都较大时呈线性增长, 补充相图中各个状态下的理论解.

我们开展了系列多相RMI问题的数值模拟, 并与理论预测相互验证, 揭示了极限状态之间颗粒参数变化的影响规律, 即增大颗粒半径会增大混合区域宽度, 而增大颗粒密度后混合区域宽度减小与否取决于颗粒半径的大小. 并指出 St 数在预测混合区域宽度增长时

失效, 即对于相图中相同始末位置, 通过不同颗粒参数的变化路径来增大 St 数, 混合区域宽度增长存在分叉现象. 对于具有大 St 数的情况, Sd 数可以有效控制混合区域宽度演化; 而对于任意颗粒参数条件, St 数和 Sd 数的组合才是混合区域宽度演化的主控参数.

本文提出的 Sd 数可以为未来多相RMI演化的模拟和预测提供支撑. 通过改变颗粒参数来改变 Sd 数, 可以实现调控混合区域宽度增长形态, 为实际问题中多相RMI的控制提供新思路.

参考文献

- 1 Richtmyer R D. Taylor instability in shock acceleration of compressible fluids. *Comm Pure Appl Math*, 1960, 13: 297–319
- 2 Luo X, Wang M, Si T, et al. On the interaction of a planar shock with an polygon. *J Fluid Mech*, 2015, 773: 366–394
- 3 Luo X, Guan B, Zhai Z, et al. Principal curvature effects on the early evolution of three-dimensional single-mode Richtmyer–Meshkov instabilities. *Phys Rev E*, 2016, 93: 023110
- 4 Sun R, Ding J, Zhai Z, et al. Convergent Richtmyer–Meshkov instability of heavy gas layer with perturbed inner surface. *J Fluid Mech*, 2020, 902: A3
- 5 Zhou Y, Cabot W H, Thornber B. Asymptotic behavior of the mixed mass in Rayleigh–Taylor and Richtmyer–Meshkov instability induced flows. *Phys Plasmas*, 2016, 23: 052712
- 6 Li H, He Z, Zhang Y, et al. On the role of rarefaction/compression waves in Richtmyer–Meshkov instability with reshock. *Phys Fluids*, 2019, 31: 054102
- 7 Sano T, Tamatani S, Matsuo K, et al. Laser astrophysics experiment on the amplification of magnetic fields by shock-induced interfacial instabilities. *Phys Rev E*, 2021, 104: 035206
- 8 Wang L F, Ye W H, He X T, et al. Theoretical and simulation research of hydrodynamic instabilities in inertial-confinement fusion implosions. *Sci China-Phys Mech Astron*, 2017, 60: 055201
- 9 Reese D T, Ames A M, Noble C D, et al. Simultaneous direct measurements of concentration and velocity in the Richtmyer–Meshkov instability. *J Fluid Mech*, 2018, 849: 541–575
- 10 Yang J, Kubota T, Zukoski E E. Applications of shock-induced mixing to supersonic combustion. *AIAA J*, 1993, 31: 854–862
- 11 Bambauer M, Hasslberger J, Klein M. Direct numerical simulation of the Richtmyer–Meshkov instability in reactive and nonreactive flows. *Combust Sci Tech*, 2020, 192: 2010–2027
- 12 Fan E, Hao J, Guan B, et al. Numerical investigation on reacting shock-bubble interaction at a low Mach limit. *Combust Flame*, 2022, 241: 112085
- 13 Ukai S, Balakrishnan K, Menon S. On Richtmyer–Meshkov instability in dilute gas-particle mixtures. *Phys Fluids*, 2010, 22: 104103
- 14 Saffman P G. On the stability of laminar flow of a dusty gas. *J Fluid Mech*, 1962, 13: 120–128
- 15 Balakrishnan K, Menon S. A multiphase buoyancy-drag model for the study of Rayleigh–Taylor and Richtmyer–Meshkov instabilities in dusty gases. *Laser Part Beams*, 2011, 29: 201–217
- 16 Meng B, Zeng J, Tian B, et al. Modeling and verification of the Richtmyer–Meshkov instability linear growth rate of the dense gas-particle flow. *Phys Fluids*, 2019, 31: 074102
- 17 Meng B, Zeng J, Tian B, et al. Modeling and simulation of a single-mode multiphase Richtmyer–Meshkov instability with a large Stokes number. *AIP Adv*, 2019, 9: 125311
- 18 Zheng H, Chen Q, Meng B, et al. On the nonlinear growth of multiphase Richtmyer–Meshkov instability in dilute gas-particles flow. *Chin Phys Lett*, 2020, 37: 015201

- 19 Zhou Z, Ding J, Zhai Z, et al. Mode coupling in converging Richtmyer–Meshkov instability of dual-mode interface. *Acta Mech Sin*, 2020, 36: 356–366
- 20 Zhang Y, Zhou Z, Ding J, et al. Interaction of a planar shock wave with two heavy/light interfaces. *Acta Mech Sin*, 2022, 38: 322047
- 21 Zhai Z, Zou L, Wu Q, et al. Review of experimental Richtmyer–Meshkov instability in shock tube: From simple to complex. *Proc Instit Mech Eng Part C-J Mech Eng Sci*, 2018, 232: 2830–2849
- 22 McFarland J A, Black W J, Dahal J, et al. Computational study of the shock driven instability of a multiphase particle-gas system. *Phys Fluids*, 2016, 28: 024105
- 23 Tian B, Zeng J, Meng B, et al. Compressible multiphase particle-in-cell method (CMP-PIC) for full pattern flows of gas-particle system. *J Comput Phys*, 2020, 418: 109602
- 24 Zhou R, Meng B, Zeng J, et al. Numerical simulation of compressible fluid-particle flows in multimaterial Lagrangian hydrodynamics framework. *Comput Fluids*, 2021, 223: 104945
- 25 Si Y, Li S, Meng B, et al. A dominant dimensionless number and theoretical model for the evolution of multiphase Richtmyer–Meshkov instability. *Phys Fluids*, 2024, 36: 013314
- 26 Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, II. *J Comput Phys*, 1989, 83: 32–78
- 27 Harten A, Lax P D, Leer B van. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *Siam Rev*, 1983, 25: 53–79
- 28 Si Y, Li S, Chen Q, et al. Heat transfer effects on multiphase Richtmyer–Meshkov instability of dense gas–particle flow. *Phys Fluids*, 2023, 35: 053339
- 29 Meng B, Zeng J, Chen Q, et al. Numerical method for compressible gas-particle flow coupling using adaptive parcel refinement (APR) method on non-uniform mesh. *J Comput Phys*, 2022, 466: 111418
- 30 Reckinger S J, Livescu D, Vasilyev O V. Adaptive wavelet collocation method simulations of Rayleigh–Taylor instability. *Phys Scr*, 2010, T142: 014064

Research on the limit theoretical model and influence rules of multiphase RMI mixing zone width under the influence of particle density and radius

SI YingMing^{1,2}, MENG BaoQing^{1,2*}, WANG Chun^{1,2}, TIAN BaoLin³ & CHEN Qian⁴

¹ State Key Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;

² School of Engineering Science, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 101408, China;

³ School of Aeronautic Science and Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China;

⁴ Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100094, China

*Corresponding author (email: mengbaoqing92@foxmail.com)

Particle parameters have a significant impact on the evolution of the mixing zone width of the multiphase Richtmyer-Meshkov instability (RMI), but the influence law remains to be explored. Based on the interface motion equation and integrating the influence of particle volume fraction, radius and gas viscosity parameters, this article proposes a dimensionless number Sd to characterize the effect of drag on the fluid velocity relaxation process. A growth model for the mixing zone width under extreme particle parameters is established based on the small-perturbation theory. The analysis showed that the combination of particle density and particle size determines the growth pattern of the mixing zone width. It shows exponential growth when the particle density is large, and linear growth when the radius is large or both are large. Further analysis revealed the influence of changes in particle parameters on the mixing zone width, and found that increasing the particle radius will promote the growth of the mixing zone width. The numerical simulation results verify the validity of the theoretical model and Sd number. The results indicate that the classical Stokes number (St) fails in predicting the growth of the mixing zone width, and the combination of St number and Sd number is the dominant dimensionless number for the evolution of multiphase RMI.

multiphase Richtmyer-Meshkov instability, particle parameters, mixing zone width, theoretical model, influence rules

PACS: 47.20.Ma, 47.40.Nm, 47.55.Kf

doi: 10.1360/SSPMA-2024-0033