

B06

# 紧致型整体光滑因子及低耗散五阶 WENO-ZN 格式研究

周彪<sup>1,2</sup>, 申义庆<sup>1,2</sup>

(1 中国科学院力学研究所高温气体动力学重点实验室, 北京海淀区 100190;

2 中国科学院大学工程科学学院, 北京 100049)

**摘要:** WENO(Weighted essentially non-oscillatory)格式能较为准确捕捉可压缩复杂流场的流动细节,是近年来高精度激波捕捉格式的突出代表,自提出后在超声速流动中得到了广泛的发展和应。由于受使用模板和光滑因子的限制, WENO 格式存在临界点降阶的问题。为了提高 WENO 格式高阶临界点( $\geq 2$ 阶)附近精度以更准确捕捉复杂流场中的流动细节, Shen 等[11]提出了一种新的 WENO 权值计算方法,构造了高阶的 WENO-ZN 格式,如五阶 WENO-ZN 格式能将二阶临界点的精度提高到五阶。本文提出利用紧致格式的概念,构造了具有十阶的紧致型整体光滑因子,从而使得新格式(WENO-ZNc)在不增加模板点的情况下对一阶、二阶及三阶临界点,均能提高到五阶精度。为保持 ENO 特性及出现间断时不影响光滑区紧致整体光滑因子的有效性,发展了利用紧致整体光滑因子的间断判别方法,在 WENO-ZNc 格式的框架下,光滑区采用紧致整体光滑因子,间断区将紧致整体光滑因子替换为显式整体光滑因子(即 WENO-ZN 格式),保证了光滑区(含高阶临界点)的高精度低耗散优势。数值结果表明,改进格式在激波捕捉方面具有鲁棒性,且有较高的精度和收敛速度,降低了数值耗散,同时新格式能大大提高对复杂小尺度结构的分辨率。

**关键词:** WENO 格式, 临界点, 整体模板光滑因子, 间断判别方法; 高精度低耗散;

## 0 引言

加权基本无振荡(WENO)格式由于其优越的激波捕捉性能和高精度特点,经过不断地改进和发展,已在含激波等复杂流场的计算中获得广泛应用。WENO 格式是由 Liu 等<sup>[1]</sup>在无振荡格式(ENO)构造思想的基础上首先提出,利用 ENO 候选模板的凸组合,使得数值通量近似于更高阶的精度。Jiang 和 Shu<sup>[2]</sup>提出了经典的 WENO-JS 格式,构建了任意阶 WENO 格式子模板光滑度和权值计算的一般框架,能获得更好的精度。

Henrick 等<sup>[3]</sup>指出, WENO 格式在一阶临界点处存在降阶问题,并通过引入一个映射函数,构造了 WENO-M 格式。Feng 等<sup>[4]</sup>通过采用更好的映射函数将原始权值映射到更优值,改进 WENO-M 高阶临界点精度,但 WENO-M 格式存在着权重算子复杂,计算量大,长时模拟误差增大等不足。Borges 等<sup>[6]</sup>提出构造整体模板光滑因子以提高权

函数计算精度,从而发展了 WENO-Z 格式。因为 WENO-Z 格式使用的整体模板光滑因子构造的权函数能直观地判别格式的计算精度,因而出现一些高阶整体光滑因子的构造方法及相应格式<sup>[7-9]</sup>。后来, Borges 等<sup>[10]</sup>也引入了调节防止分母为 0 的敏感性因子  $\epsilon$  改进临界点精度的方法,但会出现量纲不匹配问题。尽管这些改进格式可部分改善计算效果,但是会降低求解间断问题的鲁棒性。另外, Shen 等<sup>[11]</sup>(2020)基于八阶整体光滑度量因子  $\tau_g$ , 利用局部光滑度量因子组合函数替换用于计算权重的常数 1,构造了 WENO-ZN 格式,保证了 ENO 属性和激波捕捉的鲁棒性,有效地提高了二阶临界点的计算精度。

另一种优化 WENO 格式的方式是将其与线性格式或紧致格式等混合,混合格式比 WENO 格式表现出了低耗散、高精度的优势,但实现两种子格式自动切换的间断判别方法仍值得深入研究,目前的方法<sup>[12-18]</sup>多会引入问题相关和网格步长相关参数,带来精度的降低和鲁棒性的降低。Shen 和 Zha<sup>[19]</sup>利用

子模版光滑因子构造了不含人为的、问题相关参数的间断判别因子  $\tau_5$ ，但其会将二阶临界点误判为间断。Shen 等<sup>[20]</sup>随后提出了改进的间断判别因子  $\eta_7$ ，但在更高阶（如三阶）临界点附近会误判为间断。

本文在分析以往五阶 WENO 格式精度的基础上，通过紧致方式构造十阶整体模板光滑因子，并利用该光滑因子构造了新的间断判别方法，在此基础上发展了五阶 WENO-ZNc 格式。数值结果表明，该格式保持了 WENO-ZN 格式良好的激波捕捉特性和鲁棒性的同时，进一步提高了高阶临界点精度，降低了数值耗散，提高了对复杂涡系结构的分辨率。

## 1 数值方法

从一维双曲守恒方程出发：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

通量函数  $f(u)$  可分裂为  $f(u) = f^+(u) + f^-(u)$ ，其中， $f^+(u)/du \geq 0, f^-(u)/du \leq 0$ 。 $\Delta x$  为均匀网格空间步长，方程的半离散化形式为

$$\frac{du_i}{dt} = - \frac{\hat{f}_{i+1/2} - \hat{f}_{i-1/2}}{\Delta x} \quad (2)$$

该处以  $\hat{f}^+(u)_{i+1/2}$  数值通量为例，省去 ‘+’。

### 1.1 WENO-JS 格式

五阶 WENO 格式的通量可写为

$$\hat{f}_{i+1/2} = \sum_{k=0}^2 w_k q_k \quad (3)$$

其中  $q_k$  为子模版  $S_k^3 = (i+k, i+k-1, i+k)$  上的

三阶通量，形式为

$$\begin{cases} q_0 = \frac{1}{3}f_{i-2} - \frac{7}{6}f_{i-1} + \frac{11}{6}f_i \\ q_1 = -\frac{1}{6}f_{i-1} + \frac{5}{6}f_i + \frac{1}{3}f_{i+1} \\ q_2 = \frac{1}{3}f_i + \frac{5}{6}f_{i+1} - \frac{1}{6}f_{i+2} \end{cases} \quad (3)$$

Jiang 和 Shu 计算权值  $\omega_k$

$$\alpha_k = \frac{c_k}{(IS_k + \epsilon)^2}$$

$$\omega_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}, k = 0, 1, 2, \quad (4)$$

$IS_k$  为局部光滑度量因子 (LSI)，用于衡量子模版  $S_k^3$  相对光滑度， $c_0 = 0.1, c_1 = 0.6, c_2 = 0.3$  为五阶迎风格式的理想权值。为避免  $\epsilon$  影响 ENO 特性，本文取  $\epsilon = 10^{-40}$ （双精度下最小正数的平方根）。

Jiang 和 Shu 提出了局部光滑度量因子 (LSI) 为

$$IS_k = \sum_{l=1}^2 \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (\Delta x)^{2l-1} (q_k^{(l)})^2 dx, \quad (5)$$

(LSI) 具体形式为：

$$\begin{cases} IS_0 = \frac{13}{12}(f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i)^2 + \frac{1}{4}(f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i)^2 \\ IS_1 = \frac{13}{12}(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1})^2 + \frac{1}{4}(f_{i-1} - f_{i+1})^2 \\ IS_2 = \frac{13}{12}(f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2})^2 + \frac{1}{4}(3f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2})^2 \end{cases} \quad (6)$$

对  $IS_k$  在  $x_i$  处 Taylor 展开以便分析 WENO 格式特性

$$\left\{ \begin{aligned} IS_0 &= f_i'^2 \Delta x^2 + \left( \frac{13}{12} f_i''^2 - \frac{2}{3} f_i' f_i''' \right) \Delta x^4 + \left( -\frac{13}{6} f_i'' f_i''' + \frac{1}{2} f_i' f_i^{(4)} \right) \Delta x^5 \\ &\quad + \left( \frac{43}{36} (f_i''')^2 - \frac{91}{72} f_i'' f_i^{(4)} \right) \Delta x^6 + \frac{103}{72} f_i''' f_i^{(4)} \Delta x^7 + O(\Delta x^8) \\ IS_1 &= f_i'^2 \Delta x^2 + \left( \frac{13}{12} f_i''^2 + \frac{1}{3} f_i' f_i''' \right) \Delta x^4 + \left( \frac{1}{36} (f_i''')^2 + \frac{13}{72} f_i'' f_i^{(4)} \right) \Delta x^6 + O(\Delta x^8) \\ IS_2 &= f_i'^2 \Delta x^2 + \left( \frac{13}{12} f_i''^2 - \frac{2}{3} f_i' f_i''' \right) \Delta x^4 + \left( \frac{13}{6} f_i'' f_i''' - \frac{1}{2} f_i' f_i^{(4)} \right) \Delta x^5 \\ &\quad + \left( \frac{43}{36} (f_i''')^2 + \frac{91}{72} f_i'' f_i^{(4)} \right) \Delta x^6 + \frac{103}{72} f_i''' f_i^{(4)} \Delta x^7 + O(\Delta x^8) \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Shen 等<sup>[24]</sup>提出可采用如下的公式计算子模板光滑因子,

$$IS_k = \sum_{l=1}^{r-1} \gamma_l [f_k^{(l)}]^2 \quad (9)$$

其中  $f_k^{(l)}$  为子模版上  $l$  阶差分,

$$\left\{ \begin{aligned} f_0^{(1)} &= (f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_{i+1})/2 & \left\{ \begin{aligned} f_0^{(2)} &= f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i \\ f_1^{(1)} &= (-f_{i-1} + f_{i+1})/2 & \left\{ \begin{aligned} f_1^{(2)} &= f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1} \\ f_2^{(1)} &= (-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2})/2 & \left\{ \begin{aligned} f_2^{(2)} &= f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2} \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \quad (10)$$

如  $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 13/12$ , 则为光滑因子 (7)。

在文[3]中, Henrick 推导了五阶收敛充

$$\sum_{k=0}^2 A_k (\omega_k^+ - \omega_k^-) = O(\Delta x^3)$$

要条件  $\omega^\pm - c_k = O(\Delta x^2)$  (11)

其中  $A_k$  为  $q_k$  的 Taylor 展开  $\Delta x^3$  阶的系数,  $\omega^\pm$  分别为  $\hat{f}_{i\pm 1/2}$  的权值, 简化得出充分条件为:

$$\omega_k^\pm - c_k = O(\Delta x^3) \quad (12)$$

### 1.2 五阶 WENO-Z 格式

文<sup>[6]</sup>通过构造整体光滑因子 (GSI)  $\tau_5$  计算权值提出五阶 WENO-Z 格式

$$\alpha_k = c_k \left( 1 + \left( \frac{\tau_5}{IS_k + \epsilon} \right)^q \right) \quad (13)$$

其设计的  $\tau_5 = |IS_2 - IS_0|$ , 对其 Taylor 展开得到,

$$\tau_5 = \left| \frac{13}{3} f'' f''' - f' f^{(4)} \right| \Delta x^5 + O(\Delta x^6). \quad (14)$$

由此, 可以得到

$$\omega_k^Z = \begin{cases} c_k + O(\Delta x^{3q}), f_i' \neq 0 \\ c_k + O(\Delta x^q), f_i' = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Borges 指出, 对于含间断解, 增大  $q$  使得耗散增大。由于求解激波问题中 WENO-Z 的低耗散需求比临界点附近收敛阶重要, 一般取  $q = 1$ 。

### 1.3 几种五阶 WENO-Z 型改进格式

(1) WENO-ZA: Liu 等<sup>[21]</sup>的权值构造方法

$$\alpha_k = c_k \left( 1 + A \left( \frac{\tau_6'}{IS_k + \epsilon} \right)^q \right) \quad (16)$$

函数  $A$  为

$$A = \frac{\tau_6'}{IS_0 + IS_2 - \tau_6' + \epsilon}. \quad (17)$$

全局光滑因子定义为:

$$\tau_6' = \gamma_1 (|f_0^{(1)}| - |f_2^{(1)}|)^2 + \gamma_2 (|f_0^{(2)}| - |f_2^{(2)}|)^2 \quad (18)$$

(2) WENO-D/A: Wang 等<sup>[22]</sup>的权值构造方法,

$$\alpha_k = c_k \left( 1 + \Phi \left( \frac{\tau_5}{IS_k + \epsilon} \right)^q \right) \quad (19)$$

其中

$$\Phi = \min(1, \phi), \phi = \sqrt{|IS_0 - 2IS_1 + IS_2|}$$

WENO-A 是对 WENO-D 的修正, 权值为

$$\alpha_k = c_k (\max(1, \Phi \left( \frac{\tau_5}{IS_k + \epsilon} \right)^q)) \quad (20)$$

显然  $\phi$  与  $f$  尺度相同, 不同的参考值会使得 WENO-D/A 丧失自相似性, 出现非物理振荡。

(3) WENO-ZN: Shen 等<sup>[11]</sup>构造了 WENO-ZN 格式, 从 WENO-Z 的  $\alpha_k$  出发, 将其常数 1 用独立于  $k$  的函数  $C$  替代, 其形式为,

$$C = D \left( \frac{IS_0 + IS_2 - |IS_0 - IS_2| + \epsilon}{|IS_0 - IS_2| + \epsilon} \right)^2 \quad (21)$$

$D$  为常数, 本文取  $D=10$ , 且选用整体模板上的最高阶导数作为整体光滑因子, 有整体光滑因子

$$\tau_8 = (f_{i-2} - 4f_{i-1} + 6f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2})^2 \quad (22)$$

则未归一化权值  $\alpha_k$  为

$$\alpha_k = c_k \left( C + \left( \frac{\tau_8}{IS_k + \epsilon} \right)^q \right) \quad (23)$$

对于整体光滑因子  $\tau_8$ , Taylor 系数展开为

$$\tau_8 = (f_i^{(4)} \Delta x^4 + O(\Delta x^5))^2 \quad (24)$$

代入公式 (23), 有

$$\alpha_k = \begin{cases} c_k (C + O(\Delta x^4)^q), & \text{if } f_i' = 0, \\ c_k (C + O(\Delta x^2)^q), & \text{if } f_i' = f_i'' = 0, f_i^{(3)} \neq 0 \\ c_k (C + O(1)), & \text{if } f_i' = f_i'' = f_i^{(3)} = 0 \end{cases} \quad (25)$$

则新权值在一阶临界点满足五阶收敛充分条件, 在二阶临界点  $q=1$  时达到四阶精度,  $q=2$  时具有五阶精度。

对函数  $C$  进行 Taylor 展开分析, 有

$$C = \begin{cases} O(\Delta x^{-6}), & \text{if } f_i' \neq 0, \\ O(\Delta x^{-2}), & \text{otherwise} \end{cases} \quad (26)$$

即在光滑区  $C$  远远大于 (22) 中的第二项, 使格式权值更接近理想权值, 从而减小了光滑区的数值耗散。

而如果整体模板含间断,  $C \ll 1$ ,  $\alpha_k$  的大小主要取决于 (22) 第二项, 含间断模板归一化权值将接近于 1, 保证了 ENO 特性。

#### 1.4 新型 WENO-ZNc 格式

通常, 利用五个点及系数待定法, 可以获得四阶导数的逼近, 即

$$F_i^{(4)} = (a_1 f_{i-2} + \dots + a_5 f_{i+2}) = f_i^{(4)} \Delta x^4 + O(\Delta x^5) \quad (27)$$

假定已求得  $i$  点的一阶导数值  $F_i'$ , 则利用紧致格式的思想, 我们可以获得一个五阶导数的逼近为

$$F_i^{(5)} = (a f_{i-2} + \dots + f F_i') = f_i^{(5)} \Delta x^5 + O(\Delta x^6) \quad (28)$$

为了不增加节点及不影响  $f_i'$  的精度, 我们可利用二对角紧致公式

$$F_i' = a f_{i-2} + b f_{i-1} + \dots + e f_{i+2} + g F_{i-1}' \quad (29)$$

计算  $F_i'$  的值。

在边界处 ( $i = 0$ ), 可利用六阶差分计算

$$F_i' = (3f_{i-2} - 30f_{i-1} - 20f_i + 60f_{i+1} - 15f_{i+2} + 2f_{i+3})/60 \quad (30)$$

利用待定系数法, 可求得整体模板内节点  $i$  的五阶差分为:

$$F_i^{(5)} = -f_{i-2} + 8f_{i-1} - 8f_{i+1} + f_{i+2} + 12F_i' \quad (31)$$

最终得出紧致型五阶整体光滑因子  $\tau_{10}$  形式为

$$\tau_{10} = [F_i^{(5)}]^2 = (f_i^{(5)} \Delta x^5)^2 + O(\Delta x^{11}) \quad (32)$$

新格式未归一化权值  $\alpha_k$  由下式计算:

$$\alpha_k = c_k \left( C + \left( \frac{\tau_{10}}{IS_k + \epsilon} \right)^q \right) \quad (33)$$

#### 1.5 WENO-ZNc 格式的特性讨论

(1) 对于整体光滑模板, Taylor 系数展开为

$$\tau_{10} = (f_i^{(5)} \Delta x^5 + O(\Delta x^6))^2 \quad (34)$$

代入公式 (31), 有

$$\alpha_k = \begin{cases} c_k (C + O(\Delta x^6)^q), & f_i' = 0, \\ c_k (C + O(\Delta x^4)^q), & f_i' = f_i'' = 0, f_i''' \neq 0, \\ c_k (C + O(\Delta x^2)^q), & f_i' = f_i'' = f_i''' = 0, f_i^{(4)} \neq 0 \end{cases} \quad (35)$$

由此, 新权值  $\omega_k$  在一阶和二阶临界点附近满足五阶收敛充分条件, 在三阶临界点附近  $q$  取 1 时能达到四阶精度,  $q$  取 2 时满足五阶充分条件。

(2) 存在间断的情况

当计算区域存在间断时, 紧致格式 (28) 计算的一阶导数值将会产生非物理振荡, 从

而将影响后面节点的 $\tau_{10}$ 的精度。因此需要对存在间断的情况做相应的处理。

首先,我们分析文[21]中提出的(显式)整体光滑因子 $\eta_7$ ,其形式为

$$\eta_7 = |(f_1^{(1)} - f_0^{(1)})^2 - (f_2^{(1)} - f_1^{(1)})^2| + (|f_0^{(2)} - f_1^{(2)}| - |f_1^{(2)} - f_2^{(2)}|)^2 \quad (36)$$

Taylor 展开得

$$\eta_7 = \left| -\frac{1}{4} (f_i^{(3)} f_i^{(4)}) \Delta x^7 + O(\Delta x^9) \right| + ((f_i^{(4)})^2 \Delta x^8 + O(\Delta x^{10})) = O(\Delta x^7) \quad (37)$$

$\eta_7$ 是 $\Delta x$ 的七阶小量,因此,只要不是三阶临界点( $f' = f'' = f''' = 0$ 的点),即 $f''' \neq 0, IS_k$ 最小是 $\Delta x$ 的六阶小量,即有 $\eta_7 \ll IS_k$  (38)

在三阶临界点, $\eta_7$ 和 $IS_k$ 具有相同的量级( $O(\Delta x^8)$ ),因此不能判定他们之间的大小。

$\tau_{10}$ 本身即为整体模板五点信息构造的五阶差分的平方,能一定程度反映整体模板间断信息。若该模板 $S^5$ 上存在间断,间断落在任意子模板 $S_k(x_{i+k-1}, x_{i+k}, x_{i+k+1}), k = 0, 1, 2$ 上,都会使 $\tau_{10}$ 得到一个大值,而不含间断的光滑子模板,其光滑因子仍为一小量,因此有

$$\tau_{10} > \min(IS_0, IS_1, IS_2) \quad (39)$$

由于间断的存在,利用紧致格式计算导数值 $f'_i$ 可能会产生较大的误差,且该误差会传播到下游的计算,因此即使在远离间断点的光滑区域, $\tau_{10}$ 的精度都将受到影响。另一方面,将造成:即使在光滑区域, $\tau_{10}$ 也可能大于 $\min(IS_k)$ 。

另外,从前面的分析,我们知道,针对光滑区域,有

$$\tau_{10} \ll \eta_7 \quad (40)$$

因此,我们提出了如下的间断判别方法,即当

$$\min(\tau_{10}, \eta_7) > \min(IS_k) \quad (41)$$

成立,则将当前模板作为间断模板处理,同时在计算权值时利用 $\tau_8$ 代替 $\tau_{10}$ ,该点作为内边界,其导数值 $F'_i$ (为计算下一模板的 $\tau_{10}$ ),由边界公式(30)计算。

对于间断后光滑区的点,若 $\tau_{10}$ 仍未恢复其十阶光滑因子特性, $\eta_7$ 仍能准确判断光滑区域(包含一阶、二阶临界点),即

$$\min(\tau_{10}, \eta_7) < \min(IS_k) \quad (42)$$

综上,新的判别方法能有效判别各种间断模板,和光滑区域(含一阶、二阶、三阶临界点),间断后附近三阶临界点可能误判为间断。

### 1.7 WENO-ZNc 格式的计算流程

开始

Step 0: 用边界公式(30)计算 $F'_0$

计算 $IS_0, IS_1, IS_2, \eta_7$

$DS(0) = (\eta_7 > \min(IS_k))$

Step 1:

DO  $i = 1, N$

计算 $IS_0, IS_1, IS_2, \tau_{10}, \eta_7$

$DS(i) = (\min(\tau_{10}, \eta_7) > \min(IS_k))$

IF  $DS(i)$  or  $DS(i-1)$  THEN

$\tau = \tau_8$

IF  $DS(i) = false$  THEN

用公式(30)重新计算 $F'_i$

END IF

ELSE

$\tau = \tau_{10}$

END IF

$\alpha_k = c_k \left( C + \left( \frac{\tau}{IS_k + \epsilon} \right)^q \right), \omega_k = \frac{\alpha_k}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}$

$$\hat{f}_{i+1/2} = \sum_{k=0}^2 w_k q_k$$

END DO

结束

## 2 数值算例

在本节中，考虑了几个问题，包括线性对流问题一维和二维欧拉问题，来评估新格式的性能，时间推进采用四阶龙格库塔（Runge-Kutta, 简称 RK）方法近似。本文中的 CFL 数总是取 0.5。

### 2.1 临界点精度

**算例 1:** 初始条件  $u_0(x) = x^k \exp(x)$  来检验一个 WENO 格式在临界点处的收敛阶。网格范围为  $[-1, 1]$ , 网格点数为  $N$ , 对于  $k = 2$ ,  $k = 3$  和  $k = 4$  情况, 点  $x = 0$  分别是一阶、二阶和三阶临界点。如表 1 所示, 在  $q = 1$  时, 原始 WENO-Z 格式分别只在一、二阶和三阶临界点的得到四阶、二阶和三阶的收敛率。WENO-ZA 在一阶临界点的情况都达到了五阶, 但在二阶临界点只有二阶。

WENO-ZN 格式能将二阶临界点精度提高到四阶。新格式大大降低了二阶临界点处的误差, 收敛速率甚至达到六阶, 三阶临界点处也能进一步降低误差, 收敛阶为四阶。在  $q = 2$  的情况下, WENO-ZN 在二阶临界点处误差达到六阶超收敛, 三阶临界点处为三阶收敛率。新格式在二阶临界处达到五阶收敛率, 但对比发现, 新格式的绝对误差均远小于 WENO-ZN 格式, 且三阶临界点处比二阶临界点处的绝对误差降低更明显。综上, 新格式 (尤其是  $q = 2$ ) 能明显提高现有 WENO-Z 型格式在二阶和三阶临界点处精度。

Borges 等<sup>[6]</sup>指出, 对于含有不连续的解, 增加  $q$  会使方案更耗散, 本文其余例子如无特别说明, 使用  $q = 1$ 。

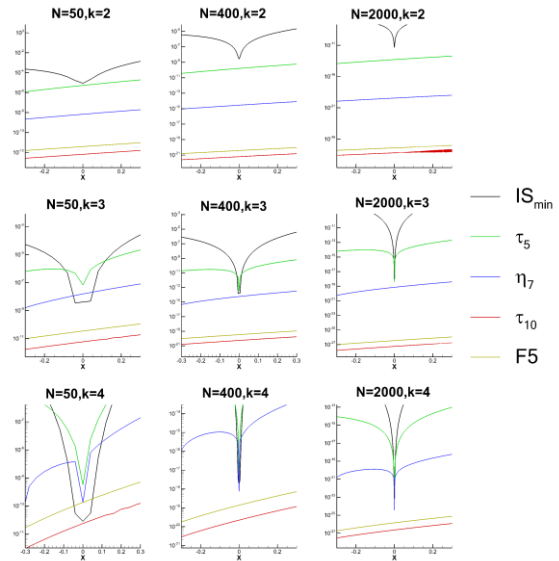


图 1 算例 1 不同阶临界点附近间断判别因子分布

同样可利用函数  $f(x) = x^k \exp(x)$  验证间断判别因子在临界点  $x = 0$  附近的特性。取  $(i - 3, \dots, i + 2)$  六点构造显式五阶差分

$$F5 = (f_i^{(5)} \Delta x^5)^2, \quad (1)$$

$IS_{\min} = \min(IS_0, IS_1, IS_2)$ 。如图 1 所示, 在一阶二阶和三阶临界点附近紧致光滑因子  $\tau_{10}$  都比  $IS_{\min}$  小, 能有效判断为光滑区。而  $\tau_5$  和  $\eta_7$  分别在一阶和二阶临界点附近失效, 即  $\tau_{10}$  能有效判别三阶临界点,  $\min(\tau_{10}, \eta_7)$  能提高原来的间断判别方法精度。同时作为 F5 对比也可以发现,  $\tau_{10}$  的精度更高, 且比 F5 判断三阶临界点有效。

表 1 临界点收敛阶

Case	N	WENO-Z		WENO-ZA		WENO-ZN		WENO-ZNc		WENO-ZN(q=2)		WENO-ZNc(q=2)	
		error	order	error	order	error	order	error	order	error	order	error	order
k=2	80	1.242E-06	—	5.611E-09	—	4.811E-09	—	4.811E-09	—	4.811E-09	—	4.811E-09	—
	160	7.248E-08	4.099	1.564E-10	5.165	1.515E-10	4.989	1.515E-10	4.989	1.515E-10	4.989	1.515E-10	4.989
	320	4.337E-09	4.063	4.784E-12	5.031	4.751E-12	4.995	4.751E-12	4.995	4.751E-12	4.995	4.751E-12	4.995
	640	2.643E-10	4.036	1.490E-13	5.005	1.487E-13	4.997	1.487E-13	4.997	1.487E-13	4.997	1.487E-13	4.997
	1280	1.630E-11	4.020	4.654E-15	5.000	4.652E-15	4.999	4.652E-15	4.999	4.652E-15	4.999	4.652E-15	4.999
	2560	1.012E-12	4.010	1.455E-16	5.000	1.455E-16	4.999	1.455E-16	4.999	1.455E-16	4.999	1.455E-16	4.999
	5120	6.299E-14	4.005	4.547E-18	5.000	4.546E-18	5.000	4.546E-18	5.000	4.546E-18	5.000	4.546E-18	5.000
k=3	80	5.450E-04	—	2.897E-04	—	2.839E-04	—	9.164E-06	—	2.926E-04	—	1.709E-08	—
	160	1.284E-04	2.086	7.262E-05	1.996	6.815E-05	2.059	1.690E-07	5.761	4.385E-05	2.739	6.023E-10	4.826
	320	2.933E-05	2.130	1.820E-05	1.997	1.458E-05	2.225	2.823E-09	5.904	1.551E-06	4.821	1.898E-11	4.988
	640	6.530E-06	2.167	4.555E-06	1.998	2.318E-06	2.653	4.533E-11	5.960	2.710E-08	5.839	5.947E-13	4.996
	1280	1.447E-06	2.174	1.139E-06	1.999	2.371E-07	3.289	7.111E-13	5.994	4.328E-10	5.968	1.860E-14	4.998
	2560	3.274E-07	2.145	2.849E-07	2.000	1.768E-08	3.745	1.092E-14	6.026	6.822E-12	5.987	5.817E-16	4.999
	5120	7.637E-08	2.100	7.123E-08	2.000	1.163E-09	3.926	1.622E-16	6.072	1.070E-13	5.994	1.818E-17	5.000
k=4	80	1.539E-06	—	2.036E-06	—	1.619E-06	—	2.025E-06	—	2.074E-07	—	3.368E-06	—
	160	1.303E-07	3.563	2.209E-07	3.204	2.098E-07	2.948	2.140E-07	3.242	6.888E-08	1.590	2.184E-07	3.947
	320	8.293E-09	3.974	2.547E-08	3.117	2.518E-08	3.059	2.281E-08	3.230	2.643E-08	1.382	3.840E-09	5.830
	640	2.811E-11	8.205	3.050E-09	3.062	3.044E-09	3.048	2.118E-09	3.428	5.076E-09	2.380	3.603E-11	6.736
	1280	1.274E-10	-2.18	3.729E-10	3.032	3.730E-10	3.029	1.380E-10	3.941	7.214E-10	2.815	3.349E-13	6.750
	2560	2.784E-11	2.193	4.609E-11	3.016	4.613E-11	3.015	5.986E-12	4.526	9.303E-11	2.955	3.966E-15	6.400
	5120	4.453E-12	2.644	5.729E-12	3.008	5.734E-12	3.008	2.078E-13	4.849	1.170E-11	2.991	7.206E-17	5.782

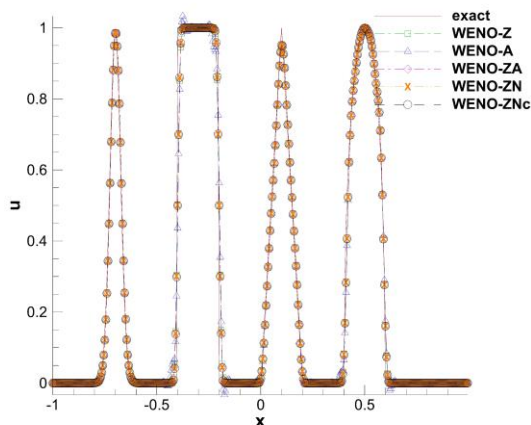


图 2 算例 2，组合波数值结果, N=400, T=2

2.2 线性对流方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in [-1, 1], t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (43)$$

**算例 2:** 计算了一个包含高斯波、方波、三角波和半椭圆波的组合波算例<sup>[2]</sup>, 结果如图 2, 可以明显看出 WENO-A 会出现非物理振荡, 新格式保持了 WENO-ZN 格式的间断捕捉特性。

**算例 3:** 初始条件

$$u_0(x) = x^k \sin(\pi x) \quad (44)$$

由于使用了周期边界条件, 在点  $x = \pm 1$  处解不够光滑。在  $k = 2$  时, 解包含一个二阶临界点 ( $x = 0$ ), 两个一阶临界点 ( $x = \pm 0.7285$ )。由图 3, 在一阶临界点附近, WENO-Z 格式误差较大, 其余格式都达到了五阶精度, 误差接近。在二阶临界点附近, WENO-ZN 比 WENO-Z 和 WENO-ZA 格式误差更小, 而新格式更优于 WENO-ZN 格式, 符合新格式对二阶临界点附近精度改进的

理论预测。 $k = 3$ 时,解有一个三阶临界点 ( $x = 0$ ),两个二阶临界点( $x = \pm 0.7740$ )。由图 4 可知,在三阶临界点附近,新格式误差远小于其它格式,符合新格式改进了三阶临界点的理论预测。

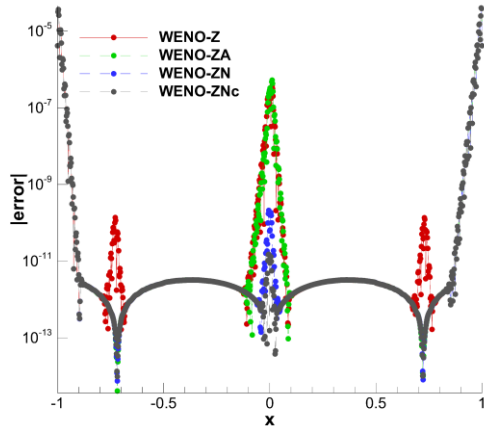


图3 算例 3,  $k=2$  时不同格式相对误差比较,  $N=1000, T=2$

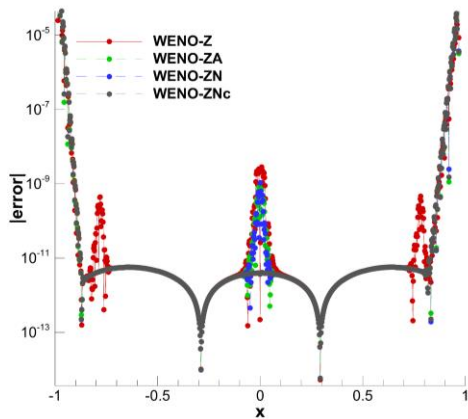


图4 算例 3,  $k=3$  时不同格式相对误差比较,  $N=1000, T=2$

### 2.3 一维欧拉方程

#### 2.3.1. Shu Osher 问题

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (3.857143, 2.629369, 31/3) & -5 \leq x < -4 \\ (1 + 0.2\sin(5\pi x), 0, 1) & -4 \leq x \leq 5 \end{cases} \quad (45)$$

#### 2.3.2. 双爆轰波碰撞问题

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1, 0, 1000) & 0 \leq x < 0.1 \\ (1, 0, 0.01) & 0.1 \leq x < 0.9 \\ (1, 0, 100) & 0.9 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (46)$$

如图 5 和图 6 所示,从临界点处精度以及激波间断捕捉能力两个角度来评估各

计算格式, WENO-ZN 及其 WENO-ZNc 格式相较其他格式得到了耗散更低且精度更高的计算结果。

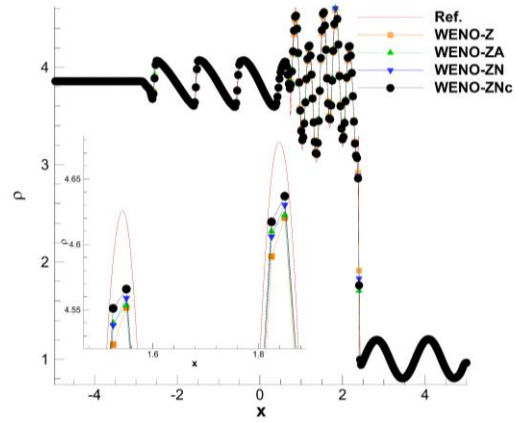


图5 Shu-Osher 问题密度分布,  $N=400, T=1.8$

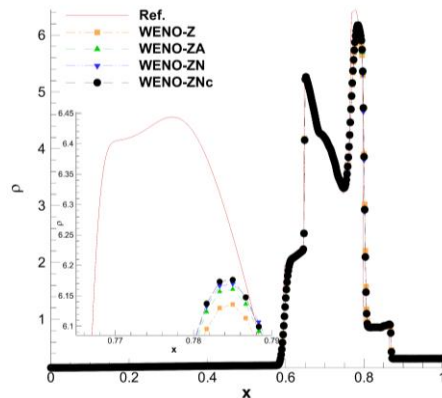


图6 双爆轰波碰撞问题密度分布,  $N=600, T=0.038$

### 2.4 二维欧拉方程

控制方程为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (47)$$

其中守恒变量 $U$ 和对流通量 $F, G$ 为

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ Eu + pu \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ Ev + pv \end{bmatrix} \quad (48)$$

状态方程由

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) \quad (49)$$

对流通量采用 Sterger-Warming 分裂方法<sup>[23]</sup>。



### 2.4.1 Rayleigh-Taylor 不稳定性问题

这个问题描述了当加速度从重流体定向到轻流体时，具有不同密度的流体之间的界面不稳定性，具体设置参看文献<sup>[11]</sup>。密度等值线见图 7 和图 8 所示。新格式耗散更低，比其他两种格式有更明显的卷起结构。

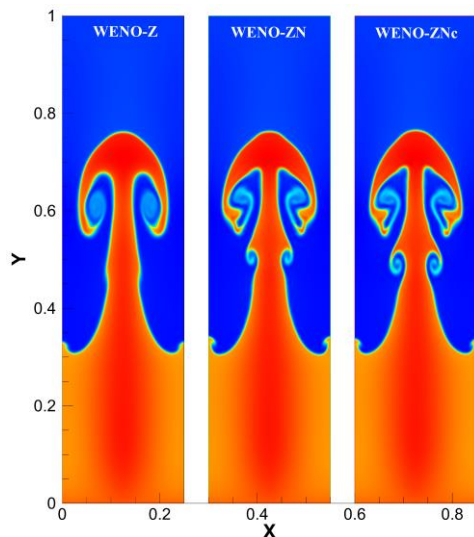


图 7 Rayleigh-Taylor 不稳定性问题密度分布，  
N=120×480, T=0.95

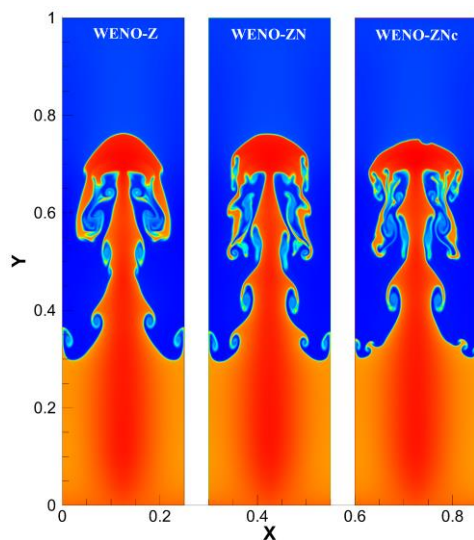


图 8 Rayleigh-Taylor 不稳定性问题密度分布，  
N=240×960, T=0.95

### 2.4.2 前台阶问题

该算例是与参考文献<sup>[11]</sup>相同，如图 9 所示，在  $600 \times 200$  的较细网格上，WENO-ZA 的计算会失效，WENO-ZN 及

WENO-ZNc 格式均比 WENO-Z 格式数值耗散更小

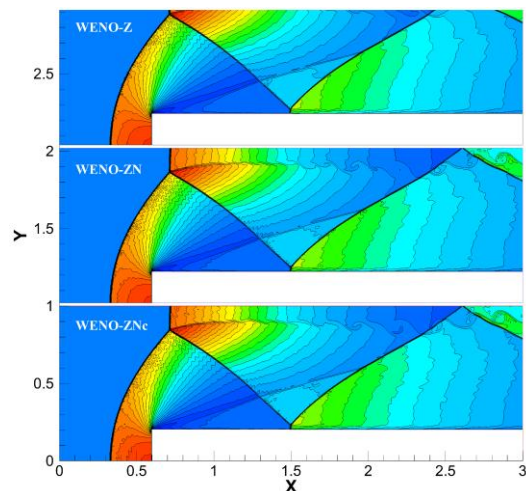


图 9 前台阶问题密度分布，N=600×200, T=4

### 2.4.3 Riemman 问题

具体设置参看文献<sup>[11]</sup>，使用了一个长度为  $2400 \times 2400$  的网格。在  $t=0.8$  处的密度等值线如图 10 和图 11 所示。图 10 为  $q=1$  时地 WENO-Z(左图)和新格式(右图)的对比，可以看出，新格式能很好地捕捉激波和接触间断点，且新格式能计算出更多的涡结构细节。WENO-ZN 格式在  $q=1$  时计算失效，如图 11，选用  $q=2$  时数值结果比较 WENO-ZN 格式和新格式的性能。可以发现新格式中的涡结构细节远远超出 WENO-ZN 格式，能一直捕捉到流场边界附近，这也符合表 1 中  $q=2$  时新格式在二阶和三阶临界点附近的误差远低于 WENO-ZN 格式。

## 3 结 论

本文提出了一种紧致型十阶整体光滑因子及新的间断模板判别方法，在此基础上发展了高精度低耗散的 WENO-ZNc 格式。

数值计算结果表明，新格式能明显提高二阶和三阶临界点上精度，具有低耗散、高分辨率特性，且对解决激波问题具有良好的鲁棒性。

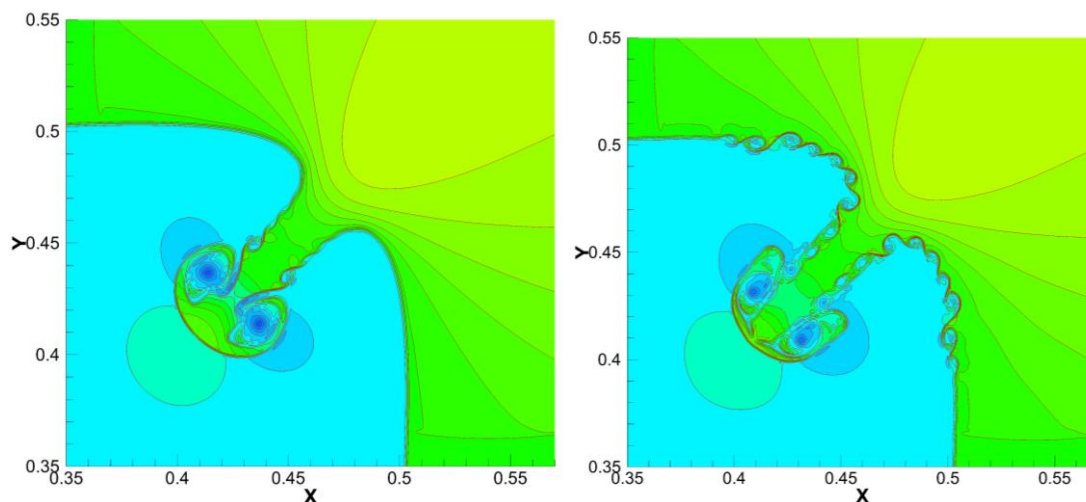


图 10 Riemann 问题密度分布,  $N=2400 \times 2400$ , 分别为 WENO-Z 格式 (左图), WENO-Znc 格式 (右图), 取  $q=1$

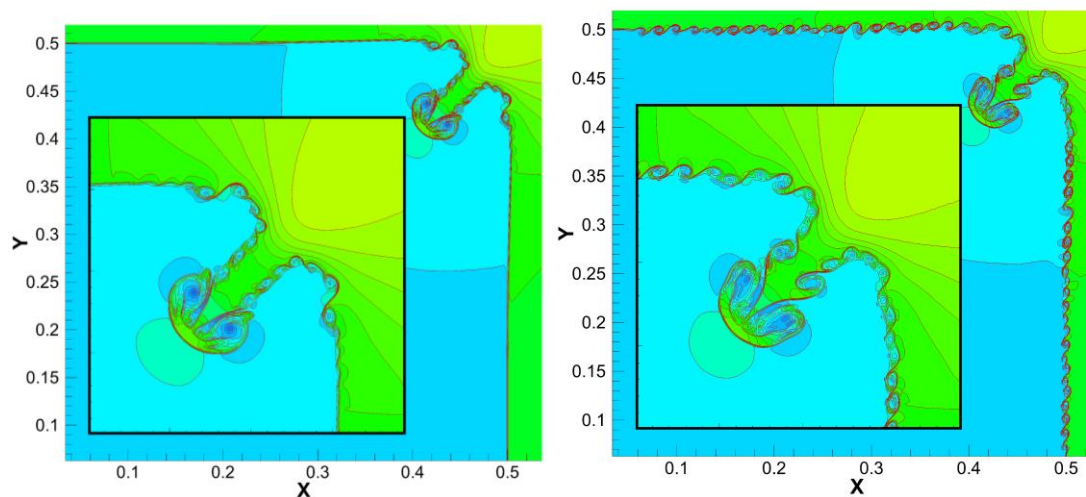


图 11 Riemann 问题密度分布,  $N=2400 \times 2400$ , 分别为 WENO-ZN 格式 (左图), WENO-Znc 格式 (右图), 取  $q=2$

### 参 考 文 献:

- [1] LIU X D, OSHER S, CHAN T. Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes [J]. Journal of Computational Physics, 1994, 115(1): 200-12.
- [2] GUANG-SHAN, JIANG, AND, et al. Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes [J]. Journal of Computational Physics, 1996, 126(1): 202-28.
- [3] HENRICK A K, ASLAM T D, POWERS J M. Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: Achieving optimal order near critical points [J]. Journal of Computational Physics, 2005, 207(2): 542-67.
- [4] FENG H, HU F X, WANG R. A New Mapped Weighted Essentially Non-oscillatory Scheme [J]. Journal of Scientific Computing, 2012, 51(2): 449-73.
- [5] FENG H, HUANG C, WANG R. An improved mapped weighted essentially non-oscillatory scheme [J]. Appl Math Comput, 2014, 232: 453-68.
- [6] BORGES R, CARMONA M, COSTA B, et al. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws [J]. Journal of Computational Physics, 2008, 227(6): 3191-211.
- [7] CASTRO M, COSTA B, DON W S. High order weighted essentially non-oscillatory WENO-Z schemes for hyperbolic conservation laws [J]. Academic Press Professional, Inc, 2011, 230(5): 1766-92.
- [8] HA Y, KIM C H, LEE Y J, et al. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme with a new smoothness indicator [J]. Journal of Computational Physics, 2013, 232(1): 68-86.
- [9] FAN P, SHEN Y Q, TIAN B L, et al. A new smoothness

- indicator for improving the weighted essentially non-oscillatory scheme [J]. *Journal of Computational Physics*, 2014, 269: 329-54.
- [10] DON W S, BORGES R. Accuracy of the weighted essentially non-oscillatory conservative finite difference schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 2013, 250: 347-72.
- [11] SHEN Y, ZHANG K, LI S, et al. A novel method for constructing high accurate and robust WENO-Z type scheme [J]. 2020.
- [12] HILL D J, PULLIN D I. Hybrid tuned center-difference-WENO method for large eddy simulations in the presence of strong shocks [J]. *Journal of Computational Physics*, 2004, 194(2): 435-50.
- [13] KIM D, KWON J H. A high-order accurate hybrid scheme using a central flux scheme and a WENO scheme for compressible flowfield analysis [J]. *Journal of Computational Physics*, 2005, 210(2): 554-83.
- [14] HU X Y, WANG Q, ADAMS N A. An adaptive central-upwind weighted essentially non-oscillatory scheme [J]. *Journal of Computational Physics*, 2010, 229(23): 8952-65.
- [15] COSTA B, DON W S, GOTTLIEB D, et al. Two-dimensional multi-domain hybrid spectral-WENO methods for conservation laws [J]. *Commun Comput Phys*, 2006, 1(3): 548-74.
- [16] LI G, QIU J X. Hybrid weighted essentially non-oscillatory schemes with different indicators [J]. *Journal of Computational Physics*, 2010, 229(21): 8105-29.
- [17] HARTEN A. Adaptive Multiresolution Schemes for Shock Computations [J]. *Journal of Computational Physics*, 1994, 115(2): 319-38.
- [18] KRIVODONOVA L, XIN J, REMACLE J F, et al. Shock detection and limiting with discontinuous Galerkin methods for hyperbolic conservation laws [J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2004, 48(3): 323-38.
- [19] SHEN Y Q, ZHA G C. Generalized finite compact difference scheme for shock/complex flowfield interaction [J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, 230(12): 4419-36.
- [20] 申义庆. 高精度激波识别方法及应用; proceedings of the 高温气体动力学国家重点实验室 2014 年度夏季学术研讨会, F, 2014 [C].
- [21] LIU S P, SHEN Y Q, ZENG F J, et al. A new weighting method for improving the WENO-Z scheme [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2018, 87(6): 271-91.
- [22] WANG Y H, WANG B S, DON W S. Generalized Sensitivity Parameter Free Fifth Order WENO Finite Difference Scheme with Z-Type Weights [J]. *Journal of Scientific Computing*, 2019, 81(3): 1329-58.
- [23] STEGER J L, WARMING R F. FLUX VECTOR SPLITTING OF THE INVISCID GAS-DYNAMIC EQUATIONS WITH APPLICATION TO FINITE-DIFFERENCE METHODS [J]. *Journal of Computational Physics*, 1981, 40(2): 263-93.
- [24] Shen YQ, Zha GC. A robust seventh-order WENO scheme and its application, AIAA Paper 2008-075. 46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit; 2008; Reno, Nevada

# RESEARCH ON COMPACT GLOBAL SMOOTHNESS INDICATOR AND LOW DISSIPATIVE FIFTH-ORDER WENO-ZN SCHEME

Biao Zhou<sup>1,2</sup>      Yiqing Shen<sup>1,2</sup>

(1 Key Laboratory of High Temperature Gas Dynamics, Institute of Mechanics, C A S, No.15 Beisihuanxi Road, Beijing 100190, China;

2 School of Engineering Science, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China )

**Abstract** The WENO (Weighted essentially non-oscillatory) scheme can accurately capture the flow structure of compressible and complex flow fields. It is an outstanding representative of the high-precision shock capture scheme in recent years. Since its proposal, it has been widely developed and applied in supersonic flow. Due to the limitation of using stencil and smoothness indicator, the WENO scheme has the problem of reducing the accuracy in critical points. In order to improve the accuracy of high-order critical points ( $\geq 2$  order) of the WENO scheme to capture the flow details in complex flow fields more accurately, Shen et al <sup>[1]</sup> proposed a new weight calculation method of WENO scheme, and constructed a high-order WENO-ZN scheme, can improve the accuracy of second-order critical points to fifth-order. In this paper, the concept of compact scheme is proposed to construct the tenth order compact global smoothness indicator, so that the new scheme (WENO-ZNc) can achieve a fifth order convergence in first-order, second-order and third-order critical points without adding stencil points. in order to maintain the ENO characteristics and the not affect effectiveness of the compact global smoothness indicator when discontinuity occurs, a new discontinuity-detecting method is developed through the compact global smoothness indicator. In the framework of the WENO-ZNc scheme, the smooth area adopts the compact global smoothness indicator, and the discontinuous area replaces the compact global smoothness indicator with an explicit global smoothness indicator (ie WENO-ZN scheme),so as to ensure the advantages of high precision and low dissipation in the smooth area (including high-order critical points). Numerical results show that the improved scheme is robust in shock capture, has higher accuracy and convergence speed, and reduces numerical dissipation. Meanwhile, the new scheme can greatly improve the resolution of complex small-scale flow structure.

**Key words** Weighted essentially non-oscillatory (WENO) scheme, critical point, global smoothness indicator, discontinuity-detecting method; high precision and low dissipation;